Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Зубов, К теоретико-игровому подходу исследования кодов аутентификации, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 3, 45–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:02:02

К теоретико-игровому подходу исследования кодов аутентификации

© 2009 г. А. Ю. Зубов

Развивается теоретико-игровой подход к оценке стойкости кодов аутентификации, предложенный Г. Симмонсом. Доказывается, что комбинирование атак типа имитации и подмены может позволить злоумышленнику получить выигрыш, больший, чем выигрыш от атак типа имитации или подмены по отдельности.

1. Введение

В статье Г. Симмонса [3] предложен теоретико-игровой подход к исследованию математических моделей систем аутентификации, названных кодами аутентификации или A -кодами. Этот подход использует матричное представление A -кода и выбор оптимальных стратегий защиты и нападения с позиций теории игр. В последующих статьях, посвященных A -кодам (напр., [2, 4, 6]), стала активно использоваться теоретико-игровая терминология. Еще один важный теоретико-игровой аспект, отмеченный в указанной статье, состоит в том, что стойкость системы аутентификации определяется не только традиционными вероятностями успеха имитации или подмены, совпадающими со значениями v_i и v_s соответствующих матричных игр, но и возможностью комбинирования злоумышленником атак имитации и подмены, что соответствует игре с объединенной матрицей. Известно, что значение v_G смешанного расширения такой игры удовлетворяет неравенству

$$v_G \geq \max\{v_i, v_s\}. \quad (1)$$

В [4] приведен пример A -кода с расщеплением, для которого в (1) выполняется строгое неравенство. Вместе с тем, в этом примере многое неясно, так как автор не дает никаких пояснений. Не представляется возможным проверить пример, поскольку неизвестны методы нахождения оптимальных стратегий для A -кодов, о чем заявляет в статье и сам автор. Не вызывает сомнения, что выяснение вопроса о том, выполняется ли для некоторого A -кода равенство или неравенство в (1), является важной задачей, поскольку именно величина v_G является адекватной мерой стойкости A -кода к атакам на основе не более чем одного наблюдаемого сообщения. Сказанное свидетельствует об актуальности разработки методов вычисления оптимальных стратегий для A -кодов и значения объединенной игры. В данной статье проводится подробная теоретико-игровая формализация и предлагается метод вычисления оптимальной стратегии защиты в объединенной игре, учитывающей возможность комбинирования злоумышленником имитации и подмены. Приводится пример A -кода, для которого вычисляются значения соответствующих игр. Указываются достаточные условия, при выполнении которых стойкость A -кода оценивается максимумом вероятностей успеха имитации и подмены.

2. Основные определения

В простейшей модели системы аутентификации информации принимают участие передатчик, приемник (сторона защиты) и оппонент (сторона нападения). Передатчик желает передать информацию о состоянии источника (которым может быть, например, результат подбрасывания монеты, или текстовое сообщение) приемнику по общедоступному каналу связи. С целью аутентификации передатчик образует сообщение, кодируя состояние источника с помощью правила кодирования, которое является секретным для оппонента. Используя то же правило, приемник проверяет аутентичность сообщения. Правило кодирования играет в этой модели роль секретного ключа, используемого при симметричном шифровании. В связи с этим должен быть предусмотрен комплекс мер по изготовлению и распределению секретных ключей передатчику и приемнику.

Оппонент имеет доступ к каналу связи и имеет полную информацию об используемой системе аутентификации, за исключением выбираемого стороной защиты правила кодирования. Оппонент имеет возможность осуществлять атаки имитации или подмены. Атака имитации состоит в попытке оппонента послать сообщение приемнику от имени передатчика, которое на самом деле передатчиком не посылалось. Атака подмены состоит в попытке оппонента подменить наблюдаемое им в канале связи сообщение другим сообщением, которое должно дезинформировать приемника о передаваемом состоянии источника. В обоих случаях оппонент рассчитывает на то, что поддельное сообщение будет принято как подлинное (аутентичное). Оппонент может выбирать вид атаки по своему усмотрению.

Отметим, что как имитация, так и подмена могут осуществляться оппонентом на основе наблюдения ряда сообщений в канале связи (как правило, полученных с помощью одного правила кодирования). Если оппонент принимает решение на основе наблюдения $r \geq 1$ сообщений, то говорят об активной атаке порядка r . В этой статье рассматривается лишь простейший тип атаки, когда оппонент принимает решение на основе наблюдения одного сообщения, при этом выбор поддельного сообщения при имитации не зависит от наблюдаемого сообщения (как в случае имитации в пустом канале).

Формальная модель системы аутентификации называется кодом аутентификации или А-кодом. Приведем соответствующие определения.

Пусть S — (конечное) множество состояний источника, M — (конечное) множество сообщений; сообщения передают информацию о состояниях источника; E — (конечное) множество правил кодирования; правило кодирования $e \in E$ представляет собой инъективное отображение $e: S \rightarrow M$. Это отображение может быть многозначным. Тогда говорят о системе аутентификации с расщеплением. Если каждое правило кодирования является однозначным отображением, то говорят о системе аутентификации без расщепления. Введем для $e \in E$ и $m \in M$ обозначения

$$\begin{aligned} e(S) &= \{e(s): s \in S\}, \\ E(m) &= \{e \in E: m \in e(S)\}. \end{aligned}$$

Будем полагать, что выполняется равенство

$$M = \bigcup_{e \in E} e(S), \quad (2)$$

означающее, что каждое сообщение является результатом применения некоторого правила кодирования к некоторому состоянию источника. Каждое правило кодирования e

определяет обратное отображение $f_e(m): M \rightarrow S \cup \{0\}$ формулой

$$f_e(m) = \begin{cases} s \in S, & \text{если } m = e(s), \\ 0, & \text{если } m \notin e(s). \end{cases}$$

При этом предполагается, что $0 \notin S$. Требование инъективности правила кодирования e делает определение f_e корректным. Для любых $s \in S$ и $e \in E$ выполняется равенство

$$f_e(e(s)) = s, \quad (3)$$

означающее, что сообщение и выбранное правило кодирования однозначно восстанавливают состояние источника.

Определение 1. Тройка множеств (S, E, M) , где S — множество состояний источника, $|S| \geq 2$, M — множество сообщений, $|M| \geq 3$, E — множество правил кодирования $e: S \rightarrow M$, $|E| \geq 3$, удовлетворяющих условиям (2) и (3), называется кодом аутентификации или A -кодом.

Передачик и приемник для аутентификации передаваемых друг другу состояний источника выбирают (в секрете от оппонента) правило кодирования $e \in E$. Передачик направляет приемнику сообщение $m = e(s)$. Критерием аутентичности полученного сообщения m является условие $f_e(m) \neq 0$.

Отметим ряд требований, которые естественно предъявлять к любому A -коду. Из условия (2) следует неравенство $|M| \geq |S|$. В случае, если $|M| = |S|$, все сообщения будут приниматься приемником как аутентичные, и в этом случае аутентификация невозможна. Поэтому будем считать, что выполняется условие $|M| > |S|$.

Если некоторое сообщение, например, m_1 , является допустимым лишь для одного правила кодирования $e \in E$, то есть, если $|E(m_1)| = 1$, то, наблюдая m_1 и зная систему аутентификации, оппонент найдет e и сможет подменить m_1 другим сообщением из множества $e(S)$, которое будет принято как аутентичное. Избежать этого позволяет условие, согласно которому каждое сообщение содержится во многих подмножествах аутентичных сообщений, то есть для любого $m \in M$

$$|E(m_1)| > 1. \quad (4)$$

С другой стороны, если выполняется равенство $E(m_1) = E$, то оппонент с вероятностью 1 добьется успеха, имитируя передачу m_1 . Поэтому будем полагать, что для любого $m \in M$ выполняется неравенство

$$|E(m)| < |E|. \quad (5)$$

Оппонент наверняка обманет, если заменит наблюдаемое сообщение m другим сообщением из множества

$$\bigcap_{e \in E(m)} e(S).$$

Поэтому естественно потребовать, чтобы для каждого $m \in M$ выполнялось условие

$$\bigcap_{e \in E(m)} e(S) = \{m\}. \quad (6)$$

Можно задать A -код матрицей кодирования размера $|E| \times |M|$, строки которой занумерованы правилами кодирования $e \in E$, столбцы сообщениями $m \in M$; на пересечении строки с номером e и столбца с номером m расположен элемент $f_e(m)$. Помимо матрицы кодирования вводится матрица X_A инцидентности A -кода, имеющая те же размеры. Ее элементы $x(e, m)$ определяются формулой

$$x(e, m) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_e(m) \neq 0, \\ 0, & \text{если } f_e(m) = 0. \end{cases}$$

Условия (2) и (4)–(6) означают, что матрица X_A не содержит нулевых строк и столбцов, содержит хотя бы один ноль и не менее двух единиц в каждой строке и каждом столбце, и не содержит двух и более столбцов, единицы одного из которых покрываются единицами другого.

Если в каждом столбце матрицы кодирования имеются вхождения лишь одного состояния источника, например, как в матрице

$$\begin{pmatrix} H & T & 0 & 0 \\ 0 & T & H & 0 \\ H & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & H & T \end{pmatrix}$$

(содержащей два состояния источника: H — орел, T — решка), то такой A -код называется декартовым A -кодом или A -кодом без секретности, в противном случае — A -кодом с секретностью. Формально A -код без секретности характеризуется тем, что если $e(s) = m$, то для любого $e' \in E(m)$ выполняется равенство $f_{e'}(m) = s$. Другими словами, любое сообщение однозначно определяет состояние источника, поэтому передаваемое состояние источника не является секретом для оппонента.

