Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Еловигов, Факторизация однопорожжденных частично расслоенных формаций, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 3, 99–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1064>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 05:27:21

Факторизация однопорожжденных частично расслоенных формаций

© 2009 г. А. Б. Еловиков

Рассматриваются только конечные группы. Описан большой класс однопорожжденных факторизуемых Ω -расслоенных формаций, включая Ω -композиционные, Ω -биканонические и другие формации.

Одно из важных мест в теории формаций занимают вопросы, связанные с различными видами формационных произведений. Начало изучения факторизаций локальных формаций было положено в работах А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова [1, 2]. В работе [3] А. Н. Скибой были описаны все нетривиальные факторизации однопорожжденных локальных формаций. Разработанные в этих статьях методы и приемы исследования формаций конечных групп широко используются сейчас многими авторами в различных направлениях. В работах [4, 5] В. А. Ведерников предложил способ построения новых видов расслоенных формаций с помощью функции направления.

Концепция частичной локальности, введенная в рассмотрение Л. А. Шеметковым [2, 6] и концепция частичной расслоенности, введенная В. А. Ведерниковым [5, 7] позволили существенно расширить класс формаций, описываемых на языке функций. Поэтому естественным является интерес к изучению частично расслоенных формаций вообще и однопорожжденных Ω -расслоенных формаций, в частности. В статье [8] были изучены несократимые факторизации однопорожжденных Ω -расслоенных формаций целого ряда направлений с $\Omega = \mathfrak{F}$, частным случаем которых являются локальные, композиционные и биканонические формации. Данная работа завершает целостное исследование Ω -расслоенных формаций описанием несократимых факторизаций частично расслоенных формаций ряда направлений с $\emptyset \subset \Omega \subset \mathfrak{F}$, включающего в себя Ω -композиционные и Ω -биканонические формации.

Рассматриваются только конечные группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в [9, 10]. Приведем только некоторые из них. Символами $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ обозначают соответственно класс всех конечных групп, класс всех конечных разрешимых групп, класс всех конечных нильпотентных групп и класс всех конечных абелевых групп. Класс всех конечных простых групп обозначают $\mathfrak{P}$; в данной статье под Ω всегда будем понимать непустой подкласс класса $\mathfrak{F}$, который собственно содержится в $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{G}_A$ — класс всех конечных A -групп, то есть таких групп G , что $K(G) = (A)$, где $K(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; $f: \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ — ΩF -функция и FR -функция соответственно. Все рассматриваемые функции принимают одинаковые значения на изоморфных группах из их области определения. Формация

$$\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi) = (G: G/O_\Omega(G) \in f(\Omega'))$$

и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$) называется Ω -расслоенной формацией с Ω -спутником f и с направлением φ (см. [5]). Зафиксируем $\alpha(\gamma)$ — направление биканонической (композиционной) формации, то есть $\alpha(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{F}$ и $\alpha(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{F}$ ($\gamma(A) = \mathfrak{G}_{cA}$ для всех групп $A \in \mathfrak{F}$). Направление φ Ω -расслоенной формации называют b -направлением, если $\varphi(A)\mathfrak{G}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{F}$; r -направлением, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A)$ для любого $A \in \mathfrak{F}$; br -направлением, если φ является и b -направлением и r -направлением (см. [5]). На множестве $\mathfrak{F}$ всех FR -функций вводится отношение частичного порядка $\leq$. Для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{F}$ полагают $\varphi_1 \leq \varphi_2$, если $\varphi_1(A) \subseteq \varphi_2(A)$ для любого $A \in \mathfrak{F}$. В данной статье под направлением β всегда понимается некоторое br -направление такое, что $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Через $G = [A]B$ обозначают полупрямое произведение групп A и B , где A — нормальная подгруппа в G . Остальные нестандартные обозначения будут вводиться по ходу изложения материала.

Используя методы работы [5], несложно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть f_1 и f_2 — внутренние Ω -спутники Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением β . Тогда

- (1) $\mathfrak{G}_A f_1(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$;
- (2) $\mathfrak{G}_A f_1(A) = \mathfrak{G}_A f_2(A)$ для любой $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$;
- (3) $\mathfrak{F}$ обладает внутренним Ω -спутником g таким, что $g(A) = \mathfrak{F}$, если A принадлежит $(\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cup \{\Omega'\}$ и $g(A) = \mathfrak{G}_A f_1(A)$ для любой $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$.

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть f — внутренний Ω -спутник Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением β . Тогда формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний Ω -спутник h , причем $h(A) = \mathfrak{F}$, если $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cup \{\Omega'\}$ и $h(A) = \mathfrak{G}_A h(A) = \mathfrak{G}_A f(A)$ для любой $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная Ω -расслоенная формация с направлением β , тогда $f(A)$ также наследственна для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, где f — максимальный внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Доказательство. По лемме 2 $f(A) = \mathfrak{F}$ — наследственная формация для любой $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cup \{\Omega'\}$.

Допустим, что существует $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$ такая, что найдется $G \in f(A)$, $M < G$ и $M \notin f(A)$, причем G — группа минимального порядка с таким свойством. Тогда $G \neq 1$. Если группа G не монолитическая, то в G существуют две различные минимальные нормальные подгруппы R и N , причем $G/R \in f(A)$ и $G/N \in f(A)$. По индукции $MR/R \in f(A)$ и $MN/N \in f(A)$, а значит, $M/(M \cap R \cap N) \cong M \in f(A)$. Получаем противоречие. Следовательно, G — монолитическая группа с монолитом R . Допустим, что $O_A(G) \neq 1$. Тогда $R \subseteq O_A(G) = O_p(G)$ для некоторого простого числа p и $MR/R \in f(A)$. Но в этом случае, по лемме 2 $M \in \mathfrak{G}_A f(A) = f(A)$. Получаем противоречие. Значит, $O_A(G) = 1$.

По лемме 18.8 из [9] существует точный неприводимый $F_p[G]$ -модуль T . Рассмотрим $\Gamma = [T]G$. Поскольку $\Gamma/T \cong G \in f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ и $O_p(\Gamma) \subseteq \Gamma_{\beta(A)}$, по лемме 2 из [5]

$\Gamma \in \mathfrak{F}$. Так как $TM < \Gamma$, по условию $TM \in \mathfrak{F}$. Тогда $TM/(TM)_{\beta(A)} \in f(A)$. Поскольку $C_{\Gamma}(T) = T = C_{TM}(T) - p$ -группа, справедливы равенства

$$(TM)_{\gamma(A)} = F_A(TM) = O_p(TM).$$

Значит,

$$(TM)_{\beta(A)} = O_p(TM) = O_p(TM) \cap TM = T(O_p(TM) \cap M) \subseteq TO_p(M).$$

Таким образом,

$$TM/(TO_p(M)) \cong M/(M \cap TO_p(M)) \cong M/(O_p(M)(M \cap T)) = M/O_p(M) \in f(A)$$

и $M \in \mathfrak{G}_A f(A) = f(A)$. Получаем противоречие. В силу произвольности выбора A , $f(A)$ — наследственная формация для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$. Лемма доказана.

Непустое множество формаций θ называется полной решеткой формаций, если $\emptyset, \mathfrak{G} \in \theta$ и пересечение любой совокупности формаций из θ снова принадлежит θ (см. [6]). Через $\Omega\theta F(\mathfrak{X}, \beta)$ обозначим пересечение всех Ω -расслоенных формаций с направлением β , содержащих класс групп $\mathfrak{X}$ и обладающих хотя бы одним θ -значным Ω -спутником.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп и θ — полная решетка формаций. Тогда формация $\mathfrak{F} = \Omega\theta F(\mathfrak{X}, \beta)$ обладает единственным минимальным θ -значным Ω -спутником f , причем

$$f(\Omega') = \theta \text{ form}(G/O_{\Omega}(G); G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \theta \text{ form}(G/G_{\beta(A)}; G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in K(\mathfrak{X}) \cap \Omega$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 5 в [4].

Следствие 1. Пусть f_i — минимальный θ -значный Ω -спутник Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением β , $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.

Следствие 2. Пусть f_i — максимальный внутренний θ -значный Ω -спутник Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением β , $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.

Следствие 3. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{X}, \beta)$, где $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда

$$K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = K(\mathfrak{X}) \cap \Omega.$$

Лемма 5. В однопорожденной Ω -расслоенной формации $\Omega F(G, \beta)$ содержится лишь конечное множество наследственных Ω -расслоенных подформаций с направлением β .

