Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Романов, О комбинаторных кодах Грея с расстоянием 3, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 3, 73–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1062>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 13:44:57

О комбинаторных кодах Грея с расстоянием 3

© 2009 г. А. М. Романов

Предложена конструкция циклических двоичных комбинаторных кодов Грея с расстоянием 3 размерности $n = 2^k - 1$, где $k = 3, 4, \dots$. Дан метод построения гамильтоновых циклов в графах минимальных расстояний двоичных кодов Хемминга. Для всех допустимых длин $n \geq 15$ приводятся нелинейные совершенные двоичные коды, графы минимальных расстояний которых содержат гамильтонов цикл.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00364.

1. Введение

Пусть $\mathbf{F}_2^n$ — множество всех двоичных векторов длины n над полем Галуа $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$. Расстоянием Хемминга $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{F}_2^n$ называется число координат, в которых векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ различаются. Биективное отображение множества $\mathbf{F}_2^n$ на множество $\{1, 2, \dots, 2^n\}$ определяет линейный порядок на $\mathbf{F}_2^n$. Линейно упорядоченное множество $\mathbf{F}_2^n$ называется двоичным комбинаторным кодом Грея размерности n с расстоянием d , если расстояние Хемминга между двумя произвольными последовательными векторами равно d . При $d = 1$ комбинаторный двоичный код Грея с расстоянием d является классическим кодом Грея. Термин “комбинаторные коды Грея” используется для широкого круга задач, в которых комбинаторные объекты (например, k -элементные подмножества n -элементного множества или перестановки, действующие на множестве из n элементов) линейно упорядочены так, что произвольные последовательные элементы отличаются некоторым фиксированным образом [1]. При этом слово “комбинаторный” часто опускается. Мы также далее вместо комбинаторный код Грея будем писать просто код Грея. Известно, что двоичные коды Грея с расстоянием d существуют только при нечетных d (см. [2]). Код Грея называется циклическим, если расстояние между первым и последним векторами также равно d . Граф называется n -мерным булевым кубом, если его множество вершин совпадает с $\mathbf{F}_2^n$ и две вершины графа являются смежными тогда и только тогда, когда расстояние Хемминга между ними равно 1. Гамильтоновым циклом называется простой цикл, содержащий все вершины графа ровно по одному разу. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым. Гамильтонов цикл в n -мерном булевом кубе соответствует коду Грея размерности n с расстоянием $d = 1$. Остается нерешенной гипотеза Ласло Ловаша, в которой утверждается, что из вершинной транзитивности связного графа следует существование в нем гамильтонова цикла [1].

В данной работе предложена конструкция циклических двоичных кодов Грея с расстоянием 3 размерности $n = 2^k - 1$, где $k = 3, 4, \dots$. В основе конструкции лежат разбиения

множества $\mathbf{F}_2^n$ на смежные классы, образованные кодами Хемминга. В работе дана конструкция гамильтоновых циклов в графах минимальных расстояний двоичных кодов Хемминга. Остается открытым вопрос о гамильтоновости графов минимальных расстояний совершенных кодов. Для всех допустимых длин $n \geq 15$ приводятся нелинейные совершенные двоичные коды, графы минимальных расстояний которых содержат гамильтонов цикл. Предложенные нелинейные совершенные коды построены при помощи свитчингов и **uv**-конструкции.

Следует заметить, что гамильтоновы циклы в графах минимальных расстояний совершенных двоичных кодов соответствуют кодам, которые принято называть змеей в ящике (то есть таким линейно упорядоченным подмножеством векторов из $\mathbf{F}_2^n$, что расстояние между двумя произвольными последовательными векторами из этого подмножества равно d_1 и минимально возможное расстояние между двумя различными не являющимися последовательными векторами из подмножества равно d_2 ; в нашем случае $d_1 = d_2 = 3$).