Любой A -код без секретности можно представить в виде A -кода с аутентификатором. Так называются A -коды, для которых $M \subseteq S \times A$, где A — множество аутентификаторов, и для любых $s \in S$ и $e \in E$ сообщение $m = e(s)$ имеет вид (s, a) для подходящего $a \in A$. Другими словами, сообщение состоит из передаваемого состояния источника и добавленного к нему аутентификатора, вычисленного с помощью выбранного правила кодирования e . Аутентификатор является образом элемента s при отображении $\bar{e}: S \rightarrow A$, таким образом, для A -кода с аутентификатором сообщение имеет вид $e(s) = (s, \bar{e}(s))$. Отображение $\bar{e}$ не обязано быть инъективным, поскольку при проверке аутентичности полученного сообщения (s, a) нужно лишь вычислить значение $\bar{e}(s)$ и сравнить его с a . В связи с этим аутентификаторы могут быть достаточно короткими, при этом их длины определяются выбранным уровнем стойкости A -кода.

С A -кодом ассоциируется следующая тройка случайных величин. Предполагается, что состояния источника, правила кодирования и сообщения выбираются случайно. Пусть $\tilde{S}$ — случайная величина, принимающая значения из S и имеющая распределение $P(S) = (p_S(s), s \in S)$ при этом предполагается, что элементы множества S некоторым естественным образом упорядочены. Тогда $P(S)$ рассматривается как вектор. Пусть $\tilde{E}$ — случайная величина, принимающая значения из E и имеющая распределение $P(E) = (p_E(e), e \in E)$. Распределение $P(S)$ считается заданным априорно и является неизменным, в то время как распределение $P(E)$ может регулироваться передатчиком и приемником с целью повышения надежности защиты от активных атак. Будем полагать, что состояния источника и правила кодирования выбираются независимо друг от друга, то есть, что случайные величины $\tilde{S}$ и $\tilde{E}$ являются независимыми. Они индуцируют случайную величину $\tilde{M}$, принимающую значения из M и имеющую распределение

$P(M) = (p_M(m), m \in M)$. При этом вероятность $p_M(m)$ вычисляется для A -кода без расщепления (далее рассматриваются лишь такие A -коды) по формуле

$$p_M(m) = \sum_{e \in E(m)} p_E(e) p_S(f_e(m)), \quad (7)$$

которая следует из формулы полной вероятности

$$p_M(m) = \sum_{e \in E} p_E(e) p_{M|E}(m | e),$$

где

$$p_{M|E}(m|e) = \begin{cases} p_S(f_e(m)), & \text{если } m \in e(S), \\ 0, & \text{если } m \notin e(S). \end{cases} \quad (8)$$

3. Теоретико-игровая интерпретация A -кода

Будем пользоваться общепринятыми в теории игр понятиями матричной игры, ситуации в матричной игре, функции выигрыша, чистых, смешанных и оптимальных стратегий (см., напр., [1]).

С A -кодом ассоциируются три матричные игры. В каждой из игр одна сторона нападает, а другая защищается. Будем далее, следуя принятой в теории игр терминологии, называть сторону нападения (оппонента) первым игроком, а сторону защиты (передатчика и приемника) вторым игроком.

При игре в имитацию ход первого игрока состоит в выборе сообщения $m \in M$, а ход второго — в выборе правила кодирования $e \in E$. Если $f_e(m) \neq 0$, то выигрывает первый игрок, если $f_e(m) = 0$, то — второй. Чистая стратегия защиты соответствует выбору строки матрицы инцидентности X_A , а чистая стратегия нападения — выбору столбца. Значение функции выигрыша Φ_i в ситуации (e, m) определяется равенством $\Phi_i(e, m) = x(e, m)$.

Если игроки выбирают свои стратегии в игре случайно, в соответствии с некоторыми распределениями вероятностей $Q = Q(M)$ и $P = P(E)$, то говорят о смешанном расширении матричной игры; при этом Q и P называют, соответственно, смешанной стратегией нападения и смешанной стратегией защиты.

Согласно теореме о минимаксе [1], существуют оптимальные смешанные стратегии, которые минимизируют проигрыш стороны защиты и максимизируют выигрыш оппонента. Выигрыш оппонента в ситуации (Q, P) выражается формулой

$$v_i(Q, P) = \sum_{e \in E} \sum_{m \in M} p(e) x(e, m) q(m) = \sum_{m \in M} \sum_{e \in E(m)} p(e) q(m). \quad (9)$$

Выигрыш, полученный при использовании игроками оптимальных смешанных стратегий, называется значением игры в имитацию и обозначается v_i . Таким образом, если $Q^{(0)}$ и $P^{(0)}$ — любая пара оптимальных смешанных стратегий, то

$$v_i = v_i(Q^{(0)}, P^{(0)}). \quad (10)$$

Эта величина характеризует стойкость A -кода к атаке имитации.

При рассмотрении игры в подмену заметим, что для A -кодов без расщепления из неравенств $n \neq m$, $f_e(n) \neq 0$ и $f_e(m) \neq 0$ следует, что $f_e(n) \neq f_e(m)$. Это означает, что при подмене наблюдаемого сообщения m другим сообщением n , которое принимается как аутентичное, приемник будет дезинформирован о передаваемом состоянии источника. В этой игре второй игрок выбирает (e, s) , $e \in E$, $s \in S$, а первый, наблюдая $m = e(s)$, выбирает сообщение $n \in M$, подменяющее m . Значение функции выигрыша в ситуации $((e, s), n)$ полагается равным

$$y((e, s), n) = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in E(n), n \neq e(s), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть Y_A — матрица, составленная из элементов $y((e, s), n)$, строки которой пронумерованы парами (e, s) , $e \in E$, $s \in E$, столбцы — сообщениями $n \in M$.

Смешанными стратегиями игроков служат соответственно распределение вероятностей $V = \{v(e, s), e \in E, s \in S\}$ на $E \times S$ и совокупность $U = \{U_m, m \in M\}$ распределений $U_m = (u_{m,n}, n \in M)$, где $u_{m,n}$ — вероятность выбора сообщения n , подменяющего m . Выигрыш $v_\Pi(U, V)$ первого игрока в ситуации (U, V) определяется средним значением выигрыша $y((e, s), n)$ при случайном выборе $(e, s) \in E \times S$ и $n \in M$ в соответствии с распределениями V и U . Он выражается формулой

$$\begin{aligned} v_\Pi(U, V) &= \sum_{e \in E} \sum_{s \in S} \sum_{n \in M} v(e, s) y((e, s), n) u_{e(s), n} \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{s \in S} \sum_{n \in e(S)} v(e, s) u_{e(s), n} = \sum_{m \in M} \sum_{n \neq m} \sum_{e \in E(m, n)} v(e, f_e(m)) u_{m, n}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$E(m, n) = E(m) \cap E(n).$$

Нам понадобится и другая трактовка игры в подмену. Чтобы изложить ее, заметим, что вероятность $v(e, s)$ выбора вторым игроком пары (e, s) (в силу независимости случайных величин $\tilde{E}$ и $\tilde{S}$) равна произведению вероятностей $p_E(e)$ и $p_S(s)$:

$$v(e, s) = p_E(e) p_S(s). \quad (12)$$

А так как распределение случайной величины $\tilde{S}$ считается априорно заданным и не регулируется игроками, в смешанном расширении игры с матрицей Y_A второй игрок фактически выбирает лишь распределение $P(E)$, которое можно считать смешанной стратегией защиты. Первый игрок должен выбрать сообщение, отличное от того, которое он будет наблюдать в канале связи. Это означает, что его ход состоит в выборе отображения $\varphi: M \rightarrow M$ без неподвижных точек. При этом любое наблюдаемое сообщение m первый игрок заменит на $\varphi(m)$. Смешанная стратегия первого игрока — распределение вероятностей $R(\Psi)$ на множестве Ψ отображений множества M в себя без неподвижных точек.

Новая версия игры в подмену характеризуется матрицей $\bar{Y}_A$ размера $|E| \times |\Psi|$. Элемент $\bar{y}(e, \varphi)$ этой матрицы определяется как вероятность того, что в ситуации (e, φ) модифицированное сообщение будет принято как аутентичное. Для вычисления $\bar{y}(e, \varphi)$ воспользуемся формулой полной вероятности. Пусть $A(e, \varphi)$ — событие, состоящее в успехе подмены в ситуации (e, φ) , и $A(e, \varphi, m)$ — событие, состоящее в успехе подмены

наблюдаемого сообщения m при данных e, φ . Тогда

$$\begin{aligned}\bar{y}(e, \varphi) &= \mathbf{P}\{A(e, \varphi)\} = \sum_{s \in S} \mathbf{P}\{A(e, \varphi, e(s))\} p_S(s) \\ &= \sum_{s \in S} y((e, s), \varphi(e(s))) p_S(s) = \sum_{s \in S: f_e(\varphi(e(s))) \neq 0} p_S(s).\end{aligned}\quad (13)$$

Смешанными стратегиями в игре с матрицей $\bar{Y}_A$ служат соответственно распределения вероятностей $R(\Psi) = R = (r_R(\varphi) \varphi \in \Psi)$ и $P(E) = P$. Выигрыш первого игрока в ситуации (R, P) выражается формулой

$$\bar{v}_\Pi(R, P) = \sum_{e \in E} \sum_{\varphi \in \Psi} p_E(e) \bar{y}(e, \varphi) r_R(\varphi). \quad (14)$$

Для оптимальных смешанных стратегий $R^{(0)}, P^{(0)}$ получаем значение игры

$$\bar{v}_s = \bar{v}_s(R^{(0)}, P^{(0)}). \quad (15)$$

Эта величина характеризует стойкость A -кода к атаке подмены.

Покажем, что обе версии игры в подмену эквивалентны, то есть имеют одинаковые значения и однозначно связанные друг с другом оптимальные стратегии защиты.

Обозначим через $\hat{U}, \hat{V}, \hat{R}, \hat{P}$ множества возможных стратегий U, V, R, P соответственно.