Доказательство. Обозначим θ полную решетку всех наследственных формаций. Пусть $\mathfrak{M} = \Omega\theta F(G, \beta)$ — пересечение всех Ω -расслоенных формаций с направлением β , содержащих G и имеющих хотя бы один θ -значный Ω -спутник. Очевидно, что $\Omega F(G, \beta) \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная наследственная Ω -расслоенная формация с направлением β такая, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. В силу леммы 3 формация $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один θ -значный Ω -спутник. Пусть f и m — минимальные наследственные Ω -спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно, тогда по следствию 1 справедливо неравенство $f \leq m$. По лемме 4 справедливо равенство $m(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$, $m(A) = \theta \text{ form}(G/G_{\beta(A)})$ для всех $A \in K(G) \cap \Omega$ и $m(\Omega') = \theta \text{ form}(G/O_{\Omega}(G))$ — однопорожденные формации. Следовательно, по лемме 8.8 из [9] существует лишь конечное множество θ -значных Ω -спутников $t < m$. Значит в $\mathfrak{M}$, а тем более в $\Omega F(G, \beta)$, существует лишь конечное множество наследственных Ω -расслоенных формаций с направлением β . Лемма доказана.

Лемма 6. Если M — произвольная подгруппа группы $G \in \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}$, то $M \in \Omega F(G, \beta)$, где $\omega = \pi(\Omega \cap \mathfrak{A})$.

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{N}$, то в силу теоремы 2.4 из [10] справедливо включение $M \in \Omega F(G, \beta)$. Предположим, что $G \notin \mathfrak{N}$. Тогда $G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}_\omega$ и $G^{\mathfrak{N}} \neq 1$.

Проведем индукцию по порядку группы G . Пусть существует подгруппа M группы G такая, что $M \notin \mathfrak{F} = \Omega F(G, \beta)$. Причем G — группа наименьшего порядка с таким свойством. Ясно, что G — монолитическая группа с монолитом R . Поскольку $G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}_\omega$, монолит R — элементарная абелева p -группа для некоторого $p \in \omega$.

По индукции $M/(M \cap R) \in \mathfrak{F}$. Но $M \cap R \subseteq O_p(M)$, поэтому $M/O_p(M) \in \mathfrak{F}$. Учитывая теорему 4 из [4], несложно показать, что $\mathfrak{F}$ — Ω -композиционная формация. Таким образом,

$$G_{\beta(Z_p)} = F_{Z_p}(G) = O_{(Z_p)', Z_p}(G) = O_p(G).$$

Обозначим через f максимальный внутренний Ω -спутник формации $\Omega F(G, \beta)$. По индукции

$$MO_p(G)/O_p(G) \cong M/(M \cap O_p(G)) \in \Omega F(G/O_p(G), \beta) \subseteq f(Z_p).$$

Тогда, по лемме 2, $M \in \mathfrak{N}_p f(Z_p) = f(Z_p)$ и $M/M_{\beta(Z_p)} \in f(Z_p)$. В силу леммы 2 из [5] справедливо включение $M \in \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{F}, \mathfrak{M}$ — неединичные Ω -расслоенные формации с направлением β , а $\mathfrak{S}$ — такая формация, что $K(\mathfrak{S}) \cap \Omega \cap \mathfrak{A} \not\subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \Omega \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$, то множество наследственных Ω -расслоенных подформаций с направлением β формации $\mathfrak{F}$ бесконечно.

Доказательство. Пусть $Z_p \in K(\mathfrak{S}) \cap \Omega \setminus K(\mathfrak{M})$. Ясно, что $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, справедливо включение $Z_p \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$. Из леммы 1 следует, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть A — произвольная группа из $\mathfrak{N}_p$. Так как $A \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{S}$, справедливо включение $A^{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{M}$. Но $Z_p \notin K(\mathfrak{M})$. Поэтому $A \in \mathfrak{S}$. Таким образом, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}$. Пусть $Z_q \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$. Тогда $q \neq p$ и $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{M}$, поскольку $\mathfrak{M}$ — Ω -расслоенная формация. Для любого натурального числа n зафиксируем некоторую циклическую группу P_n порядка p^n . Построим регулярное сплетение $Q_n = Z_q \wr P_n$. Поскольку $Q_n \in \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$, справедливо соотношение $\mathfrak{F}_n = \Omega F(Q_n, \beta) \subseteq \mathfrak{F}$. Кроме того, $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}$. Значит, в силу леммы 6, $\mathfrak{F}_n$ — наследственная Ω -расслоенная подформация в $\mathfrak{F}$.

При доказательстве леммы 8.13 в [9] было показано, что если n и m — различные натуральные числа, то $\mathfrak{F}_n \neq \mathfrak{F}_m$. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть $\mathfrak{M} = \Omega F(t, \beta)$, где t — некоторый внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{M}$, и $\mathfrak{S}$ — непустая формация, причем $K(\mathfrak{S}) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega \subseteq K(\mathfrak{M})$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{S} = \Omega F(f, \beta)$, где $f(A) = t(A)\mathfrak{S}$, если $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$; $f(A) = \mathfrak{S}$, если $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{S})) \setminus K(\mathfrak{M})$; $f(A) = \emptyset$ для всех $A \in \Omega \setminus (K(\mathfrak{S}) \cup K(\mathfrak{M}))$ и $f(\Omega') = t(\Omega')\mathfrak{S}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega F(f, \beta)$. Возьмем произвольную группу G из $\mathfrak{F}$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, справедливо равенство $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{S}$. Тогда

$$(G/O_\Omega(G))^{\mathfrak{S}} \cong G^{\mathfrak{S}}/(G^{\mathfrak{S}} \cap O_\Omega(G)) = G^{\mathfrak{S}}/O_\Omega(G^{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{M}.$$

Но в этом случае $O_\Omega(G^{\mathfrak{S}}/O_\Omega(G^{\mathfrak{S}})) = 1$ и $G^{\mathfrak{S}}/O_\Omega(G^{\mathfrak{S}}) \in t(\Omega')$. Поэтому

$$G/O_\Omega(G) \in t(\Omega')\mathfrak{S} = f(\Omega').$$

Если $K(G) \cap \Omega = \emptyset$, то $G/O_{\Omega'}(G) \cong 1 \in \mathfrak{F}_1$ и $G \in \mathfrak{F}_1$ в силу леммы 2 из [5]. Допустим, что $K(G) \cap \Omega \neq \emptyset$. В случае, когда $A \in K(G^{\mathfrak{S}}) \cap \Omega$, A принадлежит $K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$. Из свойств радикала и корадикала получаем, что

$$(G/G_{\beta(A)})^{\mathfrak{S}} \cong G^{\mathfrak{S}}/(G_{\beta(A)} \cap G^{\mathfrak{S}}) = G^{\mathfrak{S}}/(G^{\mathfrak{S}})_{\beta(A)} \in m(A),$$

поэтому $G/G_{\beta(A)} \in m(A)\mathfrak{S} = f(A)$. Пусть $A \in (K(G) \cap \Omega) \setminus K(G^{\mathfrak{S}})$. Таким образом, $G^{\mathfrak{S}} \subseteq O_{A'}(G) \subseteq G_{\alpha(A)} \subseteq G_{\beta(A)}$. Тогда из того, что $G/G^{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}$, следует включение $G/G_{\beta(A)} \in \mathfrak{S} \subseteq f(A)$. Итак, $G/G_{\beta(A)} \in f(A)$ для любой $A \in K(G) \cap \Omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$. Значит $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка с таким свойством. Тогда группа G монолитическая с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}}$.

Из того, что $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, следует, что $G \notin \mathfrak{S}$. Значит, $G^{\mathfrak{S}} \neq 1$ и из монолитичности G следует, что $R \subseteq G^{\mathfrak{S}}$. Поскольку $G/R \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{S}$, справедливо включение $(G/R)^{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{M}$, и следовательно,

$$(G/R)^{\mathfrak{S}} \cong G^{\mathfrak{S}}/(R \cap G^{\mathfrak{S}}) = G^{\mathfrak{S}}/R \in \mathfrak{M}.$$

Допустим, что R не является Ω -группой, тогда $O_{\Omega}(G) = 1$, а значит,

$$G \cong G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}.$$

Получаем противоречие. Следовательно, R является Ω -группой и $K(R) = (A)$. Если $A \in K(\mathfrak{M})$, то $G/G_{\beta(A)} \in m(A)\mathfrak{S}$, то есть

$$(G/G_{\beta(A)})^{\mathfrak{S}} \cong G^{\mathfrak{S}}/(G^{\mathfrak{S}})_{\beta(A)} \in m(A).$$

Так как $G^{\mathfrak{S}}/R \in \mathfrak{M}$, из леммы 2, доказанной в [5], следует, что $G^{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{M}$, а значит, $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Пусть $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{M})$. Тогда справедливы включения $G/G_{\beta(A)} \in f(A) \neq \emptyset$ и $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{S})) \setminus K(\mathfrak{M})$. Из условия теоремы следует, что A — простая неабелева группа. Поэтому

$$G/G_{\beta(A)} = G/O_{A'}(G) \cong G \in f(A) = \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Получаем противоречие. Значит, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

Будем обозначать через $\Delta(\mathfrak{F})$ множество всех попарно неизоморфных групп из $K(\mathfrak{F})$.