2. Коды Хемминга

Множество $\mathbf{F}_2^n$ образует линейное пространство размерности n над полем $\mathbf{F}_2$. Векторы из множества $\mathbf{F}_2^n$ рассматриваются как двоичные слова длины n . Произвольное подмножество $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{F}_2^n$ называется двоичным кодом длины n . Векторы, принадлежащие коду, называются кодовыми словами. Минимально возможное расстояние d между двумя различными кодовыми словами называется минимальным расстоянием кода. Код $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{F}_2^n$ называется совершенным двоичным кодом с минимальным расстоянием $d = 2\rho + 1$, если для каждого вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{F}_2^n$ существует единственное кодовое слово $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$ такое, что $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \leq \rho$. Код называется линейным, если его слова образуют линейное подпространство в $\mathbf{F}_2^n$. Линейные совершенные коды с минимальным расстоянием $d = 3$ называются кодами Хемминга. Коды $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ называются эквивалентными, если существует вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{F}_2^n$ и перестановка π , действующая на множестве координат, такие, что $\mathbf{C}_1 = \{\pi(\mathbf{c}) + \mathbf{x} : \mathbf{c} \in \mathbf{C}_2\}$. С точностью до эквивалентности существует единственный двоичный код Хемминга длины n .

Длина кода n , мощность M , минимальное расстояние d называются параметрами кода. Известно, что совершенные двоичные коды с параметрами кодов Хемминга существуют только при $n = 2^k - 1$, $k = 2, 3, \dots$ (см. [3]). Нелинейные совершенные двоичные коды имеют параметры кодов Хемминга и существуют при $n \geq 15$. Далее мы будем предполагать, что нулевой вектор всегда принадлежит коду.

Пусть $\mathbf{C}$ — совершенный код с параметрами кода Хемминга. Графом минимальных расстояний кода $\mathbf{C}$ называется граф $G(\mathbf{C})$, множество вершин которого совпадает с $\mathbf{C}$ и вершины $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G(\mathbf{C})$ являются смежными тогда и только тогда, когда $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3$.

Через $p(\mathbf{x})$ обозначим функцию четности, то есть

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \pmod{2},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{F}_2^n$.

При $k = 2, 3, \dots$ положим

$$\mathbf{R}_k = \{(\mathbf{u} \mid p(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathbf{F}_2^{(n-1)/2}, (n-1)/2 = 2^{k-1} - 1\},$$

вертикальная черта $(\cdot \mid \cdot)$ обозначает конкатенацию.

В силу конструкции минимально возможное расстояние между двумя различными векторами из множества $\mathbf{R}_k$ равно 3. Через $G(\mathbf{R}_k)$ обозначим граф минимальных расстояний множества $\mathbf{R}_k$.

Предложение 1. При $k = 2, 3, \dots$ граф $G(\mathbf{R}_k)$ изоморфен булеву кубу размерности $(n - 1)/2 = 2^{k-1} - 1$.

Доказательство. Отображение $(\mathbf{u} \mid p(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u}) \rightarrow \mathbf{u}$ является биективным и сохраняет отношение смежности. Предложение 1 доказано.

Через $\mathbf{H}_k$ обозначим двоичный код Хемминга длины $n = 2^k - 1$, $k = 2, 3, \dots$

Предложение 2. При $k = 2, 3, \dots$ в графе минимальных расстояний двоичного кода Хемминга $\mathbf{H}_k$ длины $n = 2^k - 1$ существует остовный подграф, изоморфный булеву кубу размерности $n - k$.

Доказательство. Предложение доказывается индукцией по k . При $k = 2$ справедливость предложения очевидна. Покажем, что из индуктивного предположения о справедливости предложения при $k - 1$ следует его справедливость при k . Рассмотрим $\mathbf{uv}$ -конструкцию кодов Хемминга [4, 5] ($\mathbf{uv}$ -конструкция — короткое название хорошо известной ($\mathbf{u} \mid \mathbf{u} + \mathbf{v}$) конструкции [3]). Для кода Хемминга $\mathbf{H}_k$ справедливо представление

$$\mathbf{H}_k = \{(\mathbf{u} \mid p(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} + \mathbf{v}) : \mathbf{u} \in \mathbf{F}_2^{(n-1)/2}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{k-1}, (n-1)/2 = 2^{k-1} - 1\}. \quad (1)$$

С учетом введенных выше обозначений запишем формулу (1) в виде

$$\mathbf{H}_k = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{k-1}} (\mathbf{R}_k + (\mathbf{0} \mid \mathbf{v})), \quad (2)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор длины $(n + 1)/2 = 2^{k-1}$. Из формулы (2), индуктивного предположения и предложения 1 следует справедливость предложения 2.