Теорема 1. *Игры в подмену с матрицами Y_A и $\bar{Y}_A$ имеют одинаковые значения. Оптимальная стратегия защиты в смешанных расширениях игры с матрицей Y_A является оптимальной стратегией защиты в расширении игры с матрицей $\bar{Y}_A$ и наоборот.*

Доказательство. Отметим, прежде всего, что первая версия игры в подмену не является традиционной матричной игрой, поскольку смешанными стратегиями игроков служат не одномерные распределения вероятностей на множествах строк и столбцов матрицы игры, а двумерные распределения. В силу этого требуется доказательство аналога теоремы о минимаксе для этой версии игры, то есть наличие равенства

$$\min_{V \in \hat{V}} \max_{U \in \hat{U}} v_s(U, V) = \max_{U \in \hat{U}} \min_{V \in \hat{V}} v_s(U, V), \quad (16)$$

где $v_s(U, V)$ выражается формулой (11). Покажем, что это действительно так.

Пусть R — смешанная стратегия нападения в игре с матрицей $\bar{Y}_A$. Обозначим через $U(R)$ смешанную стратегию нападения в игре с матрицей Y_A , индуцируемую стратегией R по формуле

$$u_{m,n} = \sum_{\varphi \in \Psi: \varphi(m)=n} r_R(\varphi). \quad (17)$$

Аналогично стратегия нападения U в игре с матрицей Y_A индуцирует стратегию нападения $R(U)$ в игре с матрицей $\bar{Y}_A$ по формуле

$$r_R(\varphi) = \prod_{m \in M} u_{m, \varphi(m)}. \quad (18)$$

Несложно проверить, что $(u_{m,n}: n \in M)$ и $(r_R: \varphi \in \Psi)$, заданные формулами (17) и (18), образуют вероятностные распределения.

Покажем, что значение $v_n(U, V)$ игры с матрицей Y_A в произвольной ситуации (U, V) совпадает со значением $\bar{v}_n(R(U), V)$ игры с матрицей $\bar{Y}_A$ в ситуации $(R(U), V)$, где $R(U)$ определяется формулой (18), а распределения V и P связаны друг с другом формулой (12). В самом деле, подставляя выражение $u_{m,n}$ из (17) в (11) и используя (12), получаем равенства

$$\begin{aligned} v_s(U, P) &= \sum_{m \in M} \sum_{n \neq m} \sum_{e \in E(m, n)} \sum_{\varphi \in \Psi: \varphi(m) = n} p_E(e) p_S(f_e(m)) r_R(\varphi) \\ &= \sum_{m \in M} \sum_{\varphi \in \Psi} \sum_{e \in E(m, \varphi(m))} p_E(e) p_S(f_e(m)) r_R(\varphi) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{\varphi \in \Psi} \sum_{s \in S: f_e(\varphi(e(s))) \neq 0} p_E(e) p_S(s) r_R(\varphi) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{\varphi \in \Psi} p_E(e) r_R(\varphi) \sum_{s \in S: f_e(\varphi(e(s))) \neq 0} p_S(s) = \bar{v}_n(R(U), P). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что значение $\bar{v}_s(R, P)$ игры с матрицей $\bar{Y}_A$ в произвольной ситуации (R, P) совпадает со значением $v_s(U(R), P)$ игры с матрицей Y_A в ситуации $(U(R), P)$, где $U(R)$ определяется формулой (17), а распределения V и P связаны друг с другом формулой (12). В самом деле, подставляя выражение $r_R(\varphi)$ из (18) в (14), получаем, что

$$\begin{aligned} \bar{v}_n(R, P) &= \sum_{e \in E} \sum_{\varphi \in \Psi} p_E(e) \bar{y}(e, \varphi) r_R(\varphi) = \sum_{\varphi \in \Psi} r_R(\varphi) \sum_{e \in E} \sum_{s \in S: f_e(\varphi(e(s))) \neq 0} p_E(e) p_S(s) \\ &= \sum_{\varphi \in \Psi} \left(r_R(\varphi) \sum_{m \in M} \sum_{e \in E(m, \varphi(m))} p_E(e) p_S(f_e(m)) \right) \\ &= \sum_{\varphi \in \Psi} \left(\prod_{m' \in M} u_{m', \varphi(m')} \sum_{m \in M} \sum_{e \in E(m, \varphi(m))} p_E(e) p_S(f_e(m)) \right). \end{aligned}$$

Обозначим последнее выражение через Σ . Его можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{\Delta(|M|)} (u_{m_1, n_1} \dots u_{m_{|M|-1}, n_{|M|-1}} \cdot S_{|M|}) + \dots \\ &\quad + \sum_{\Delta(t)} (u_{m_1, n_1} \dots u_{m_{t-1}, n_{t-1}} u_{m_{t+1}, n_{t+1}} \dots u_{m_{|M|}, n_{|M|}} S_t) \\ &\quad + \sum_{\Delta(1)} (u_{m_2, n_2} \dots u_{m_{|M|}, n_{|M|}} S_1), \end{aligned}$$

где $\Delta(t) = \{(n_1, \dots, n_{t-1}, n_{t+1}, \dots, n_{|M|}) \in M^{|M|-1}, n_i \neq m_i, i \in \{1, \dots, |M|\} \setminus \{t\}\}$, а

$$S_t = \sum_{i \in \{1, \dots, |M|\} \setminus \{t\}} u_{m_t, m_i} \sum_{j \in \{1, \dots, |M|\} \setminus \{t\}} \sum_{e \in E(m_j, n_j)} p_E(e) p_S(f_e(m_j))$$

при $t = 1, \dots, |M|$. Замечая теперь, что

$$\sum_{i \in \{1, \dots, |M|-1\}} u_{m_{|M|}, m_i} = \dots = \sum_{i \in \{1, \dots, |M|\} \setminus \{t\}} u_{m_t, m_i} = \dots = \sum_{i \in \{2, \dots, |M|\}} u_{m_1, m_i} = 1,$$

и производя в полученном выражении аналогичную группировку слагаемых, мы получим равенства

$$\bar{v}_n(R, P) = \sum_{m \in M} \sum_{n \neq m} \sum_{e \in E(m, n)} p_E(e) p_S(f_e(m)) u_{m, n} = v_n(U(R), V).$$

Функция $v_n(U, V)$, определенная на компакте и принимающая значения из $[0, 1]$, является непрерывной, и поэтому существуют минимакс и максимин, указанные в (16). Покажем, что они равны. Для этого заметим, что имеет место равенство

$$\{v_n(U, V): U \in \hat{U}\} = \{v_n(U(R), V): R \in \hat{R}\},$$

где $U(R)$ и R связаны соотношением (17). В самом деле, включение $\supseteq$ очевидно. Обратное включение следует из цепочки равенств

$$v_s(U_0, V) = \bar{v}_s(R(U_0), P) = v_s((U(R_0), V)),$$

где для любого $U_0 \in \hat{U}$ через R_0 обозначено распределение $R(U_0) \in \hat{R}$.

Из полученного равенства следует, что

$$\max_{R \in \hat{R}} \min_{P \in \hat{P}} \bar{v}_n(R, P) = \max_{R \in \hat{R}} \min_{V \in \hat{V}} v_n(U(R), V) = \max_{U \in \hat{U}} \min_{V \in \hat{V}} v_n(U, V).$$

Аналогично,

$$\min_{P \in \hat{P}} \max_{R \in \hat{R}} \bar{v}_n(R, P) = \min_{V \in \hat{V}} \max_{R \in \hat{R}} v_n(U(R), V) = \min_{V \in \hat{V}} \max_{U \in \hat{U}} v_n(U, V).$$

Поскольку вторая версия игры в подмену является обычной матричной игрой, для нее справедлива теорема о минимаксе, согласно которой

$$\min_{P \in \hat{P}} \max_{R \in \hat{R}} \bar{v}_n(R, P) = \max_{R \in \hat{R}} \min_{P \in \hat{P}} \bar{v}_n(R, P) = \bar{v}_n.$$

Объединяя предыдущие соотношения, получаем (16). Полагая в (16) значение минимакса (и максимина) равным v_s , получаем попутно равенство $v_s = \bar{v}_s$. Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет при нахождении значения игры и оптимальных смешанных стратегий использовать в зависимости от обстоятельств любую из приведенных трактовок игры в подмену. В связи с тем, что стратегия V однозначно определяется стратегией P , будем далее вместо выражения $v_s(U, V)$ использовать выражение $v_s(U, P)$.

Приведем числовой пример. Рассмотрим A -код с множествами

$$S = \{H, T\}, \quad M = \{m_1, m_2, m_3\}, \quad E = \{e_1, e_2, e_3\},$$

распределением

$$p_S(H) = p, \quad p_S(T) = 1 - p, \quad 0 < p < 1,$$

и матрицей кодирования

$$\begin{pmatrix} H & T & 0 \\ T & 0 & H \\ 0 & T & H \end{pmatrix}$$

Для этого A -кода матрица инцидентности X_A и матрица Y_A имеют вид

$$X_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы Y_A пронумерованы, соответственно, парами (e_1, H) , (e_1, T) , (e_2, T) , (e_2, H) , (e_3, T) , (e_3, H) , а столбцы, соответственно, — символами m_1, m_2, m_3 .

Матрица $\bar{Y}_A$ имеет вид

$$\bar{Y}_A = \begin{pmatrix} p & p & 1 & 1 & 0 & 0 & 1-p & 1-p \\ p & 0 & p & 0 & 1 & 1-p & 1 & 1-p \\ 1-p & 1 & 0 & p & 1-p & 1 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (19)$$

Строки этой матрицы пронумерованы правилами кодирования $e_1, e_2, e_3 \in E$, столбцы — отображениями $\varphi_1, \dots, \varphi_8: M \rightarrow M$ без неподвижных точек. Каждое отображение соответствует стратегии нападения (подмены) и представляется двустрочной записью (подстановкой)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \varphi_4 &= \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_5 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_6 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \varphi_7 &= \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_8 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Как было отмечено ранее, оппонент (первый игрок) для достижения своих целей может выбирать между имитацией или подменой. Этой возможности отвечает игра с матрицей Z_A , являющейся конкатенацией матриц X_A и $\bar{Y}_A$. Смешанное расширение G игры с матрицей Z_A назовем объединенной игрой. Стратегиями игроков в этой игре служат соответственно распределение вероятностей $P(E) = P$ (на множестве строк матрицы Z_A) и распределение вероятностей $W(M \cup \Psi) = W$ (на множестве столбцов матрицы Z_A). Значение v_G объединенной игры — это вероятность выигрыша первого игрока в случае, когда игроки используют оптимальные стратегии $W^{(0)}$ и $P^{(0)}$. Эта величина является объективной мерой стойкости A -кода к рассматриваемым в этой статье простейшим атакам.