Лемма 9. Тогда и только тогда Ω -расслоенная непустая формация $\mathfrak{F}$ с направлением β является однопорожжденной Ω -расслоенной формацией, когда $\Delta(\mathfrak{F}) \cap \Omega$ — конечное множество и $\mathfrak{F}$ обладает таким внутренним Ω -спутником f , что непустая формация $f(A)$ однопорожждена для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 5 в [4]. Докажем достаточность. Пусть

$$\Delta(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$$

и существует внутренний Ω -спутник f такой, что $f(A)$ — однопорожжденная формация для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$. В частности, $f(A_i) = \text{form}(G_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, и $f(\Omega') = \text{form}(G_0)$. Без ограничения общности, можем считать, что $A_1, A_2, \dots, A_n$ — абелевы группы, $n \leq t$,

то есть $A_i \cong Z_{p_i}$ для некоторого простого p_i , а $A_{n+1}, \dots, A_t$ — простые неабелевы группы. Для всякого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ рассмотрим регулярное сплетение

$$B_i = A_i \wr (G_i / O_{A_i}(G_i)) = [K_i](G_i / O_{A_i}(G_i)),$$

где K_i — база сплетения.

Пусть

$$G = G_0 \times B_1 \times \dots \times B_n \times G_{n+1} \times \dots \times G_t$$

и $\mathfrak{M} = \Omega F(G, \beta)$. Обозначим через m максимальный внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{M}$. Поскольку f — внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$, справедливы включения $G_i \in \mathfrak{F}$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, t\}$. Более того, $B_i / K_i \cong G_i / O_{A_i}(G_i) \in f(A_i)$ и в силу леммы 1 справедливы включения $B_i \in \mathfrak{G}_{A_i} f(A_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Итак, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из леммы 2 следует, что $f(A_i) \subseteq m(A_i) = \mathfrak{M}$ для всех $i \in \{n+1, \dots, t\}$ и $f(\Omega') \subseteq m(\Omega') = \mathfrak{M}$. Кроме того $B_i / (B_i)_{\beta(A_i)} \in m(A_i)$ для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Заметим, что $(B_i)_{\beta(A_i)} = K_i$ для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Поэтому $B_i / K_i \cong G_i / O_{A_i}(G_i) \in m(A_i)$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Таким образом, $G_i \in \mathfrak{G}_{A_i} m(A_i) = m(A_i)$ для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. В итоге получаем, что $f \leq m$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 13 в [8].

Лемма 10. Пусть h — произвольный Ω -спутник Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением β . Тогда для минимального внутреннего Ω -спутника f

$$f(A) = \text{form}(G: G \in h(A) \cap \mathfrak{F})$$

и $O_B(G) = 1$ для всех $B \in (K(\mathfrak{F}) \cap \Omega) \setminus (A)$, если A — неабелева группа из $\Omega \cap K(\mathfrak{F})$, и

$$f(A) = \text{form}(G: G \in h(A) \cap \mathfrak{F}, O_A(G) = 1)$$

для абелевой группы $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.

Лемма 11. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{S}$ — однопорожденная Ω -расслоенная формация с направлением β , причем $\mathfrak{M} = \Omega F(m, \beta)$, где m — внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{M}$, а $\mathfrak{S}$ — неединичная формация. Тогда, если найдется такая группа $Z_p \in \Omega \cap \mathfrak{A}$, что в $m(Z_p)$ имеется простая группа A такая, что $|A| \neq p$, то $A \notin \mathfrak{S}$. Более того, если A — простая абелева группа, то формация $\mathfrak{S}$ абелева.

Доказательство. По условию $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \beta)$ для некоторой группы G . Обозначим через f минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Предположим, что $A \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{A}$. Рассмотрим группу $W = A \wr A^m$, где A^m — прямое произведение m экземпляров группы A , $m = |G|$. По лемме 8, формация $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний Ω -спутник t , что $t(Z_p) = m(Z_p)\mathfrak{S}$. Несложно показать, что $W \in m(Z_p)\mathfrak{S} = t(Z_p)$. Из леммы 10 вытекает, что $W \in f(Z_p) = \text{form}(G/G_{\beta(Z_p)})$. По лемме 3.1.9 из [12], группа W монолитическая с монолитом порядка $|A|^{|A|^m}$. Получено противоречие с леммой 3.1.5 из [12]. Следовательно, A — простая абелева группа. Согласно лемме 3.1.7 из [12], степень сплетения W не меньше $m+1$, что противоречит лемме 3.1.5 из [12]. Таким образом, $A \notin \mathfrak{S}$.

Пусть A — простая абелева группа порядка $q \neq p$. Допустим, что $q \in \pi(\mathfrak{S})$. Пусть H — некоторая qd -группа из $\mathfrak{S}$. Для всякого натурального числа n через H_n обозначим регулярное сплетение $Z_q \wr H^n = [K]H^n$, где K — база сплетения. Так как $H_n/K \cong H^n \in \mathfrak{S}$,

то есть $(H_n)^\delta \subseteq K \in m(Z_p)$, получаем, что $H_n \in m(Z_p)\mathfrak{S}$. Из леммы 18.8 (b) в [13] следует, что $O_p(H_n) = 1$. Поэтому $H_n \in f(Z_p)$ в силу леммы 10. Если L — подгруппа порядка q из H , то по лемме 18.2 из [13] группа $Z_q \wr L^n$ изоморфно вкладывается в H_n . В силу леммы 3.1.7 из [12], степень нильпотентности группы $Z_q \wr L^n$ не меньше $n + 1$. Согласно теореме 5 из [4], справедливо равенство $f(Z_p) = \text{form}(G/G_{\beta(Z_p)})$. Обозначим через $\mathfrak{S}_1$ формацию, порожденную всеми силовскими q -подгруппами из $G/G_{\beta(Z_p)}$. По лемме 3.1.4 из [12], всякая силовская q -подгруппа группы H_n принадлежит $\mathfrak{S}_1$. Хорошо известно, что формация, порожденная конечным множеством групп, однопорожденна, пусть $\mathfrak{S}_1 = \text{form } S$ для некоторой группы S . Таким образом, $Z_q \wr L^n \in s \text{ form } S$. Последнее, ввиду леммы 3.1.5 из [12], означает, что степень нильпотентности группы $Z_q \wr L^n$ не превышает (при любом натуральном n) степень нильпотентности группы S . Получаем противоречие.

Итак, если p и q — различные простые числа и группа Z_q принадлежит формации $m(Z_p)$, то $q \notin \pi(\mathfrak{S})$. Более того, как и при доказательстве теоремы 8.18 в [9], можно показать, что в этой ситуации формация $\mathfrak{S}$ абелева. Лемма доказана.

Лемма 12. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{S}$ — однопорожденная Ω -расслоенная формация с направлением β , причем $\mathfrak{M} = \Omega F(m, \beta)$, где m — внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{M}$, а $\mathfrak{S}$ — неединичная формация. Тогда если найдется такая группа $Z_p \notin \Omega$, что $Z_p \in \mathfrak{M}$, то $Z_p \notin \mathfrak{S}$. Более того, в этом случае формация $\mathfrak{S}$ абелева.

Доказательство. По условию, для некоторой группы G справедливо равенство $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \beta)$. Обозначим через f минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что $A = Z_p \in \mathfrak{S}$. Рассмотрим группу $W = A \wr A^m$, где $m = |G|$. Несложно показать, что $W \in \mathfrak{M}\mathfrak{S} = \mathfrak{F} = \Omega F(G, \beta)$. Следовательно, $W \in f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G))$. Согласно лемме 3.1.7 в [12], степень нильпотентности W не меньше $m + 1$, что противоречит лемме 3.1.5 в [12]. Таким образом, $A \notin \mathfrak{S}$.

Допустим, что $p \in \pi(\mathfrak{S})$. Пусть H — некоторая pd -группа из $\mathfrak{S}$. Для всякого натурального числа n через H_n обозначим регулярное сплетение $Z_p \wr H^n = [K]H^n$, где K — база сплетения. Так как $H_n/K \cong H^n \in \mathfrak{S}$, то есть $(H_n)^\delta \subseteq K \in \mathfrak{M}$, справедливости включения $H_n \in \mathfrak{M}\mathfrak{S}$ и $H_n \in f(\Omega')$. Если L — подгруппа порядка p из H , то по лемме 18.2 в [13] группа $Z_p \wr L^n$ изоморфно вкладывается в H_n . Таким образом, $Z_p \wr L^n \in s \text{ form}(G/O_\Omega(G))$. В силу леммы 3.1.7 из [12], степень нильпотентности группы $Z_p \wr L^n$ не меньше $n + 1$. Последнее противоречит лемме 3.1.5 из [12].