Теорема 1. При $k = 3, 4, \dots$ граф минимальных расстояний двоичного кода Хемминга $\mathbf{H}_k$ является гамильтоновым. Более того, через любые две смежные вершины этого графа проходит гамильтонов цикл.

Доказательство. В силу предложения 2 в графе $G(\mathbf{H}_k)$ содержится остовный подграф, изоморфный булеву кубу. Известно, что булев куб содержит гамильтонов цикл и через любые две смежные вершины булева куба проходит гамильтонов цикл. Теорема 1 доказана.

3. Коды Грея

При $i = 1, 2, \dots, n$ через $\mathbf{e}_i$ обозначим двоичный вектор, в котором i -я координата равна 1, а остальные координаты равны 0, при $i = 0$ вектор $\mathbf{e}_i$ положим равным нулевому вектору. Весом $w(\mathbf{x})$ вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{F}_2^n$ называется число ненулевых координат в $\mathbf{x}$. Носителем вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{F}_2^n$ называется множество $[\mathbf{x}] = \{i : x_i = 1\}$. Через $||[\mathbf{x}]||$ обозначим мощность множества $[\mathbf{x}]$. Очевидно, что $w(\mathbf{x}) = ||[\mathbf{x}]||$.

Предложение 3. Пусть векторы $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}'$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $w(\mathbf{c}) = w(\mathbf{c}') = 3$. Тогда справедливо неравенство $||[\mathbf{c}] \cap [\mathbf{c}']|| \leq 1$.

Доказательство. Допустим, что $[\mathbf{c}] \cap [\mathbf{c}'] \neq \emptyset$. Тогда при $i = 0$ множество $\mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$ является кодом Хемминга $\mathbf{H}_k$, содержащим нулевой вектор. Известно, что семейство $\{[\mathbf{v}] : \mathbf{v} \in \mathbf{H}_k, w(\mathbf{v}) = 3\}$ подмножество множества $\{1, 2, \dots, n\}$ является системой троек Штейнера. Непосредственно из определения системы троек Штейнера следует, что при

$\mathbf{c} \neq \mathbf{c}'$, $w(\mathbf{c}) = w(\mathbf{c}') = 3$ справедливо неравенство $|\llbracket \mathbf{c} \rrbracket \cap \llbracket \mathbf{c}' \rrbracket| \leq 1$. При $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ в силу транзитивности группы автоморфизмов кода $\mathbf{H}_k$ без ограничения общности будем считать, что $i \leq (n-1)/2$ и $\{i + (n+1)/2\} \in \llbracket \mathbf{c} \rrbracket \cap \llbracket \mathbf{c}' \rrbracket$. Тогда из (1) следует, что все носители векторов веса 3 из смежного класса $\mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$ с единичной $i + (n+1)/2$ координатой имеют вид $\{1, i + (n+1)/2, 1 + i + (n+1)/2\}$, $\{2, i + (n+1)/2, 2 + i + (n+1)/2\}$, $\dots$, $\{(n-1)/2, i + (n+1)/2, (n-1)/2 + i + (n+1)/2\}$. Единственным общим элементом в приведенных выше подмножествах является координата $i + (n+1)/2$. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. При $i, j \in \{0, 1, \dots, n = 2^k - 1\}$ для любого вектора $\mathbf{c} \in \mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$, $w(\mathbf{c}) = 3$, существуют векторы $\mathbf{c}' \in \mathbf{H}_k + \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{k-1}$, $w(\mathbf{c}') = w(\mathbf{v}) = 3$, такие, что

$$d(\mathbf{c}, (\mathbf{c}' + (\mathbf{0} \mid \mathbf{v}))) = 3, \quad (3)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор длины $(n+1)/2 = 2^{k-1}$.