4. Вероятности успеха атак имитации и подмены

Случайный выбор состояния источника, правила кодирования и сообщения при имитации или подмене в соответствии с выбранными распределениями определяет вероятности успеха оппонента. Получим формулы для этих вероятностей в случае, когда стороны выбирают соответствующие распределения лучшим образом.

4.1. Атака имитации

Пусть $P(E) = P$ и $Q(M) = Q$ — смешанные стратегии защиты и нападения при имитации. Успех первого игрока при попытке имитации с помощью сообщения $m \in M$

определяется вероятностью события $m \in e(S)$ при случайном выборе $e \in E$. Обозначим эту вероятность через $p_i(m)$. Она выражается формулой

$$p_i(m) = \sum_{e \in E(m)} p_E(e). \quad (20)$$

Если первый игрок случайно выбирает сообщение $m \in M$ в соответствии с распределением $Q(M)$, то среднее значение $p_i(m)$, равное $\sum_{m \in M} q(m) p_i(m)$, совпадает с величиной $v_i(Q, P)$, выраженной формулой (9). В зависимости от выбранных распределений, вероятность $v_i(Q, P)$, может изменяться в значительных пределах. Естественно, что второй игрок стремится минимизировать свои потери, а первый максимизировать свой выигрыш.

Второй игрок при выборе стратегии исходит из того, что первый игрок стремится получить максимальный выигрыш, равный $\max_Q v_i(Q, P)$. Лучшая стратегия защиты должна минимизировать этот проигрыш. В любом случае проигрыш не превзойдет $\min_P \max_Q v_i(Q, P)$. В свою очередь, первый игрок при выборе стратегии исходит из того, что второй игрок стремится обеспечить минимальный проигрыш, равный $\min_P v_i(Q, P)$. Выбор стратегии нападения должен максимизировать этот выигрыш. В любом случае выигрыш будет, не меньшим $\max_Q \min_P v_i(Q, P)$. Согласно теореме о минимаксе, указанные экстремумы существуют и равны, то есть справедливы равенства

$$\min_P \max_Q v_i(Q, P) = \max_Q \min_P v_i(Q, P) = v_i(Q^{(0)}, P^{(0)}) = v_i, \quad (21)$$

где $Q^{(0)}$ и $P^{(0)}$ — любая пара оптимальных стратегий.

Получим удобное выражение для значения игры.

Пусть $P(E) = P$ — произвольная стратегия защиты и $m_0 = m_0(P) \in M$ — сообщение, для которого выполняется равенство

$$p_i(m_0) = \max_{m \in M} p_i(m), \quad (22)$$

где $p_i(m)$ определяется формулой (20). Пусть $\bar{Q}(P) = (\bar{q}(m), m \in M)$ — такая стратегия нападения, что

$$\bar{q}(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = m_0, \\ 0, & \text{если } m \neq m_0. \end{cases} \quad (23)$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$v_i = \min_P \sum_{e \in E(m_0(P))} p_E(e), \quad (24)$$

где сообщение $m_0(P)$ определено условием (22).

Доказательство. Заметим, что указанная выше стратегия $\bar{Q}(P)$ дает максимальный выигрыш против стратегии P . В самом деле, если Q — произвольная стратегия нападения, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} v_i(Q, P) &= \sum_{m \in M} q(m) p_i(m) \leq \sum_{m \in M} q(m) p_i(m_0) = p_i(m_0) \sum_{m \in M} q(m) \\ &= p_i(m_0) = \sum_{e \in E(m_0)} p_E(e) = v_i(\bar{Q}(P), P). \end{aligned}$$

Пусть $Q^{(0)}, P^{(0)}$ — некоторая пара оптимальных стратегий. Тогда, используя полученное свойство стратегии $\bar{Q}(P)$, получаем соотношения

$$v_i(\bar{Q}(P^{(0)}), P^{(0)}) \geq v_i(Q^{(0)}, P^{(0)}) = v_i,$$

из которых следует, что

$$v_i(\bar{Q}(P^{(0)}), P^{(0)}) = v_i,$$

так как в противном случае стратегия $P^{(0)}$ позволяла бы получить выигрыш, больший, чем v_i , что противоречит условию ее оптимальности. Отсюда следует неравенство

$$\min_P v_i(\bar{Q}(P), P) \leq v_i.$$

Предположим, что $\min_P v_i(\bar{Q}(P), P) < v_i$. Тогда найдется стратегия P' , для которой $v_i(\bar{Q}(P'), P') < v_i$. Воспользуемся тем, что использование оптимальной стратегии гарантирует первому игроку выигрыш, не меньший, чем значение игры. Это означает, что выполняется неравенство $v_i(Q^{(0)}, P') \geq v_i$. Отсюда получаем противоречивую цепочку неравенств

$$v_i \leq v_i(Q^{(0)}, P') \leq v_i(\bar{Q}(P'), P') < v_i.$$

Следовательно,

$$v_i = \min_P v_i(\bar{Q}(P), P),$$

откуда следует (24). Теорема доказана.

По определению вероятность успеха имитации совпадает со значением v_i и определяется формулой (24). Обычно эту вероятность обозначают p_0 .

Вычислим значение v_i для приведенного выше примера А-кода. Для этого найдем явное выражение $\min_{P(E)} p_n(m_0)$, где m_0 определяется условием (22).

Пусть $p_E(e_i) = x_i, i \in \{1, 2, 3\}$. По матрице кодирования находим, что

$$p_i(m_1) = x_1 + x_2, \quad p_i(m_2) = x_1 + x_3, \quad p_i(m_3) = x_2 + x_3.$$

Отсюда

$$p_i(m_0) = \max_{m \in M} p_n(m) = \max\{x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3\}.$$

Для нахождения v_i нужно минимизировать $p_i(m_0)$ по множеству значений

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad 0 < x_i < 1. \quad (25)$$

Легко проверить, что

$$L = \max\{x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3\} \geq 2/3,$$

и что, если $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$, то $L = 2/3$. Отсюда следует, что оптимальная стратегия защиты от имитации состоит в случайном равновероятном выборе $e \in E$, и $v_i = p_0 = 2/3$. Несложно также заметить, что для данного А-кода имеется лишь одна оптимальная стратегия защиты, причем она совпадает с единственной оптимальной стратегией нападения.

4.2. Атака подмены

Успех оппонента при попытке подмены наблюдаемого сообщения $m \in M$ сообщением $n \neq m$ характеризуется вероятностью того, что для случайно выбранной пары (e, s) происходит событие $A = \{n \neq m, f_e(n) \neq 0\}$ при условии, что произошло событие $B = \{e(s) = m\}$. Обозначим эту условную вероятность через $p_s(n | m)$. Она равна отношению вероятности одновременного наступления событий A и B к вероятности события B :

$$p_s(n | m) = \frac{1}{p_M(m)} \sum_{e \in E(m, n)} p_E(e) p_S(f_e(m)), \quad (26)$$

где $p_M(m)$ определяется формулой (7). Стратегия нападения определяется совокупностью распределений $U = \{U_m, m \in M\}$, а стратегия защиты — распределением $P(E) = P$. При выбранных стратегиях U и P успех первого игрока определяется средним значением вероятности $p_s(n | m)$, то есть

$$\sum_{m \in M} \sum_{n \neq m} p_M(m) p_s(n | m) u_{m, n}. \quad (27)$$

Из (7), (11), (26) и (27) следует, что среднее значение $p_s(n | m)$ совпадает с $v_s(U, P)$. Таким образом,

$$v_s(U, P) = \sum_{m \in M} \sum_{n \neq m} p_M(m) p_s(n | m) u_{m, n}. \quad (28)$$

Как и при имитации, значение v_s игры в подмену определяется теоремой о минимаксе

$$\min_P \max_U v_s(U, P) = \max_U \min_P v_s(U, P) = v_s(U^{(0)}, P^{(0)}) = v_s. \quad (29)$$

Получим удобное выражение для v_s .

Пусть P — произвольная стратегия защиты и $m^0 = m^0(m, P) \in M$ — любое сообщение, определенное для данного $m \in M$ и распределения P равенством

$$p_s(m^0 | m) = \max_{n \neq m} p_s(n | m). \quad (30)$$

Пусть $\bar{U}(P) = \bar{U}$ — стратегия защиты, состоящая из распределений

$$\bar{U}_m = (\bar{u}_{m, m^0} = 1, \bar{u}_{m, n} = 0, n \neq m^0). \quad (31)$$

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$v_s = \min_P \sum_{m \in M} \sum_{e \in E(m, m^0(m, P))} p_E(e) p_S(f_e(m)), \quad (32)$$

где сообщение $m^0(m, P)$ определено условием (30).

Доказательство. Нетрудно видеть, что указанная выше стратегия $\bar{U}(P)$ дает максимальный выигрыш против стратегии P . Точно так же, как в теореме 2, доказывается равенство

$$v_s = \min_P v_s(\bar{U}(P), P),$$

из которого следует (32).

По определению вероятность успеха подмены совпадает со значением v_s и определяется формулой (32). Обычно эту вероятность обозначают p_1 .