Так же, как и при доказательстве теоремы 8.18 в [9], можно показать, что в этой ситуации формация $\mathfrak{S}$ абелева. Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{S}$ — формации и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$, причем по крайней мере одна из формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{S}$ разрешима. Если $\mathfrak{F}$ — Ω -расслоенная формация с направлением β , то она содержит минимальную Ω -расслоенную не $\mathfrak{S}$ -формацию с направлением β .

Доказательство. Утверждение очевидно при $\mathfrak{S} = \emptyset$. Пусть $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^\delta$. Покажем, что в $\mathfrak{M} = \Omega F(G, \beta)$ имеется лишь конечное множество Ω -расслоенных подформаций с направлением β .

Обозначим через m минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{M}$. В силу теоремы 5 из [4], $m(B) = \text{form}(G/G_{\beta(B)})$ для любого $B \in K(G) \cap \Omega$, $m(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G))$ и $m(B) = \emptyset$, если $B \in \Omega \setminus K(G)$. Если $G_{\beta(B)} \neq 1$, то, ввиду условия леммы, $G/G_{\beta(B)} \in \mathfrak{S}$, то есть $(G/G_{\beta(B)})^\mathfrak{S} = 1$. Тогда, по теореме 3.47 из [9], в $m(B)$, где $B \in K(G) \cap \Omega$, имеется лишь конечное множество Ω -расслоенных подформаций с направлением β . Если же $G_{\beta(B)} = 1$,

то $m(B) = \text{form}(G)$ и по лемме 19.6 из [9] $m(B)$ имеет лишь конечное множество подформаций.

Аналогичное рассуждение можно провести для формации $m(\Omega')$.

Так как множество попарно неизоморфных групп, принадлежащих $K(G) \cap \Omega$, конечно, существует лишь конечное число Ω -спутников t с условием $t \leq m$. Из следствия 1 заключаем, что в формации $\mathfrak{M}$ содержится лишь конечное множество Ω -расслоенных подформаций с направлением β . Так как при этом $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{S}$, но $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{S}$, в $\mathfrak{M}$ можно выбрать такую Ω -расслоенную подформацию $\mathfrak{K}$ с направлением β , что $\mathfrak{K} \not\subseteq \mathfrak{S}$, но $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{S}$ для каждой собственной Ω -расслоенной подформации $\mathfrak{K}_1$ с направлением β из $\mathfrak{K}$. Лемма доказана.

Из теоремы 1 в [14] несложно получить следующее утверждение.

Лемма 14. Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная Ω -расслоенная не $\mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$ -формация с направлением β , где $\omega = \pi(\Omega \cap \mathfrak{A})$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \beta)$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}}$, что либо $K(P) \cap \Omega = \emptyset$, либо $K(P) \subseteq \Omega$ и выполняется одно из следующих условий:

- (1) P — неабелева группа;
- (2) $G = [P]M$, где $P = C_G(P)$ — p -группа и $M = [Q]N$, причем

$$C_M(Q) = Q = M^{\mathfrak{N}_{\omega'}}.$$

Лемма 15. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{S}$ — несократимая факторизация однопорожденной Ω -расслоенной формации с направлением β , где $\mathfrak{M}$ — также Ω -расслоенная формация с направлением β . Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$, где $\omega = \pi(\Omega \cap \mathfrak{A})$.

Доказательство. По условию, для некоторой группы G справедливо равенство $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \beta)$. Обозначим через f минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Допустим, что существует простая неабелева группа $T \in \mathfrak{M}$. Для произвольной группы H из $\mathfrak{S}$ рассмотрим регулярное сплетение

$$W = T \wr (H^n) = [K](H^n),$$

где K — база сплетения W , а H^n — прямое произведение n экземпляров группы H . По предложению 18.5 в [13], группа W монолитична с монолитом $R = K$. Несложно показать, что $W \in \mathfrak{F}$. Если $T \in \Omega$, то по теореме 5 в [4]

$$W/O_{\beta(T)}(W) \cong W/O_{T'}(W) \cong W \in f(T) = \text{form}(G/O_{\beta(T)}).$$

Но

$$|R| = |K| = |T|^{|H|^n},$$

что противоречит лемме 3.1.5 из [12]. В случае, когда $T \notin \Omega$,

$$W/O_{\Omega}(W) \cong W \in f(\Omega') = \text{form}(G/O_{\Omega}(G)).$$

Получаем противоречие с леммой 3.1.5 из [12]. Следовательно, все простые группы в формации $\mathfrak{M}$ абелевы и $K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$. Тогда по лемме 13 в $\mathfrak{M}$ имеется минимальная Ω -расслоенная не $\mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$ -формация $\mathfrak{M}_0$ с направлением β , у

которой все собственные Ω -расслоенные подформации с направлением β содержатся в $\mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$. Причем, по лемме 14, $\mathfrak{M}_0 = \Omega F(Z, \beta)$, где Z — такая монолитическая группа с монолитом $P = Z^{\mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}}$, что, либо $K(P) \cap \Omega = \emptyset$, либо $K(P) \subseteq \Omega$ и выполняется одно из следующих условий:

- (1) P — неабелева группа;
- (2) $Z = [P]M$, где $P = C_Z(P)$ — p -группа, а $M = [Q]N \neq 1$ и $Q = C_M(Q) = M^{\mathfrak{N}_{\omega'}}$ — монолит группы M .

Для всякого натурального числа n через G_n обозначим регулярное сплетение

$$G_n = Z \wr H^n = [K]H^n,$$

где K — база сплетения. Так как $G_n/K \cong H^n \in \mathfrak{S}$, справедливы включения $(G_n)^{\mathfrak{S}} \subseteq K \in \mathfrak{M}$.

Допустим, что $(G_n)^{\mathfrak{S}}$ входит подпрямую в K . Тогда G_n принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Обозначим Z_1 первую копию Z в K и P_1 монолит группы Z_1 . Ввиду локальности $\mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$ заключаем, что $P_1 \not\subseteq \Phi(Z_1)$. Значит, $P_1 \not\subseteq Z(Z_1)$. Следовательно, по предложению 18.5 в [13], G_n монолитична с монолитом

$$T = \prod_{b \in H^n} P_1^b.$$

Если $K(P) \cap \Omega = \emptyset$, то $O_\Omega(Z) = 1$ и $O_\Omega(G_n) = 1$. Значит, по теореме 5 в [4],

$$G_n/O_\Omega(G_n) \cong G_n \in f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G)).$$

Но G_n содержит монолит порядка $|P|^{|H|^n}$, что противоречит лемме 3.1.5 в [12]. Таким образом, $K(P) \subseteq \Omega$.

Пусть Z удовлетворяет условию 1 и $B \in K(P)$. Очевидно, что $O_{B'}(Z) = 1$ и $O_{B'}(G_n) = 1$. По теореме 5 из [4],

$$G_n/(G_n)_{\beta(B)} \cong G_n \in f(B) = \text{form}(G/O_{B'}(G)).$$

Получаем противоречие с леммой 3.1.5 в [12].

Пусть Z удовлетворяет условию 2 и $p \in \pi(P)$. Поскольку $P_1 \not\subseteq \Phi(Z_1)$, ввиду леммы 9.4 в [13], $T \not\subseteq \Phi(K)$ и T дополняема в G_n . Из монолитичности G_n заключаем, что T самоцентрализуема в G_n . Таким образом, $(G_n)_{\beta(Z_p)} = T$. Поэтому

$$G_n/(G_n)_{\beta(Z_p)} \cong G_n/T \cong (Z_1/P_1) \wr (H^n) \in f(Z_p).$$

Но $Z_1/P_1 \cong M$. Поскольку $Q = C_M(Q)$, заключаем, что $Q \not\subseteq Z(M)$, и по предложению 18.5 в [13] группа $(Z_1/P_1) \wr (H^n)$ имеет минимальную нормальную подгруппу порядка $|Q|^{|H|^n}$. Это приводит к противоречию с леммой 3.1.5 в [12]. Итак, $(G_n)^{\mathfrak{S}}$ не входит подпрямую в K .