Доказательство. Координатное множество $\{1, 2, \dots, n\}$ разобьем на два подмножества X, Y . Положим $X = \{i: 1 \leq i \leq (n+1)/2\}$, $Y = \{i: (n+1)/2 < i \leq n\}$. Допустим, что $i, j \in X$ и вектор $\mathbf{c} \in \mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$ таков, что мощность $|\llbracket \mathbf{c} \rrbracket \cap X| = 1$. Считаем, что координатное множество кода $\mathbf{H}_{k-1}$ имеет вид $\{1 + (n+1)/2, 2 + (n+1)/2, \dots, 2^{k-1} - 1 + (n+1)/2\}$.

Поскольку семейство $\{\llbracket \mathbf{v} \rrbracket: \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{k-1}, w(\mathbf{v}) = 3\}$ подмножество множества $\{1 + (n+1)/2, 2 + (n+1)/2, \dots, 2^{k-1} - 1 + (n+1)/2\}$ является системой троек Штейнера, существует вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{k-1}$ такой, что $w(\mathbf{v}) = 3$ и $|\llbracket \mathbf{c} \rrbracket \cap \llbracket \mathbf{v} \rrbracket| = 2$. Выберем вектор $\mathbf{c}' \in \mathbf{H}_k + \mathbf{e}_j$ так, что $|\llbracket \mathbf{c}' \rrbracket \cap \llbracket \mathbf{v} \rrbracket| = 1$ и $\llbracket \mathbf{c}' \rrbracket \cap \llbracket \mathbf{c} \rrbracket = \emptyset$. Поскольку $|\llbracket \mathbf{c}' \rrbracket \cap \llbracket \mathbf{v} \rrbracket| = 1$ и каждая координата из координатного множества $\{1, 2, \dots, n\}$ принадлежит ровно $(n-1)/2$ носителям векторов веса 3 из множества $\mathbf{H}_k + \mathbf{e}_j$, в силу предложения 3 существует вектор $\mathbf{c}' \in \mathbf{H}_k + \mathbf{e}_j$, $w(\mathbf{c}') = 3$ такой, что $\llbracket \mathbf{c}' \rrbracket \cap \llbracket \mathbf{c} \rrbracket = \emptyset$. Очевидно, что при таком выборе векторов $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{v}$ справедливо равенство (3).

Далее, допустим, что $i, j \in X$ и вектор $\mathbf{c} \in \mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$ таков, что $|\llbracket \mathbf{c} \rrbracket \cap X| = 3$. Выбираем вектор $\mathbf{c}'$ так, что $|\llbracket \mathbf{c}' \rrbracket \cap X| = 2$ и $|\llbracket \mathbf{c}' \rrbracket \cap \llbracket \mathbf{c} \rrbracket| = 1$. В силу предложения 3 такой выбор возможен. Вектор $\mathbf{v}$ выбирается так, что $|\llbracket \mathbf{c}' \rrbracket \cap \llbracket \mathbf{v} \rrbracket| = 2$. Очевидно, что и в этом случае при таком выборе векторов $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{v}$ справедливо равенство (3).

Далее, допустим, что $i, j \in Y$ и вектор $\mathbf{c} \in \mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$ таков, что $|\llbracket \mathbf{c} \rrbracket \cap X| = 1$. Тогда выбираем векторы $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{v}$ так же, как в предыдущем случае. При других вариантах выбора координат i и j предложение 4 доказывается аналогично.

Предложение 4 доказано.