Вычислим значение v_s для приведенного выше примера A -кода. Для этого найдем явное выражение суммы $\sum_{m \in M} p_M(m) p_s(m^0 | m)$. Воспользуемся тем, что

$$p_M(m) p_s(m^0 | m) = \max_{n, n \neq m} (p_M(m) p_s(n | m)) = \max_{n, n \neq m} \sum_{e \in E(m, n)} p_E(e) p_S(f_e(m)).$$

С помощью матрицы кодирования находим, что

$$\begin{aligned} p_M(m_1) p_s(m_1^0 | m_1) &= \max\{x_1 p, x_2(1 - p)\}, \\ p_M(m_2) p_s(m_2^0 | m_2) &= \max\{x_1(1 - p), x_3(1 - p)\}, \\ p_M(m_3) p_s(m_3^0 | m_3) &= \max\{x_2 p, x_3 p\}, \end{aligned}$$

где, как и выше, $p_E(e_i) = x_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Отсюда получаем, что

$$L(x_1, x_2, x_3) = \max\{x_1 p, x_2(1 - p)\} + (1 - p) \max\{x_1, x_3\} + p \max\{x_2, x_3\}. \quad (33)$$

По определению

$$v_s = p_1 = \min_{P(E)} L(x_1, x_2, x_3).$$

Для нахождения v_s нужно вычислить минимум $L(x_1, x_2, x_3)$ по множеству Δ значений переменных x_i , определяемому условиями (25). Это можно сделать путем вычисления $\min_{\Delta_i} L(x_1, x_2, x_3)$ в каждом из подмножеств Δ_i , $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, множества Δ , определяемых условиями достижения максимумов в трех слагаемых, составляющих (33). Рассмотрим, например, подмножество Δ_7 , определяемое неравенствами

$$x_1 p \leq x_2(1 - p), \quad x_1 \leq x_3, \quad x_2 \geq x_3. \quad (34)$$

Условия (34) можно записать в виде

$$x_1 \leq x_3 \leq x_2, \quad x_1 \leq x_2(1 - p)/p. \quad (35)$$

В условиях этого случая

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3(1 - p).$$

Из равенства $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ и того, что в рассматриваемом случае $L(x_1, x_2, x_3)$ — линейная функция с положительными коэффициентами, не содержащая x_1 , следует, что функция принимает минимальное значение при максимальном значении x_1 . Из (35) найдем достижимую верхнюю оценку для x_1 .

Если $p \leq 1/2$, то

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 3x_1,$$

откуда $x_1 \leq 1/3$. Если $x_1 = 1/3$, то $x_1 = x_2 = x_3$ и

$$\min_{\Delta_7} L(x_1, x_2, x_3) = \frac{2 - p}{3}.$$

Если $p > 1/2$, то

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 \geq x_1 + x_2 p / (p - 1) + x_1 = x_1(2 - p)(1 - p),$$

откуда

$$x_1 \leq (2 - p)/(1 - p).$$

Если $x_1 = (2 - p)/(1 - p)$, то

$$x_3 = x_1, \quad x_2 = x_1 p/(1 - p)$$

и

$$\min_{\Delta_7} L(x_1, x_2, x_3) = (1 - p + p^2)/(2 - p).$$

Действуя аналогично в остальных случаях, получаем в итоге следующий результат:
при $p \leq 1/2$

$$\min L(x_1, x_2, x_3) = \min \left\{ \frac{1 - p + p^2}{1 + p}, \frac{1 - p^2}{2 - p}, \frac{2 - p}{3} \right\} = \frac{1 - p^2}{2 - p},$$

а при $p > 1/2$

$$\min L(x_1, x_2, x_3) = \min \left\{ \frac{1 + p}{3}, \frac{p(2 - p)}{1 + p}, \frac{1 - p + p^2}{2 - p} \right\} = \frac{p(2 - p)}{1 + p}.$$

Таким образом,

$$v_s = p_1 = \begin{cases} (1 - p^2)/(2 - p), & \text{если } 0 < p \leq 1/2, \\ (p(2 - p))/(1 + p), & \text{если } 1/2 \leq p < 1. \end{cases}$$

Единственной оптимальной стратегий защиты от подмены является смешанная стратегия, определяемая распределением

$$P^{(0)}(E) = \begin{cases} (1 - p)/(2 - p), p/(2 - p), (1 - p)/(2 - p), & \text{если } 0 < p \leq 1/2, \\ (1 - p)/(1 + p), p/(1 + p), p/(1 + p), & \text{если } 1/2 \leq p < 1. \end{cases} \quad (36)$$

Единственность оптимальной стратегии защиты для данного A -кода позволяет полностью описать множество оптимальных стратегий нападения. В самом деле, любая оптимальная стратегия нападения $\bar{y} = (y_1, \dots, y_8)$ удовлетворяет условию

$$\bar{P}^{(0)}(E) \bar{Y}_A \bar{y}^T = v_{\Pi},$$

откуда при $0 < p \leq 1/2$ получаем уравнение

$$\left(\frac{1 - p}{2 - p}, \frac{p}{2 - p}, \frac{1 - p}{2 - p} \right) \bar{Y}_A \bar{y}^T = \frac{1 - p^2}{2 - p},$$

а при $1/2 \leq p < 1$ — уравнение

$$\left(\frac{1 - p}{1 + p}, \frac{p}{1 + p}, \frac{p}{1 + p} \right) \bar{Y}_A \bar{y}^T = \frac{p(2 - p)}{1 + p}.$$

Пользуясь матрицей (19), получаем эквивалентные выражения

$$\frac{1 - p + p^2}{2 - p} (y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + \frac{1 - p^2}{2 - p} (y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = \frac{1 - p^2}{2 - p}$$

и

$$\frac{p(2-p)}{1+p}(y_1 + y_2 + y_5 + y_6) + \frac{1-p+p^2}{1+p}(y_3 + y_4 + y_7 + y_8) = \frac{p(2-p)}{1+p}.$$

Отсюда следует, что при $0 < p \leq 1/2$ множество оптимальных стратегий нападения совпадает с множеством решений уравнения

$$y_2 + y_4 + y_6 + y_8 = 1,$$

а при $1/2 \leq p < 1$ — с множеством решений уравнения

$$y_1 + y_2 + y_5 + y_6 = 1.$$

Сопоставляя результаты вычислений для данного A -кода значений v_i и v_s , убеждаемся, что при $p = 1/2$ оптимальной стратегией защиты, как от имитации, так и от подмены, является равновероятный выбор правил кодирования, а при $p \neq 1/2$ оптимальные стратегии защиты от имитации и от подмены различаются. Максимальное значение вероятности успеха подмены для рассмотренного A -кода равно $(4\sqrt{3}-6)/3 \approx 0,539$. Оно достигается для двух значений параметра p , именно, для $p = 2 - \sqrt{3}$ и $p = \sqrt{3} - 1$.

5. Объединенная игра

Пусть

$$G_A = (X_A \bar{Y}_A) = (z(e, \theta))_{e \in E, \theta \in M \cup \Psi}, \quad (37)$$

— матрица объединенной игры. Элемент $z(e, \theta)$ имеет вид

$$z(e, \theta) = \begin{cases} x(e, m), & \text{если } \theta = m \in M, \\ \bar{y}(e, \varphi), & \text{если } \theta = \varphi \in \Psi. \end{cases}$$

Пусть $v_G(W, P)$ — значение смешанного расширения объединенной игры в ситуации (W, P) , где $P = P(E)$ — стратегия защиты и $W = W(M \cup \Psi)$ — стратегия нападения. По определению,

$$v_G(W, P) = \sum_{e \in E} \sum_{\theta \in M \cup \Psi} p(e) z(e, \theta) w(\theta), \quad (38)$$

и значение v_G игры выражается в виде

$$v_G = v_G(W^{(0)}, P^{(0)}) = \max_W \min_P v_G(W, P), \quad (39)$$

где $W^{(0)}$ и $P^{(0)}$ — оптимальные стратегии.

Стратегия W естественным образом индуцирует стратегии имитации и подмены — Q_W и R_W . Пусть

$$c = c(W) = \sum_{m \in M} w(m), \quad (40)$$

тогда

$$1 - c = \sum_{\varphi \in \Psi} w(\varphi).$$

Числа c и $1 - c$ представляют собой соответственно вероятности использования в стратегии W первого игрока имитации и подмены. Распределения Q_W и R_W состоят из величин $q_W(m) = w(m)/c$ и $r_W(\varphi) = w(\varphi)/(1 - c)$ соответственно. При этом значение объединенной игры в ситуации (W, P) представляется в виде

$$\begin{aligned} v_G(W, P) &= \sum_{e \in E} \sum_{m \in M} p(e)z(e, m)w(m) + \sum_{e \in E} \sum_{\varphi \in \Psi} p(e)z(e, m)w(\varphi) \\ &= c \sum_{e \in E} \sum_{m \in M} p(e)x(e, m)q_W(m) + (1 - c) \sum_{e \in E} \sum_{\varphi \in \Psi} p(e)\bar{y}(e, \varphi)r_W(\varphi) \\ &= cv_i(Q_W, P) + (1 - c)v_s(R_W, P). \end{aligned} \quad (41)$$

Как мы знаем из раздела 2, стратегия подмены R_W определяет стратегию подмены $U_W = U(R_W)$, состоящую из совокупности распределений $U_m = (u_{m,n}, n \neq m)$, где

$$u_{m,n} = \sum_{\varphi(m)=n} r_W(\varphi) = \sum_{\varphi(m)=n} \frac{w(\varphi)}{1 - c}.$$

Отсюда получаем выражения

$$v_G(W, P) = cv_i(Q_W, P) + (1 - c)v_s(U_W, \quad (42)$$

$$v_G = v_G(W^{(0)}, P^{(0)}) = c^{(0)}v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}) + (1 - c^{(0)})v_s(U_{W^{(0)}}, P^{(0)}), \quad (43)$$

где $W^{(0)}, P^{(0)}$ — оптимальные стратегии в объединенной игре, $Q_{W^{(0)}}$ и $U_{W^{(0)}}$ — стратегии имитации и подмены, индуцируемые стратегией $W^{(0)}$, $c^{(0)}$ определяется формулой (40) при $W = W^{(0)}$.

Найдем удобное выражение для значения объединенной игры.