Пусть V — проекция $(G_n)^{\mathfrak{S}}$ в Z_1 . Поскольку $(G_n)^{\mathfrak{S}}$ — нормальна в G_n , группа V нормальна в Z_1 . Так как $(G_n)^{\mathfrak{S}}$ не входит подпрямую в K , заключаем, что $V \neq Z_1$ и, по лемме 3.1.9 из [12], $(Z_1/V) \wr (H^n)$ — гомоморфный образ $G_n/(G_n)^{\mathfrak{S}}$. Таким образом,

$$(Z_1/V) \wr (H^n) \cong G_n/(V)^{\#} \in \mathfrak{S}.$$

Пусть Z_1/X — последний фактор главного ряда Z_1 , проходящего через V . Тогда $(X)^\#$ — нормальная подгруппа в G_n и $(V)^\# \subseteq (X)^\#$. Значит,

$$G_n/(X)^\# \cong (Z_1/X) \wr (H^n) \in \mathfrak{S}.$$

В частности, из этого следует, что $\mathfrak{S}$ — неабелева формация.

Допустим, что найдется такая группа $Z_p \notin \Omega$, что $Z_p \in \mathfrak{M}$. Тогда, по лемме 12 формация $\mathfrak{S}$ абелева. Получаем противоречие. Как показано выше, каждая простая группа из $\mathfrak{M}$ абелева. Следовательно, все простые группы из $\mathfrak{M}$ являются Ω -группами и $K(\mathfrak{M}) \cap \Omega \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$.

Допустим, что $K(\mathfrak{M}) \cap \Omega \cap \mathfrak{A} = (Z_p)$. Тогда, очевидно, что случай 2 невозможен. Возьмем группу Y из разности $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}$, причем минимальную с таким свойством. Тогда Y — монолитическая группа с монолитом $R = Y^{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{M}$, где R — элементарная абелева p -группа.

Для произвольного натурального числа m рассмотрим регулярное сплетение

$$W = Z \wr (Y^m/R^m),$$

где Y^m — прямое произведение m экземпляров группы Y . Допустим, что $W \in \mathfrak{F}$. Если P — неабелева Ω -группа и $(U) = K(P)$, то

$$W/W_{\beta(U)} \cong W/O_{U'}(W) \cong W \in f(U) = \text{form}(G/O_{U'}(G)),$$

для любого $m \in \mathbb{N}$. Но это противоречит лемме 3.1.5 в [12]. Если P — Ω' -группа, то

$$W/O_{\Omega}(W) \cong W \in f(\Omega') = \text{form}(G/O_{\Omega}(G)),$$

для любого $m \in \mathbb{N}$. Но P не содержится в центре группы Z . Следовательно, по предложению 18.5 в [13], W монолитична с монолитом порядка $|P|^{Y/R^m}$. Получаем противоречие с леммой 3.1.5 из [12]. Значит, $W \notin \mathfrak{F}$. Поскольку $W/K \in \mathfrak{S}$, где K — база сплетения W , справедливы включения $W^{\mathfrak{S}} \subseteq K \in \mathfrak{M}$. Но $W^{\mathfrak{S}}$ не входит подпрямо в K . Обозначим через W_1 проекцию $W^{\mathfrak{S}}$ в Z_1 . Поскольку $W^{\mathfrak{S}}$ нормальна в W , заключаем, что W_1 нормальна в Z_1 . Так как $W^{\mathfrak{S}}$ не входит подпрямо в K , заключаем, что $W_1 \neq Z_1$ и, по лемме 3.1.9 в [12], $(Z_1/W_1) \wr (Y^m/R^m)$ — гомоморфный образ $W/W^{\mathfrak{S}}$. Таким образом,

$$(Z_1/W_1) \wr (Y^m/R^m) \cong W/(W_1)^\# \in \mathfrak{S}.$$

Пусть Z_1/X_1 — последний фактор главного ряда Z_1 , проходящего через W_1 . Тогда $(X_1)^\#$ — нормальная подгруппа в W и $(W_1)^\# \subseteq (X_1)^\#$. Значит, $W/(X_1)^\# \in \mathfrak{S}$. Поскольку $Z_1/X_1 \in \mathfrak{M}$ и Z_1/X_1 — простая группа, заключаем, что $Z_1/X_1 \cong Z_p$ и

$$W/(X_1)^\# \cong Z_p \wr (Y^m/R^m) \in \mathfrak{S}.$$

Но в этом случае, в силу леммы 3.5.20 из [12],

$$Y^m \in \text{form}(Z_p \wr (Y^m/R^m)) \subseteq \mathfrak{S}$$

и $Y \in \mathfrak{S}$. Получаем противоречие с выбором Y . Значит,

$$|\Delta(K(\mathfrak{M}) \cap \Omega \cap \mathfrak{A})| > 1.$$

Обозначим $\mathfrak{F}_1 = \text{form}(G/G_{\beta(B)})0$, где $B \in K(G) \cap \Omega$. Тогда $\mathfrak{F}_1 = \text{form}(\Gamma)$ для некоторой группы Γ . Пусть A_1 — произвольная монолитическая группа из $\mathfrak{S}$. Понятно, что

$O_{Z_p}(A_1) = 1$ для некоторого $Z_p \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$. Значит, $A_1 \in \mathfrak{S} \subseteq t(Z_p)\mathfrak{S}$ и, по лемме 10, $A_1 \in f(Z_p) = \text{form}(G/G_{\beta(Z_p)}) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, всякая монолитическая группа из $\mathfrak{S}$ входит в $\mathfrak{F}_1$. Поэтому $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Так как $G_n/(X)^{\#} \cong (Z_1/X) \wr (H^n) \in \mathfrak{S}$, верно соотношение $\pi(Z_1/X) \cap \pi(\mathfrak{S}) \neq \emptyset$. Поэтому без ограничения общности в качестве H можно взять любую qd -группу из $\mathfrak{S}$, где $q \in \pi(Z_1/X) \cap \pi(\mathfrak{S})$. Если L — подгруппа порядка q из H , а T — подгруппа порядка q из Z_1/X , то, в силу леммы 18.2 в [13], группа $T \wr L^n$ изоморфно вкладывается в $(Z_1/X) \wr H^n$ и $T \wr L^n \in s \text{form}(\Gamma)$. В силу леммы 3.1.7 из [12], степень нильпотентности группы $T \wr L^n$ не меньше $n + 1$. Получаем противоречие с леммой 3.1.5 из [12].

Остается заключить, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}_{\omega'}$. Лемма доказана.

Всякое представление формации $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_t$, где $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$ — некоторые формации и $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_{i-1} \mathfrak{F}_{i+1} \dots \mathfrak{F}_t$ при всех $i \in \{1, \dots, t\}$ называют несократимой факторизацией формации $\mathfrak{F}$. Введем обозначение

$$\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}) = \text{form}(G/O_p(G); G \in \mathfrak{S}).$$

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{S}$ — несократимая факторизация Ω -расслоенной формации с направлением β , где $\mathfrak{M}$ — также Ω -расслоенная формация с направлением β . Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — однопорожжденная Ω -расслоенная формация, когда выполняются следующие условия:

- (1) $\mathfrak{M}$ — однопорожжденная Ω -расслоенная подформация из $\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}_{\omega'}$, где $\omega = \pi(\Omega \cap \mathfrak{A})$;
- (2) $K(\mathfrak{S}) \cap \Omega \cap \mathfrak{A} \subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$;
- (3) $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{S}) \subseteq \omega$;
- (4) если $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_{\omega}$, то $\mathfrak{S}$ — однопорожжденная абелева формация;
- (5) если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}$ и $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$, то $\mathfrak{S}$ — однопорожжденная формация;
- (6) если $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$, где $p \in \omega$, то $\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})$ — однопорожжденная формация.

Доказательство. Обозначим через f минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Докажем необходимость. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \beta)$ для некоторой группы G .

Из леммы 15 следует, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}_{\omega'}$. По лемме 6, $\mathfrak{M}$ — наследственная формация. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 5 в $\mathfrak{M}$ содержится лишь конечное множество наследственных Ω -расслоенных подформаций с направлением β . Но, по лемме 6, любая Ω -расслоенная подформация из $\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}$ наследственна. Таким образом, в $\mathfrak{M}$ существует лишь конечное множество Ω -расслоенных подформаций с направлением β . Пусть $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}$ — такая цепь Ω -расслоенных формаций с направлением β , что $\mathfrak{M}_{i-1}$ — максимальная Ω -расслоенная подформация в $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \dots, k$. Пусть $M_i \in \mathfrak{M}_i \setminus \mathfrak{M}_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда

$$\mathfrak{M} = \Omega F(M_1, \dots, M_k, \beta) = \Omega F(M_1 \times \dots \times M_k, \beta),$$

то есть $\mathfrak{M}$ — однопорожжденная Ω -расслоенная формация. Справедливо условие 1.