Пусть векторы, принадлежащие коду $\mathbf{H}_k$, линейно упорядочены так, что первым вектором является нулевой вектор, а последним — вектор $\mathbf{c}_0 \in \mathbf{H}_k$, $w(\mathbf{c}_0) = 3$, и пусть векторы, принадлежащие смежному классу $\mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n = 2^k - 1\}$, линейно упорядочены так, что некоторый вектор $\mathbf{c}_i \in \mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$, $w(\mathbf{c}_i) = 3$, является последним, а вектор $(\mathbf{c}_i + (\mathbf{0} \mid \mathbf{v}_i))$ является первым (здесь $\mathbf{0}$ — нулевой вектор длины $(n+1)/2 = 2^{k-1}$, $\mathbf{v}_i \in \mathbf{H}_{k-1}$). Кроме того, пусть для выбранных векторов $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ справедливо равенство

$$d(\mathbf{c}_{i-1}, (\mathbf{c}_i + (\mathbf{0} \mid \mathbf{v}_i))) = 3, \quad (4)$$

где $i \in \{1, 2, \dots, n = 2^k - 1\}$. Множество $\mathbf{F}_2^n$, упорядоченное описанным выше способом, обозначим через $\mathbf{L}_n$.

Теорема 2. При $k = 3, 4, \dots$ и $n = 2^k - 1$ упорядоченное множество $\mathbf{L}_n$ является циклическим двоичным кодом Грея размерности n с расстоянием 3.

Доказательство. В силу теоремы 1 векторы, принадлежащие коду $\mathbf{H}_k$, возможно линейно упорядочить так, что первым вектором будет нулевой вектор, а последним — вектор $\mathbf{c}_0 \in \mathbf{H}_k$, $w(\mathbf{c}_0) = 3$. В силу предложения 3 возможно выбрать векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ так, что будет выполняться равенство (4). В силу теоремы 1 векторы, принадлежащие смежному классу $\mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n = 2^k - 1\}$, могут быть упорядочены так, что первым вектором будет вектор $\mathbf{c}_i + (\mathbf{0} \mid \mathbf{v}_i)$, а последним — вектор $\mathbf{c}_i \in \mathbf{H}_k + \mathbf{e}_i$, $w(\mathbf{c}_i) = 3$. Поскольку последним является вектор веса 3, а первым — нулевой вектор, упорядоченное множество $\mathbf{L}_n$ является циклическим двоичным кодом Грея размерности n с расстоянием 3. Теорема 2 доказана.

4. Нелинейные совершенные коды

Ниже приведены нелинейные совершенные двоичные коды и конструктивно показано, что графы минимальных расстояний этих кодов содержат гамильтонов цикл.

Пусть подмножество $\mathbf{D}_4 \subset \mathbf{F}_2^{15}$ получено из кода Хемминга $\mathbf{H}_4$ свитчингом или сдвигом одной компоненты этого кода [5]. Известно, что $\mathbf{D}_4$ является нелинейным совершенным двоичным кодом длины $n = 15$. При помощи компьютера несложно проверить, что граф минимальных расстояний кода $\mathbf{D}_4$ является гамильтоновым.

Далее воспользуемся $\mathbf{uv}$ -конструкцией [4, 5]. При $k > 4$ положим

$$\mathbf{D}_k = \{(\mathbf{u} \mid p(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} + \mathbf{v}) : \mathbf{u} \in \mathbf{F}_2^{(n-1)/2}, (n-1)/2 = 2^{k-1} - 1, \mathbf{v} \in \mathbf{D}_{k-1}\}. \quad (5)$$

Множество $\mathbf{D}_k$ является совершенным двоичным кодом длины $n = 2^k - 1$. Совершенный код $\mathbf{D}_k$ при $k > 4$ является нелинейным в силу индуктивного построения и того, что код $\mathbf{D}_4$ является нелинейным.

Непосредственно из определения следует, что все совершенные двоичные коды с параметрами кодов Хемминга длины n имеют одинаковый весовой спектр и, в частности, если вектор веса 0 принадлежит коду, то вектор веса n также принадлежит коду. Следовательно, если вектор $\mathbf{c}$ принадлежит коду, то и вектор, комплементарный вектору $\mathbf{c}$, так же принадлежит коду. Комплементарным векторам соответствуют антиподальные вершины булева куба.