Теорема 4. Пусть $v_G = v_G(W^{(0)}, P^{(0)})$ — значение объединенной игры, где $W^{(0)}, P^{(0)}$ — оптимальные смешанные стратегии. Пусть $Q_{W^{(0)}}$ и $U_{W^{(0)}}$ — смешанные стратегии имитации и подмены, индуцируемые стратегией $W^{(0)}$. Тогда либо

$$v_G = v_i = v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}), \quad (44)$$

либо

$$v_G = v_s = v_s(U_{W^{(0)}}, P^{(0)}), \quad (45)$$

либо

$$v_G = v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}) = v_s(U_{W^{(0)}}, P^{(0)}). \quad (46)$$

Доказательство. Пусть в выражении (43) $c^{(0)} = 1$. Отсюда получаем равенство $v_G = v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)})$. Поскольку $c^{(0)}$ — это вероятность использования имитации в оптимальной стратегии нападения, равенство $c^{(0)} = 1$ означает, что оптимальной стратегией первого игрока в объединенной игре является смешанная стратегия имитации. Эта стратегия гарантирует первому игроку выигрыш, равный v_G , и в игре в имитацию, поскольку $P^{(0)}$ можно рассматривать и как стратегию защиты в игре в имитацию. В самом деле,

$$v_G = v_G(W^{(0)}, P^{(0)}) = v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}).$$

Если бы для некоторой стратегии $P^{(1)}$ защиты от имитации выполнялось неравенство

$$v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}) > v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(1)}),$$

мы имели бы соотношения

$$v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(1)}) = v_G(W^{(0)}, P^{(1)}) < v_G,$$

которые противоречат оптимальности стратегии $P^{(0)}$ в объединенной игре. Следовательно, $(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)})$ — пара оптимальных стратегий в игре в имитацию, откуда следует (44). Аналогично при $c^{(0)} = 0$ получаем (45).

Пусть теперь $c^{(0)} \notin \{0, 1\}$. Если при этом $v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}) \geq v_s(U_{W^{(0)}}, P^{(0)})$, то из (43) следует, что $v_G \leq v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)})$. Предположим, что $v_G < v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)})$. Тогда рассмотрим смешанную стратегию нападения $\hat{Q}_{W^{(0)}}$ в объединенной игре, определенную условием

$$\hat{q}_{W^{(0)}}(\theta) = \begin{cases} q_{W^{(0)}}(m), & \text{если } \theta = m \in M, \\ 0, & \text{если } \theta = \varphi \in \Psi. \end{cases}$$

Ясно, что

$$v_G(\hat{Q}_{W^{(0)}}, P^{(0)}) = v_s(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}).$$

Отсюда получаем неравенство $v_G < v_G(\hat{Q}_{W^{(0)}}, P^{(0)})$, означающее, что стратегия $P^{(0)}$ дает первому игроку возможность получить больший выигрыш, чем v_G . Это противоречит условию оптимальности $P^{(0)}$. Следовательно, $v_G = v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)})$, и

$$v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}) = c^{(0)} v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}) + (1 - c^{(0)}) v_s(U_{W^{(0)}}, P^{(0)}),$$

откуда получаем (46).

К аналогичному заключению мы приходим и в случае, если в (43) выполняется неравенство

$$v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}) \leq v_s(U_{W^{(0)}}, P^{(0)}).$$

Теорема доказана.

Приведенная теорема показывает, что если для A -кода выполняется неравенство

$$v_G > \max\{v_i, v_s\}, \quad (47)$$

то оптимальную стратегию защиты в объединенной игре следует искать из равенства (46).

6. Метод вычисления значения объединенной игры

Сформулируем ряд следствий из теоремы 4.

Теорема 5. Если для A -кода выполняется неравенство (47), то

$$v_G = v_i(\bar{Q}(P^{(0)}), P^{(0)}) = v_s(\bar{U}(P^{(0)}), P^{(0)}), \quad (48)$$

где $P^{(0)}$ — оптимальная стратегия защиты в объединенной игре, а $\bar{Q}(P^{(0)})$ и $\bar{U}(P^{(0)})$ — стратегии нападения, определяемые формулами (23) и (32) по стратегии $P^{(0)}$.

Доказательство. По теореме 4, справедливы равенства (46).

Стратегия $\bar{Q}(P^{(0)})$ такова, что

$$v_G = v_i(Q_{W^{(0)}}, P^{(0)}) \leq v_i(\bar{Q}(P^{(0)}), P^{(0)}).$$

Но стратегия $P^{(0)}$ оптимальна и не может дать первому игроку выигрыш, превосходящий v_G . Следовательно,

$$v_G = v_i(\bar{Q}(P^{(0)}), P^{(0)}).$$

Аналогично получаем равенство

$$v_G = v_s(\bar{U}(P^{(0)}), P^{(0)}).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим множество стратегий защиты в объединенной игре, удовлетворяющих уравнению

$$v_i(\bar{Q}(P), P) = v_s(\bar{U}(P), P). \quad (49)$$

Теорема 6. Если для A -кода выполняется неравенство (47), то оптимальная стратегия защиты $P^{(0)}$ в объединенной игре удовлетворяет равенству

$$v_G = \min_P v_i(\bar{Q}(P), P), \quad (50)$$

где минимум берется по всем стратегиям P , удовлетворяющим условию (49).

Доказательство. Пусть стратегия защиты P' в объединенной игре удовлетворяет условию (49) и для нее достигается минимум в правой части равенства (50). Предположим, что P' не является оптимальной стратегией. Это означает, что она позволяет первому игроку получить выигрыш, превосходящий значение игры, то есть существует стратегия нападения W , такая, что

$$v_G(W, P') > v_G. \quad (51)$$

Согласно (42) для подходящей константы c выполняется равенство

$$v_G(W, P') = cv_i(Q_W, P') + (1 - c)v_s(U_W, P'). \quad (52)$$

Из свойства экстремальности стратегий $\bar{Q}(P)$ и $\bar{U}(P)$ следуют неравенства

$$v_i(Q_W, P') \leq v_i(\bar{Q}(P'), P'), \quad v_s(U_W, P') \leq v_s(\bar{U}(P'), P'). \quad (53)$$

Поскольку P' удовлетворяет равенству (49), из (51)–(53) получаем соотношения

$$\begin{aligned} v_G &< v_G(W, P') = cv_i(\bar{Q}(P'), P') + (1 - c)v_s(\bar{U}(P'), P') \\ &= cv_i(\bar{Q}(P'), P') + (1 - c)v_i(\bar{Q}(P'), P') = v_i(\bar{Q}(P'), P'). \end{aligned} \quad (54)$$

Пусть $P^{(0)}$ — оптимальная стратегия защиты в объединенной игре. Тогда, согласно теореме 5, $P^{(0)}$ удовлетворяет равенству (48) и, в частности, условию (49). Тогда из (54) следует, что

$$v_i(\bar{Q}(P^{(0)}), P^{(0)}) < v_i(\bar{Q}(P'), P').$$

Мы получили противоречие с условием минимальности стратегии P' . Отсюда следует, что стратегия P' оптимальна. Теорема доказана.

Теорема 6 дает метод нахождения оптимальной стратегии защиты в объединенной игре в случае, когда выполняется условие (47). Для этого нужно решить уравнение (49) относительно P , а затем решить для полученного множества решений этого уравнения задачу минимизации функционала $v_s(\bar{Q}(P), P)$.

Теорема 7. *Если для A -кода существует стратегия защиты P , являющаяся одновременно оптимальной при имитации и при подмене, то выполняется равенство*

$$v_G = \max\{v_i, v_s\}.$$

Доказательство. Пусть P — стратегия, указанная в условии теоремы, и $W(P)$ — стратегия нападения, дающая первому игроку максимальный выигрыш против стратегии P в объединенной игре. Согласно (42), для некоторого числа $c \in [0, 1]$ выполняется равенство

$$v_G(W(P), P) = cv_i(Q(P), P) + (1 - c)v_s(U(P), P),$$

где $Q(P)$ и $U(P)$ — соответственно стратегии нападения при имитации и при подмене, индуцируемые стратегией $W(P)$.

Учитывая, что стратегии $\bar{Q}(P)$ и $\bar{U}(P)$ дают первому игроку максимальный выигрыш против стратегии P при имитации и при подмене соответственно, а также то, что P — оптимальная стратегия защиты от обеих атак, получаем, что

$$v_i(Q(P), P) \leq v_i(\bar{Q}(P), P) = v_i, \quad v_s(U(P), P) \leq v_s(\bar{U}(P), P) = v_s.$$

Поскольку стратегия P может быть неоптимальной в объединенной игре, из полученных соотношений следует, что

$$v_G \leq v_G(W(P), P) \leq cv_i + (1 - c)v_s \leq \max\{v_i, v_s\}.$$

Искомое утверждение следует теперь из неравенства (1).

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 8. *Если для A -кода существует стратегия защиты P , которая не дает оппоненту выигрыш, больший чем $\varepsilon \in (0, 1)$, как при имитации, так и при подмене, то $v_G < \varepsilon$.*

Теоремы 7 и 8 обосновывают традиционно используемый подход к оценке стойкости A -кодов (см., напр., [2, 3, 8]), суть которого состоит в следующем. Доказывается, что вероятности p_0, p_1 успеха имитации и подмены для A -кода не превосходят выбранного порога ε , скажем, $\varepsilon = 2^{-64}$. На основании этого делается заключение о стойкости A -кода к активным атакам. При этом, как правило, выбирается равновероятная стратегия защиты (как от имитации, так и от подмены), причем вероятность p_1 определяется не средним значением величины $p_\Pi(m) = \max_{n \neq m} p_\Pi(n | m)$, а максимумом $\bar{p}_1 = \max_{m \in M} p_\Pi(m)$. Поскольку при таком подходе справедливы неравенства

$$v_i = p_0 \leq \varepsilon, \quad v_s \leq p_1 \leq \bar{p}_1 \leq \varepsilon,$$

выполняются условия теоремы 8, согласно которой $v_G < \varepsilon$. Подчеркнем, что без теоремы 8 указанный подход был бы не достаточно обоснованным, так как требовалось бы формальное доказательство утверждения

$$(p_0 \leq \varepsilon, p_1 \leq \varepsilon) \Rightarrow (v_G \leq \varepsilon).$$

Покажем, что существуют A -коды, для которых выполняется неравенство (47).