Допустим, что $K(\mathfrak{S}) \cap \Omega \cap \mathfrak{A} \not\subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$. Если $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_{\omega}$, найдется $Z_q \in \mathfrak{M} \setminus \Omega$. Следовательно, по лемме 12, формация $\mathfrak{S}$ абелева. Пусть $Z_p \in (K(\mathfrak{S}) \cap \Omega) \setminus K(\mathfrak{M})$. Тогда, по лемме 1, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Несложно показать, что

$$\mathfrak{N}_p = (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{M})(\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}) = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}.$$

Следовательно, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}$. Получаем противоречие с абелевостью формации $\mathfrak{S}$. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega$. В этом случае, по лемме 7, в формации $\mathfrak{F}$ содержится бесконечное множество наследственных Ω -расслоенных подформаций с направлением β , что противоречит лемме 5. Итак, выполняется условие 2.

Допустим, что существует $q \in (\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{S})) \setminus \omega$. Поскольку формация $\mathfrak{M}$ наследственна и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$, найдется такая группа $M \in \mathfrak{M}$, что $|M| = q$. Пусть H — некоторая qd -группа из $\mathfrak{S}$. Для любого натурального n рассмотрим регулярное сплетение

$$D = M \wr (H)^n = [K](H)^n,$$

где K — база сплетения. Если L — подгруппа порядка q из H , то по лемме 18.2 из [13] группа $M \wr (L)^n$ изоморфно вкладывается в $M \wr (H)^n$. Несложно показать, что D принадлежит $\mathfrak{F}$. Но в этом случае

$$D/O_\Omega(D) \cong D \in f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G)), \quad M \wr (L)^n \in s \text{form}(G/O_\Omega(G)).$$

Получили противоречие с леммой 3.1.5 в [12]. Таким образом, справедливо условие 3.

Как отмечено выше, если $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega$, то формация $\mathfrak{S}$ абелева. Очевидно, что существует группа $M \in \mathfrak{M}$ такая, что $|M| = q \notin \omega$. Пусть H — произвольная группа из $\mathfrak{S}$. Для произвольного натурального n рассмотрим регулярное сплетение

$$D = M \wr (H)^n = [K](H)^n,$$

где K — база сплетения. Несложно показать, что D принадлежит $\mathfrak{F}$. Но в этом случае

$$D/O_\Omega(D) \cong D \in f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G))$$

и $H \in f(\Omega')$. Следовательно, $\mathfrak{S} \subseteq f(\Omega')$. Тогда, в силу леммы 3.1.5 в [12], число неизоморфных монолитических групп из $\mathfrak{S}$ конечно. Значит, в этом случае формация $\mathfrak{S}$ однопорожждена.

Предположим теперь, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega$ и $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Обозначим $\mathfrak{F}_1 = \text{form}(G/G_{\beta(B)})$, где $B \in K(G) \cap \Omega$. Тогда $\mathfrak{F}_1 = \text{form}(\Gamma)$ для некоторой группы Γ . Пусть A_1 — произвольная монолитическая группа из $\mathfrak{S}$. Понятно, что $O_{Z_p}(A_1) = 1$ для некоторого $Z_p \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$. Значит, $A_1 \in \mathfrak{S} \subseteq m(Z_p)\mathfrak{S}$ и, по лемме 10, $A_1 \in f(Z_p) = \text{form}(G/G_{\beta(Z_p)}) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, всякая монолитическая группа из $\mathfrak{S}$ входит в $\mathfrak{F}_1$. Поэтому $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Пусть $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{A}$. Тогда, в силу леммы 3.1.5 из [12], число неизоморфных монолитических групп из $\mathfrak{S}$ конечно. Значит, формация $\mathfrak{S}$ однопорожждена. Пусть $\mathfrak{S} \not\subseteq \mathfrak{A}$. Поскольку для минимального Ω -спутника m формации $\mathfrak{M}$ справедливо равенство $m(Z_p) = \mathfrak{S}$ при всех $Z_p \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$, равенства $h(Z_p) = m(Z_p)\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ и $h(B) = \mathfrak{S}$ справедливы для $B \in (K(\mathfrak{S}) \cap \Omega) \setminus K(\mathfrak{M})$. Но $f \leq h$. Значит, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{S}$. Заключаем, что $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_1$ — однопорожжденная формация.

Возьмем теперь $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}))$. Очевидно, что $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}$. Пусть теперь $N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}$. Тогда $N^{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{N}_p$, то есть $N^{\mathfrak{S}} \subseteq O_p(N)$. Значит, $N/O_p(N) \in \mathfrak{S}$. Но $O_p(N/O_p(N)) = 1$, и следовательно, $N/O_p(N) \in \mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})$. Поэтому $N \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}))$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}))$. В силу леммы 8, $\mathfrak{F}$ имеет Ω -спутник f_1 такой, что $f_1(Z_p) = \mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})$. Пусть H — произвольная группа из $\mathfrak{S}$, тогда $H/O_p(H) \in \mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}) = f_1(Z_p)$. Поскольку $O_p(H/O_p(H)) = 1$, по лемме 10, $H/O_p(H) \in f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{F}_1$. По определению $f \leq f_1$. Поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})$ и $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})$ — однопорожжденная формация.

Докажем достаточность. Если $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \emptyset$, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$. Тогда $\mathfrak{M} = \Omega F(M, \beta)$ и, по лемме 3 из [4], $\mathfrak{M} = \text{form}(M)$. Значит, в силу следствия 3.3.3 в [12], $\mathfrak{F}$ — однопорожжденная

формация и, в силу леммы 3 в [4], $\mathfrak{F}$ — однопорожденная Ω -расслоенная формация с направлением β .

Пусть $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega \neq \emptyset$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega$. Заметим, что формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Из п. 2 следует, что $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$. Поскольку $\mathfrak{M}$ — однопорожденная Ω -расслоенная формация, по лемме 9, $\Delta(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ — конечное множество. В силу леммы 8, формация $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний Ω -спутник t , что $t(A) = m(A)\mathfrak{S}$, если $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и $t(\Omega') = m(\Omega')\mathfrak{S}$.

По условию $\mathfrak{M}$ — однопорожденная Ω -расслоенная формация и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$. Кроме того, в силу п. 3, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{S}) \subseteq \omega$. Следовательно, $\pi(m(A)) \cap \pi(\mathfrak{S}) = \emptyset$ для любого $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и $\pi(m(\Omega')) \cap \pi(\mathfrak{S}) = \emptyset$. Значит, в силу следствия 3.3.3 в [12], $m(A)\mathfrak{S}$ и $m(\Omega')\mathfrak{S}$ однопорожденны.

Таким образом, по лемме 9, $\mathfrak{F}$ является однопорожденной Ω -расслоенной формацией с направлением β .

Допустим, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega$ и $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. В силу леммы 8, формация $\mathfrak{F}$ имеет такой расслоенный Ω -спутник f , что $f(C) = \mathfrak{S}$ для всех $C \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$ и $f(\Omega') = \mathfrak{S}$. По условию 1, $\mathfrak{M}$ — однопорожденная Ω -расслоенная формация. Значит, по лемме 9, $\Delta(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ — конечное множество. Из теоремы 1 в [4] и теоремы 2 в [4] следует, что $\mathfrak{S}$ является свободной формацией. Тогда из теоремы 5 в [4] несложно получить, что $\Delta(\mathfrak{S})$ — конечное множество. Очевидно, что $K(\mathfrak{F}) \subseteq K(\mathfrak{S}) \cup K(\mathfrak{M})$. Поэтому $\Delta(\mathfrak{F}) \cap \Omega$ — конечное множество. Следовательно, в силу леммы 9, $\mathfrak{F}$ — однопорожденная Ω -расслоенная формация с направлением β .

Пусть $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}$. Как показано ранее, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{S} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}))$. По лемме 8, $\mathfrak{F}$ имеет Ω -спутник f_1 такой, что $f_1(C) = \mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})$ для всех $C \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$ и $f_1(\Omega') = \mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})$. Из теорем 1 в [4] и 2 в [4] следует, что $\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})$ является свободной формацией. Тогда с учетом теоремы 5 из [4] легко показать, что $\Delta(\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}))$ — конечное множество. Но в этом случае $\Delta(\mathfrak{F})$ — конечное множество. Следовательно, по лемме 9, $\mathfrak{F}$ — однопорожденная Ω -расслоенная формация с направлением β . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_t$ — несократимая факторизация Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением β , причем формация $\mathfrak{M}_1$ также является Ω -расслоенной с направлением β . Формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда однопорожденна, когда выполняются условия:

- (1) $t \leq 3$, $K(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega = K(\mathfrak{M}_1) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega$;
- (2) при $t = 2$ выполняются все пункты теоремы 1;
- (3) если $t = 3$, то $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ — однопорожденные Ω -расслоенные формации с направлением β , $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ однопорожденны, причем $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$, $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$, $\mathfrak{M}_3$ абелева и $\pi(\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2) \cap \pi(\mathfrak{M}_3) \subseteq \omega$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_t$, то есть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{S}_1$, и $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \beta)$ для некоторой группы G . По лемме 15, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$.