Теорема 3. При $k \geq 4$ граф минимальных расстояний нелинейного совершенного двоичного кода $\mathbf{D}_k$ является гамильтоновым.

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по k . Как было отмечено выше, граф $G(\mathbf{D}_4)$ является гамильтоновым. Покажем, что из индуктивного предположения о гамильтоновости графа $G(\mathbf{D}_{k-1})$ следует гамильтоновость графа $G(\mathbf{D}_k)$.

Перепиывая формулу (5) с учетом введенных ранее обозначений, получаем равенство

$$\mathbf{D}_k = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{D}_{k-1}} (\mathbf{R}_k + (\mathbf{0} \mid \mathbf{v})),$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор длины $(n+1)/2 = 2^{k-1}$. В коде $\mathbf{D}_k$ рассмотрим подкоды $\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{D}_{k-1}} (\mathbf{0} \mid \mathbf{v})$ и $\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{D}_{k-1}} (\mathbf{1} + (\mathbf{0} \mid \mathbf{v}))$, где $\mathbf{1}$ — единичный вектор длины n (то есть вектор, все компоненты которого равны 1). Очевидно, что выбранные подкоды являются комплементарными, то есть содержат комплементарные векторы. По индуктивному предположению, в подкоде $\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{D}_{k-1}} (\mathbf{0} \mid \mathbf{v})$ существует гамильтонов цикл. Выберем в подкоде $\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{D}_{k-1}} (\mathbf{1} + (\mathbf{0} \mid \mathbf{v}))$ гамильтонов цикл, комплементарный циклу в подкоде $\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{D}_{k-1}} (\mathbf{0} \mid \mathbf{v})$.

Разобьем выбранные гамильтоновы циклы на совершенные паросочетания. В силу предложения 1 граф $G(\mathbf{R}_k)$ изоморфен булеву кубу. Следовательно, в графе $G(\mathbf{R}_k)$ существует гамильтонов путь, в котором первой вершиной является нулевой вектор, а последней вершиной — единичный вектор. Комплементарные совершенные паросочетания в подкодах $\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{D}_{k-1}} (\mathbf{0} \mid \mathbf{v})$ и $\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{D}_{k-1}} (\mathbf{1} + (\mathbf{0} \mid \mathbf{v}))$ и гамильтоновы пути в $G(\mathbf{R}_k)$ с первой нулевой вершиной и последней единичной образуют гамильтонов цикл в графе $G(\mathbf{D}_k)$. Теорема 3 доказана.

Допустим, что $\mathbf{C}$ — совершенный двоичный код длины n и граф минимальных расстояний кода $\mathbf{C}$ содержит гамильтонов цикл. Тогда с помощью $\mathbf{uv}$ -конструкции можно построить совершенный двоичный код $\mathbf{C}'$ длины $2n + 1$ такой, что граф минимальных расстояний кода $\mathbf{C}'$ также будет содержать гамильтонов цикл.

Нами приведен только один пример совершенного двоичного кода длины $n = 15$ с гамильтоновым графом минимальных расстояний. Вполне вероятно, что существуют и другие совершенные двоичные коды длины $n = 15$ с гамильтоновыми графами минимальных расстояний. Вопрос о перечислении всех попарно неэквивалентных совершенных двоичных кодов длины $n = 15$ остается открытым [5].

Список литературы

1. Savage C., A survey of combinatorial Gray codes. *SIAM Review* (1997) **39**, №4, 605–629.
2. Пережогин А. Л., О циклических перечислениях двоичных наборов через заданные расстояния. *Дискретный анализ и исследование операций. Сер. I* (1999) **6**, №2, 62–69.
3. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Связь, Москва, 1979.
4. Васильев Ю. Л., О негрупповых плотно упакованных кодах. *Проблемы кибернетики* (1962) **8**, 337–339.
5. Романов А. М., Обзор методов построения нелинейных совершенных двоичных кодов. *Дискретный анализ и исследование операций. Сер. I* (2006) **13**, №4, 60–88.

Статья поступила 5.05.2008.

Переработанный вариант поступил 5.05.2009.