7. Пример

Рассмотрим A -код, для которого

$$S = \{H, T\}, \quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, \quad M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\},$$

$$P(S) = (p_S(H) = p, p_S(T) = 1 - p), \quad 1/2 \leq p < 1,$$

и матрица кодирования имеет вид

$$\begin{pmatrix} H & T & 0 & 0 \\ 0 & H & T & 0 \\ 0 & 0 & H & T \\ H & 0 & 0 & T \end{pmatrix}.$$

Пусть $P(E) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — стратегия защиты.

Теорема 9. Для рассматриваемого A -кода справедливы равенства

$$v_i = 1/2, \quad (55)$$

$$v_s = \frac{p}{2p^2 - p + 1}, \quad (56)$$

$$v_G = \frac{2p}{2p + 1}. \quad (57)$$

Оптимальные стратегии защиты в игре в имитацию, игре в подмену и в объединенной игре задаются соответственно распределениями

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/4, & x_2 &= 1/4, & x_3 &= 1/4, & x_4 &= 1/4, \\ x_1 = x_4 &= \frac{p^2}{2p^2 - p + 1}, & x_2 &= \frac{p(1-p)}{2p^2 - p + 1}, & x_3 &= \frac{(1-p)^2}{2p^2 - p + 1}, \\ x_1 = x_3 = x_4 &= \frac{p}{2p + 1}, & x_2 &= \frac{1-p}{2p + 1}. \end{aligned}$$

В частности, при $p = 1/2$

$$v_i = v_s = v_G = 1/2,$$

причем равномерное распределение $P(E)$ является оптимальной стратегией защиты в любой игре.

Доказательство. Введем обозначение $a = (1 - p)/p$. Пусть

$$\begin{aligned} L(\bar{x}) &= \max\{x_1 + x_4, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4\}, \\ L_1(\bar{x}) &= \max\{px_1; px_4\} + \max\{(1-p)x_1; px_2\} \\ &\quad + \max\{(1-p)x_2; px_3\} + \max\{(1-p)x_3; (1-p)x_4\}. \end{aligned}$$

Согласно определению,

$$v_i = \min_{P(E)} L(\bar{x}), \quad (58)$$

$$v_{\Pi} = \min_{P(E)} L_1(\bar{x}), \quad (59)$$

а согласно теореме 6 (в случае, если неравенство (47) действительно выполняется),

$$v_G = \min_{\bar{x} \in \Omega} L(\bar{x}), \quad (60)$$

где

$$\Omega = \{\bar{x}: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, L(\bar{x}) = L_1(\bar{x})\}.$$

Формула (55) очевидна, причем ясно, что минимум $\min_{P(E)} L(\bar{x})$ достигается в случае, когда все x_i одинаковы, то есть когда $P(E)$ — равномерное распределение. Также легко убедиться в том, что при $p = 1/2$ и $\min_{P(E)} L_1(\bar{x})$ достигается при равенстве всех переменных, причем этот минимум равен $1/2$. Поэтому будем далее полагать, что выполняется условие $p > 1/2$.

Вычислим минимум $\min_{\bar{x} \in \Delta_i} L_1(\bar{x})$ в каждом из подмножеств Δ_i , $i \in \{1, \dots, 16\}$, множества

$$\Delta = \left\{ \bar{x} \in \mathbf{R}^4: x_1 > 0, \dots, x_{16} > 0, \sum_1^{16} x_i = 1 \right\},$$

определяемых условиями достижения максимума в слагаемых, составляющих $L_1(\bar{x})$. Попутно будем в каждом случае искать $\min_{\bar{x} \in \Omega_i} L(\bar{x})$, где $\Omega_i = \Omega \cap \Delta_i$, $i \in \{1, \dots, 16\}$.

Случай 1. Область Δ_1 определяется системой неравенств

$$\begin{aligned} x_4 &\leq x_1, \\ px_2 &\leq (1-p)x_1, \\ px_3 &\leq (1-p)x_2, \\ x_4 &\leq x_3, \end{aligned}$$

которую можно переписать в виде

$$x_4 \leq x_3 \leq ax_2 \leq a^2x_1. \quad (61)$$

В условиях этого случая

$$L_1(\bar{x}) = x_1 + (1-p)(x_2 + x_3).$$

Заметим, что L_1 — линейная форма с положительными коэффициентами, не содержащая x_4 . Ясно, что она достигает минимума в случае, когда x_4 максимально возможно. Получим достижимую верхнюю оценку для x_4 . Из (61) получаем соотношения

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq \frac{1}{a^2}x_4 + \frac{1}{a}x_4 + 2x_4 = \frac{2p^2 - 3p + 2}{(1-p)^2}x_4,$$

из которых следует, что

$$x_4 \leq \frac{(1-p)^2}{2p^2 - 3p + 2}. \quad (62)$$

Равенство в (62) достигается в том и только том случае, когда

$$x_4 = x_3 = ax_2 = a^2x_1.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{p^2}{2p^2 - 3p + 2}, \quad x_2 = \frac{p(1-p)}{2p^2 - 3p + 2}, \quad x_3 = x_4 = \frac{(1-p)^2}{2p^2 - 3p + 2}.$$

Вычисляя значение $L_1(\bar{x})$ на этом наборе значений переменных, получаем, что

$$\min_{\bar{x} \in \Delta_1} L_1(\bar{x}) = \frac{2p^2 - 2p + 1}{2p^2 - 3p + 2}.$$

Для нахождения $\min_{\bar{x} \in \Omega_1} L(\bar{x})$ в условиях случая 1 рассмотрим 4 подслучая, определяемых условиями раскрытия максимума в выражении $L(\bar{x})$:

$$(a) \begin{cases} x_2 \leq x_4, \\ x_3 \leq x_1, \end{cases} \quad (б) \begin{cases} x_4 \leq x_2, \\ x_3 \leq x_1, \end{cases} \quad (в) \begin{cases} x_4 \leq x_2, \\ x_1 \leq x_3, \end{cases} \quad (г) \begin{cases} x_2 \leq x_4, \\ x_1 \leq x_3. \end{cases} \quad (63)$$

В случае (a) $L(\bar{x}) = x_1 + x_4$. Из равенства

$$L(\bar{x}) = L_1(\bar{x}) \quad (64)$$

находим, что

$$x_4 = (1-p)(x_2 + x_3).$$

Отсюда и из условий случая следует, что

$$x_4 = ax_2 \leq x_2.$$

Это противоречит условию $x_2 \leq x_4$. Аналогично получаем противоречия в случаях 1(б)–1(г). Таким образом, в случае 1 уравнение (64) не имеет решений.

Случай 2. Область Δ_2 определяется системой неравенств

$$\begin{aligned} x_4 &\leq x_1, \\ px_2 &\leq (1-p)x_1, \\ px_3 &\leq (1-p)x_2, \\ x_4 &\geq x_3. \end{aligned}$$

В этих условиях

$$L_1(\bar{x}) = x_1 + (1-p)(x_2 + x_4).$$

Из условий случая можно получить достижимую верхнюю оценку для x_3 :

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq \frac{1}{a^2}x_3 + \frac{1}{a}x_3 + 2x_3 = \frac{2p^2 - 3p + 2}{(1-p)^2}x_3,$$

и

$$x_3 \leq \frac{(1-p)^2}{2p^2 - 3p + 2}.$$

Отсюда получаем набор значений переменных, при котором L_1 достигает минимума, а также значение самого минимума. Они — те же, что в случае 1.

Для нахождения $\min_{\bar{x} \in \Omega_2} L(\bar{x})$ в условиях случая 2 рассмотрим 4 подслучая, указанных в (63). Легко проверить, что, как и в случае 1, каждый из этих подслучаев противоречив. Следовательно, в условиях случая 2 уравнение (64) не имеет решений.

Случай 3. Область Δ_3 определяется системой неравенств

$$\begin{aligned}x_4 &\leq x_1, \\px_2 &\leq (1-p)x_1, \\px_3 &\geq (1-p)x_2, \\x_4 &\leq x_3.\end{aligned}$$

В условиях этого случая

$$L_1(\bar{x}) = x_1 + x_3,$$

при этом

$$x_2 \leq \min\{ax_1, x_4\}, \quad x_4 \leq \min\{x_1, x_3\}.$$

Так как $L_1(\bar{x})$ — линейная функция, ее минимум достигается при $x_1 = x_3 = x_4 = x_2/a$. Отсюда

$$x_1 = x_3 = x_4 = \frac{p}{2p+1}, \quad x_2 = \frac{1-p}{2p+1},$$

и

$$\min_{\bar{x} \in \Delta_3} L_1(\bar{x}) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для нахождения $\min_{\bar{x} \in \Omega_3} L(\bar{x})$ в условиях случая 3 рассмотрим 4 подслучая, определяемых условиями (63).

В случае (а), $L(\bar{x}) = x_1 + x_4$. Из условий случая и равенства (64) следует, что

$$x_2 \leq \min\{ax_1, x_3 = x_4\} \leq x_1.$$

Минимальное значение $L(\bar{x})$ достигается при $x_2 = x_3 = x_4 = ax_1$. Отсюда получаем, что

$$\min_{\bar{x} \in \Omega_3} L(\bar{x}) = \frac{1}{3-2p},$$

при этом значения переменных, при которых этот минимум достигается, равны

$$x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1-p}{3-2p}, \quad x_1 = \frac{p}{3-2p}.$$

В случае (б), $L(\bar{x}) = x_1 + x_2$ и $x_4 \leq x_2 = x_3 \leq ax_1$. Отсюда получаем те же значения, что и в предыдущем случае.