Допустим, что $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \emptyset$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$. Следовательно, по лемме 12, $\mathfrak{S}_1$ — абелева формация. Учитывая лемму 3.2.5 из [12], видим, что $t = 2$ и теорема является частным случаем теоремы 1.

Пусть $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega \neq \emptyset$. Для любого $Z_p \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$ выполняются равенства

$$\mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{F} = (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{M}_1)(\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_1).$$

В силу следствия 3.3.7 в [12], формации $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_1$ не могут одновременно быть отличны от $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{N}_p$. Поэтому либо $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}_1$, либо $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}_1$. Допустим, что

найдется $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{M}_1$. Если $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega$, то найдется $Z_q \in \mathfrak{M}_1 \setminus \Omega$. Следовательно, по лемме 12, формация $\mathfrak{S}_1$ абелева. Получаем противоречие. Значит, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$. В этом случае, в силу леммы 7, в формации $\mathfrak{F}$ содержится бесконечное множество наследственных Ω -расслоенных подформаций с направлением β , что противоречит лемме 5. Следовательно,

$$K(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega = K(\mathfrak{M}_1) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega.$$

Пусть $t > 2$. Введем обозначения $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{M}_3 \dots \mathfrak{M}_t$. Допустим, что существует $A \in (K(\mathfrak{M}_2) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega) \setminus K(\mathfrak{F})$. Тогда найдется группа $M \in \mathfrak{M}_2$ такая, что $A \in K(M) \cap \Omega$. Для произвольной группы $H \in \mathfrak{S}$ рассмотрим регулярное сплетение

$$V = M \wr H = [K]H,$$

где K — база сплетения V . Очевидно, что $V^\mathfrak{S} \subseteq K \in \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$. Поскольку $K(M) \not\subseteq K(\mathfrak{F})$, ни $V \notin \mathfrak{F}$, ни $V^\mathfrak{S}$ не входят подпрямую в K для произвольной группы H из $\mathfrak{S}$. В силу леммы 3.1.9 в [12], группе H можно сопоставить такую собственную нормальную подгруппу M_H группы M , что $(M/M_H) \wr H$ — гомоморфный образ группы $V/V^\mathfrak{S} \in \mathfrak{S}$.

Зафиксируем теперь некоторую неединичную группу $H \in \mathfrak{S}$ и рассмотрим бесконечную последовательность $V_1 = (M/M_H) \wr H, V_2 = (M/M_{V_1}) \wr V_1, \dots, V_t = (M/M_{V_{t-1}}) \wr V_{t-1}, \dots$. Причем, как отмечалось выше, $V_i \in \mathfrak{S}$ для всех натуральных i . Несложно показать, что все простые группы из $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ абелевы. Тогда найдется такое простое число p и такая бесконечная последовательность индексов $j_1, j_2, \dots, j_n, \dots$, что $Z_p \in K(M/M_{V_{j_k}})$ при любом $k = 1, 2, \dots$. Пусть $T_1 = Z_p, T_2 = Z_p \wr T_1, \dots, T_{n+1} = Z_p \wr T_n, \dots$. Рассуждая, как и в доказательстве предложения 3.5.21 в [12], можно показать, что для любого натурального числа m найдется такое натуральное число r , что T_m будет изоморфна некоторой подгруппе V_r и $\mathfrak{N}_p \subseteq S(\mathfrak{S})$. Таким образом, для любого натурального числа n в $\mathfrak{S}$ существует такая группа T_n , у которой одна из ее подгрупп является циклической группой порядка p^n и $O_{p'}(T_n) = 1$.

Предположим, что существует группа $Z_q \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega, q \neq p$. Тогда $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{M}_1$. Рассмотрим сплетение $D = Z_q \wr T_n$. Ясно, что $D \in \mathfrak{F}$ и $D/D_{\beta(Z_q)} \cong T_n \in f(Z_q)$ — однопорожденная формация. Получили противоречие с леммой 3.1.5 в [12]. Следовательно, $Z_p \in \Omega, K(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega = (Z_p)\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_p$.

Допустим, что найдется такая группа $Z_q \notin \Omega$, что $Z_q \in \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$. Тогда по лемме 12 формация $\mathfrak{S}$ абелева. Получаем противоречие с тем, что $\mathfrak{N}_p \subseteq s \text{ form } \mathfrak{S}$. Поскольку каждая простая группа из $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ абелева, все простые группы из $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ являются Ω -группами.

Пусть $\mathfrak{N}_p\mathfrak{S} \not\subseteq \mathfrak{S}$ и группа U — минимальная группа из разности $\mathfrak{N}_p\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}$. Тогда U — монолитическая группа с монолитом $R = U^\mathfrak{S} \in \mathfrak{N}_p$. Рассмотрим регулярное сплетение

$$V = M \wr (U/R) = [K](U/R),$$

где K — база сплетения V . Как показано выше, $V \notin \mathfrak{F}$ и $V^\mathfrak{S}$ не входит подпрямую в K . Обозначим через M_1 первую копию M в K и через V_1 проекцию $V^\mathfrak{S}$ в M_1 . Поскольку $V^\mathfrak{S}$ нормальна в V , V_1 также нормальна в M_1 . Так как $V^\mathfrak{S}$ не входит подпрямую в K , справедливо соотношение $V_1 \neq M_1$ и, по лемме 3.1.9 из [12], $(M_1/V_1) \wr (U/R)$ — гомоморфный образ $V/V^\mathfrak{S}$. Таким образом,

$$(M_1/V_1) \wr (U/R) \cong V/(V_1)^\# \in \mathfrak{S}.$$

Пусть M_1/X_1 — последний фактор главного ряда M_1 , проходящего через V_1 . Тогда $(X_1)^\#$ — нормальная подгруппа в V и $(V_1)^\# \subseteq (X_1)^\#$. Значит, $V/(X_1)^\# \in \mathfrak{S}$. Поскольку $M_1/X_1 \in \mathfrak{M}_2$ и M_1/X_1 — простая группа, справедливы соотношения

$$M_1/X_1 = Z_p, \quad V/(X_1)^\# \cong Z_p \wr (U/R) \in \mathfrak{S}.$$

Но в этом случае, по лемме 3.5.20 в [12], $U \in \text{form}(Z_p \wr (U/R)) \subseteq \mathfrak{S}$ и $U \in \mathfrak{S}$. Получили противоречие с выбором U . Значит, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$.

Возьмем группу Y из разности $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}$, причем минимального порядка с таким свойством. Тогда Y — монолитическая группа с монолитом $R = Y^\mathfrak{S} \in \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$. Как сказано выше, каждая простая группа из $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ — абелева Ω -группа. Значит, R — элементарная абелева p -группа и $Y \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$. Получаем противоречие с выбором группы Y .

Итак, остается заключить, что

$$K(\mathfrak{M}_2) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega \subseteq K(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega \subseteq K(\mathfrak{M}_1).$$

По лемме 8, $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ — Ω -расслоенная формация с направлением β . Следовательно, по теореме 1, $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ — однопорожденные Ω -расслоенные формации с направлением β , содержащиеся в $\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}_{\omega'}$. Кроме того, так как $|\pi(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)| > 1$, по лемме 3.2.5 в [12] $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ не нильпотентна. Значит, по теореме 1, $\mathfrak{S}$ — однопорожденная абелева формация и, используя лемму 3.2.5 из [12], заключаем, что $t = 3$, причем $\pi(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2) \cap \pi(\mathfrak{M}_3) \subseteq \omega$.

Утверждение 2 непосредственно следует из теоремы 1.

Пусть $t = 3$. Допустим, что $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega$. Тогда, по теореме 1, $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ — абелева формация. В этом случае $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ ограничена по параметру c , что противоречит лемме 3.2.5 в [12]. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$.

Покажем, что $\mathfrak{M}_2$ — нильпотентная формация. Пусть m_1 — минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$. По теореме 5 из [4], $m_1(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$ для всех $Z_p \in K(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2) \cap \Omega$. Пусть $|\pi(\mathfrak{M}_1 \cap \Omega)| > 1$. Введем обозначение

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{p \in \pi(\mathfrak{M}_1)} m_1(Z_p).$$

Предположим, что $\mathfrak{M}_2 \not\subseteq R_0(\mathfrak{X})$. Пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{M}_2 \setminus R_0(\mathfrak{X})$. Тогда A — монолитическая группа с монолитом R . Поскольку $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ — метанильпотентная формация, R — элементарная абелева p -группа для некоторого простого числа p . Пусть $q \in \pi(\mathfrak{M}_1) \setminus \{p\}$ и $T = Z_q \wr A$. Поскольку $O_q(A) = 1$, в силу леммы 2 в [11], $T_{\gamma(Z_q)} = K$, где K — база регулярного сплетения T . Кроме того, $T_{\alpha(Z_q)} = K$. Но $T/K \cong A \in \mathfrak{M}_2$. Поэтому $T \in \mathfrak{N}_q\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$. Следовательно,

$$T/T_{\beta(Z_q)} = T/K \cong A \in m_1(Z_q).$$

Получаем противоречие. Значит, $\mathfrak{M}_2 \subseteq R_0(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$.