В случае (в), $L(\bar{x}) = x_2 + x_3$. Условия случая, а также равенство (64), приводят к противоречивым соотношениям $x_1 = x_2 < (1/a)x_2 \leq x_1$. Следовательно, в этом случае уравнение (64) не имеет решения.

В случае (г), $L(\bar{x}) = x_3 + x_4$, $x_2 \leq x_1 = x_4 \leq x_3$ и $x_2 \leq ax_1$. Отсюда получаем, что

$$\min_{\bar{x} \in \Omega_3} L(\bar{x}) = \frac{2p}{2p+1},$$

при этом соответствующие значения переменных равны

$$x_1 = x_3 = x_4 = \frac{p}{2p+1}, \quad x_2 = \frac{1-p}{2p+1}.$$

В остальных случаях (за исключением случая 9), имеющего противоречивые условия $x_1 < x_4 < x_3 < ax_2 < a^2x_1$) определенных лексикографическим порядком следования условий раскрытия максимумов в выражении для $L_1(\bar{x})$, рассуждения совершенно аналогичны. Приведем необходимые сведения.

Подмножества Δ_i , $i = 1, \dots, 16$, определяются системами неравенств вида

$$\begin{aligned} x_4 * x_1, \\ px_2 * (1 - p)x_1, \\ px_3 * (1 - p)x_2, \\ x_4 * x_3, \end{aligned}$$

где вместо $*$ стоит знак $\leq$ или $\geq$. Поэтому для указания подмножества достаточно указать направления этих знаков неравенств. Так, например, случай, соответствующий подмножеству Δ_1 , получает обозначение $(<, <, <, <)$. Пользуясь такими обозначениями, укажем результаты для всех 16 случаев.

В случае 1 $(<, <, <, <)$ и случае 2 $(<, <, <, >)$

$$\min_{\bar{x} \in \Delta_i} L_1(\bar{x}) = \frac{2p^2 - 2p + 1}{2p^2 - 3p + 2}$$

при

$$x_1 = \frac{p^2}{2p^2 - 3p + 2}, \quad x_2 = \frac{p(1 - p)}{2p^2 - 3p + 2}, \quad x_3 = x_4 = \frac{(1 - p)^2}{2p^2 - 3p + 2}.$$

В случае 3 $(<, <, >, <)$, случае 4 $(<, <, >, >)$, случае 7 $(<, >, >, <)$, случае 8 $(<, >, >, >)$, случае 11 $(>, <, >, <)$ и случае 15 $(>, >, >, <)$

$$\min_{\bar{x} \in \Delta_i} L_1(\bar{x}) = \frac{2p}{2p + 1}$$

при

$$x_1 = x_3 = x_4 = \frac{p}{2p + 1}, \quad x_2 = \frac{1 - p}{2p + 1}.$$

В случае 5 $(<, >, <, <)$, случае 6 $(<, >, <, >)$, случае 13 $(>, >, <, <)$ и случае 14 $(>, >, <, >)$

$$\min_{\bar{x} \in \Delta_i} L_1(\bar{x}) = \frac{1}{3 - 2p}$$

при

$$x_1 = x_3 = x_4 = \frac{1 - p}{3 - 2p}, \quad x_2 = \frac{p}{3 - 2p}.$$

В случае 10 $(>, <, <, >)$, случае 12 $(>, <, >, >)$ и случае 16 $(>, >, >, >)$

$$\min_{\bar{x} \in \Delta_i} L_1(\bar{x}) = \frac{p}{2p^2 - p + 1}$$

при

$$x_1 = x_4 = \frac{p^2}{2p^2 - p + 1}, \quad x_2 = \frac{p(1 - p)}{2p^2 - p + 1}, \quad x_3 = \frac{(1 - p)^2}{2p^2 - p + 1}.$$

Приводимые далее подслучаи определены соотношением (63).

В случаях 3(а), 3(б), 4(а), 4(б), 7(а) и 13(в)

$$\min_{\bar{x} \in \Omega_i} L(\bar{x}) = \frac{1}{3-2p}$$

при

$$x_1 = \frac{p}{3-2p}, \quad x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1-p}{3-2p}.$$

В случаях 5(б), 5(в), 6(б), 6(в), 7(в), 8(б), 8(в), 13(б), 14(б), 14(в), 15(б), 15(в), 16(б) и 16(в)

$$\min_{\bar{x} \in \Omega_i} L(\bar{x}) = \frac{1}{3-2p}$$

при

$$x_1 = x_3 = x_4 = \frac{1-p}{3-2p}, \quad x_2 = \frac{p}{3-2p}.$$

В случаях 3(г), 4(г), 7(г), 8(а), 8(г), 11(а), 11(г), 12(а), 12(г), 15(а), 15(г), 16(а) и 16(г)

$$\min_{\bar{x} \in \Omega_i} L(\bar{x}) = \frac{2p}{2p+1}$$

при

$$x_1 = x_3 = x_4 = \frac{p}{2p+1}, \quad x_2 = \frac{1-p}{2p+1}.$$

В случаях 6(а) и 14(а)

$$\min_{\bar{x} \in \Omega_i} L(\bar{x}) = \frac{2p}{2p+1}$$

при

$$x_1 = x_2 = x_4 = \frac{p}{2p+1}, \quad x_3 = \frac{1-p}{2p+1}.$$

В случаях 4(в), 5(а), 5(г), 6(г), 10(а)–(г), 11(в), 12(б), 12(в), 13(а), 13(г) и 14(г) уравнение (64) не имеет решений.

Пользуясь приведенными значениями, получаем, что

$$\begin{aligned} v_{\Pi} &= \min \left\{ \frac{2p^2 - 2p + 1}{2p^2 - 3p + 2}, \frac{1}{3-2p}, \frac{2p}{2p+1}, \frac{p}{2p^2 - p + 1} \right\} \\ &= \frac{p}{2p^2 - p + 1}, \\ v_G &= \min \left\{ \frac{1}{3-2p}, \frac{2p}{2p+1} \right\} = \frac{2p}{2p+1}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что при вычислении значения v_G мы корректно воспользовались теоремой 6. Для этого нужно доказать, что для рассматриваемого A -кода справедливо неравенство (47). Предположим, что для данного A -кода

$$v_G = \max\{v_{\Pi}, v_{\Pi}\} = v_{\Pi} = \frac{p}{2p^2 - p + 1}.$$

Тогда, согласно теореме 4, выполняются равенства (45), причем оптимальной стратегией защиты $P^{(0)}$ в объединенной игре является оптимальная стратегия защиты от подмены.

Вычислим значение игры в имитацию в ситуации $(Q(P^{(0)}), P^{(0)})$. Для этого выпишем найденную в доказательстве оптимальную стратегию защиты от подмены:

$$P^{(0)} = \left(\frac{p^2}{2p^2 - p + 1}, \frac{p(1-p)}{2p^2 - p + 1}, \frac{(1-p)^2}{2p^2 - p + 1}, \frac{p^2}{2p^2 - p + 1} \right).$$

Далее вычислим вероятности $p_i(m_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} p_i(m_1) &= x_1 + x_4 = \frac{2p^2}{2p^2 - p + 1}, \\ p_i(m_2) &= x_1 + x_2 = \frac{p}{2p^2 - p + 1}, \\ p_i(m_3) &= x_2 + x_3 = \frac{1-p}{2p^2 - p + 1}, \\ p_i(m_4) &= x_3 + x_4 = \frac{1-2p+2p^2}{2p^2 - p + 1}. \end{aligned}$$

Теперь находим

$$\max_{i \in \{1, \dots, 4\}} p_i(m_i) = p_i(m_1)$$

и

$$Q(P^{(0)}) = (1, 0, 0, 0).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} v_i(Q(P^{(0)}), P^{(0)}) &= \left(\frac{p^2}{2p^2 - p + 1} \quad \frac{p(1-p)}{2p^2 - p + 1} \quad \frac{(1-p)^2}{2p^2 - p + 1} \quad \frac{p^2}{2p^2 - p + 1} \right) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2p^2}{2p^2 - p + 1}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{2p^2}{2p^2 - p + 1} > \frac{p}{2p^2 - p + 1} = v_G,$$

и $(Q(P^{(0)}), P^{(0)})$ мы можем рассматривать как ситуацию в объединенной игре, получаем неравенство

$$v_G(Q(P^{(0)}), P^{(0)}) > v_G,$$

которое противоречит оптимальности стратегии $P^{(0)}$ в объединенной игре. Это доказывает, что для данного A -кода выполняется условие (47).

Отметим, что при p , стремящемся к единице, значения v_s и v_G для данного A -кода стремятся соответственно к $1/2$ и $2/3$, так что разность $v_G - \max\{v_i, v_s\}$ стремится к $1/6$.

Автор выражает глубокую признательность А. М. Зубкову за ряд ценных замечаний и предложений, существенно улучшивших работу, а также С. В. Чернякову, который нашел с помощью ЭВМ пример из раздела 6 при конкретном значении параметра p .

Список литературы

1. Воробьев Н. Н., *Теория игр*. Наука, Москва, 1985.
2. Den Boer B., A simple and key-economical unconditional authentication scheme. *J. Computer Security* (1993) **2**, 65–71.
3. Johansson T., Kabatianskii G., Smeets B., On the relation between A -codes and codes correcting independent errors. *Lect. Notes Computer Sci.* (1994) **765**, 1–11.
4. Simmons G. J., A game theoretical model of digital message authentication. *Congressus Numerantium* (1982) **34**, 413–424.
5. Simmons G. J., Message authentication: A game on hypergraphs. *Congressus Numerantium* (1984) **45**, 161–192.
6. Simmons G. J., Authentication theory/Coding theory. *Lect. Notes Computer Sci.* (1985) **196**, 411–432.
7. Симмонс Г. Дж., Обзор методов аутентификации информации. *ТИИЭР* (1988) **76**, №5, 105–125.
8. Stinson D. R., Universal hashing and authentication codes. *Designs, Codes and Cryptography* (1994) **4**, 369–380.

Статья поступила 26.12.2007.

Переработанный вариант поступил 29.01.2008.