Пусть $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{\omega'}$. Как и в доказательстве теоремы 1, несложно показать, что

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{M}_2/O_p(\mathfrak{M}_2)),$$

причем $\mathfrak{M}_2/O_p(\mathfrak{M}_2) \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$. Таким образом, вместо формации $\mathfrak{M}_2$ можно взять $\mathfrak{M}_2/O_p(\mathfrak{M}_2)$.

Из этого следует, что в любом случае, по теореме 1, формация $\mathfrak{M}_2$ однопорожденна. Необходимость доказана.

Достаточность следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Лемма 16. Пусть

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{M}_2 \mathfrak{S}_2$$

— несократимая факторизация однопорожжденной Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением β , причем формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ также являются Ω -расслоенными с направлением β . Если $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}_2 \not\subseteq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$.

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{S}_1 \not\subseteq \mathfrak{S}_2$. Возьмем группу H из разности $\mathfrak{S}_1 \setminus \mathfrak{S}_2$. Поскольку $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}$, по лемме 13 в $\mathfrak{M}_1$ существует минимальная Ω -расслоенная не $\mathfrak{N}$ -формация $\mathfrak{M}_0$ с направлением β . В силу теоремы 1 из [14], $\mathfrak{M}_0 = \Omega F(G, \beta)$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}}$, что либо $K(P) \cap \Omega = \emptyset$, либо $K(P) \subseteq \Omega$ и $G = [P]M$, где $P = C_G(P)$ — p -группа, а $M \neq 1$ — монолитическая группа с монолитом $Q = M^{h(A)}$ для $A \in K(P)$, где h — максимальный внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{N}$.

По лемме 15, $G \in \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$, где $\omega = \pi(\Omega \cap \mathfrak{N})$, но $G \notin \mathfrak{N}$. Значит, $G^{\mathfrak{N}_{\omega'}} \neq 1$ и $G^{\mathfrak{N}_{\omega'}} \in \mathfrak{N}_\omega$. Следовательно, $P \subseteq \mathfrak{N}_\omega$ и $K(P) \subseteq \Omega$.

Ясно, что $h(A) = \mathfrak{N}_p$ для $A \in K(P)$ и $M/Q \in \mathfrak{N}_p$, но

$$O_p(M) = O_p(G/P) = O_p(G/C_G(P)) = 1.$$

Следовательно, $Q = M \cong Z_q$, $q \neq p$. Обозначим через W регулярное сплетение

$$W = G \wr H = [K]H,$$

где K — база сплетения W . Если $Z(G) \neq 1$, то $P \subseteq Z(G)$ и $M \triangleleft G$. Получаем противоречие. Таким образом, $Z(G) = 1$ и $P \not\subseteq Z(G)$. Тогда, по лемме 3.1.9 в [12], W — монолитическая группа с монолитом

$$L = \prod_{b \in H} P^b.$$

Из насыщенности формации $\mathfrak{N}$ следует, что $P \not\subseteq \Phi(G)$. Поэтому $L \not\subseteq \Phi(K)$ и D — дополнение к L в K , а DH — дополнение к L в W . Из монолитичности W следует, что $C_W(L) = L$, а значит, $F(W) = L$.

Поскольку $W/K \cong H \in \mathfrak{S}_1$, справедливо включение $W^{\mathfrak{S}_1} \subseteq K$. Так как $G \in \mathfrak{M}_1$ и $K(P) \subseteq \Omega$, справедливы соотношения

$$G/G_{\beta(Z_p)} \cong G/P \cong M \cong Z_q \in m(Z_p),$$

где m — внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{M}_1$. Следовательно, по лемме 11, $\mathfrak{S}_1$ — абелева формация и $Z_q \notin \mathfrak{S}_1$. По лемме 2.4 в [10], $\mathfrak{S}_1$ — наследственная формация и $q \notin \pi(\mathfrak{S}_1)$. Ясно, что $W^{\mathfrak{S}_1} \neq 1$. Допустим, что $W^{\mathfrak{S}_1} \subset K$, тогда $K/W^{\mathfrak{S}_1}$ — q -группа и $W/W^{\mathfrak{S}_1}$ — qd -группа. Получаем противоречие. Значит, $W^{\mathfrak{S}_1} = K \in \mathfrak{M}_1$ и $W \in \mathfrak{M}_1 \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{M}_2 \mathfrak{S}_2$.

Покажем, что K — $\mathfrak{N}^2$ -радикал группы W . Пусть T — нормальная метанильпотентная подгруппа группы W . Очевидно, что $F(T) \triangleleft W$ и $F(T) \subseteq F(W) = L$. Если $F(T) = 1$, то $T = 1$ и $T \subseteq K$. Допустим, что $F(T) = L$. Рассмотрим регулярное сплетение

$$R = (G/P) \wr H \cong Z_q \wr H = [K_1]H,$$

где K_1 — база сплетения R . Поскольку $q \notin \pi(\mathfrak{S}_1)$, справедливо равенство $O_q(H) = 1$ и, по лемме 2 из [11], $F_{Z_q}(R) = K_1$. Значит, $F(R) = K_1$. Тогда $F(R) \cong K/L$ — наибольшая

нильпотентная подгруппа из W/L . Таким образом, $T/L \subseteq K/L$ и $T \subseteq K$. Итак, K — $\mathfrak{N}^2$ -радикал группы W .

Ранее доказано, что $W^{\mathfrak{S}_2} \in \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$, поэтому $W^{\mathfrak{S}_2} \subseteq K$. Но в таком случае $W/K \cong H \in \mathfrak{S}_2$. Получаем противоречие с выбором H . Следовательно, $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2$ и, в силу симметричности, $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$. Лемма доказана.

Лемма 17. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{S}$ — Ω -расслоенная формация с направлением β , $|\pi| > 1$, $\pi(\Omega) \subseteq \pi$ и $K(\mathfrak{S}) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega \subseteq \mathfrak{N}_\pi$. Тогда

$$\mathfrak{S} = R_0 \left(\bigcup_{A \in (K(\mathfrak{F}) \cap \Omega)} f(A) \right),$$

где f — минимальный внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Введем обозначение

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{A \in (K(\mathfrak{F}) \cap \Omega)} f(A).$$

Предположим, что $\mathfrak{S} \not\subseteq R_0(\mathfrak{X})$ и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{S} \setminus R_0(\mathfrak{X})$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом R . Поскольку $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$, справедливо включение $G \in \mathfrak{F}$. Очевидно, что $\mathfrak{N}_\pi$ имеет минимальный внутренний Ω -спутник m такой, что $m(A) = 1$ для всех $A \in K(\mathfrak{N}_\pi) \cap \Omega$. В случае $K(R) \cap \Omega = \emptyset$ справедливо равенство $O_B(G) = 1$ для любой группы $B \in \Omega$. По лемме 8, $\mathfrak{F}$ обладает Ω -спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{S}$ для всех $A \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$. Тогда, по лемме 10, $G \in f(Z_p)$ для некоторого $Z_p \in \mathfrak{N}_\pi \cap \Omega$, что противоречит выбору G . Значит, $K(R) \subseteq \Omega$.

Если R — неабелева группа и $K(R) = (B)$, то $G/O_{B'}(G) \cong G \in f(B) \subseteq R_0(\mathfrak{X})$. Получаем противоречие. Значит R — элементарная абелева p -группа для некоторого простого числа p . Рассмотрим регулярное сплетение

$$T = Z_q \wr G = [K]G,$$

где $Z_q \in \Omega$, $q \neq p$, а K — база сплетения. Поскольку $O_q(G) = 1$, по лемме 2 в [11],

$$T_{\gamma(Z_q)} = O_{Z_q}(T) = K = T_{\alpha(Z_q)} = T_{\beta(Z_q)}.$$

Так как $T/K \cong G \in \mathfrak{S}$, справедливо включение $T \subseteq \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{S} = \mathfrak{F}$. Следовательно,

$$T/T_{\beta(Z_q)} = T/K \cong G \in f(Z_q) \subseteq R_0(\mathfrak{X}).$$

Получаем противоречие. Поэтому $\mathfrak{S} \subseteq R_0(\mathfrak{X})$.

Обратное включение следует из леммы 8. Лемма доказана.

Лемма 18. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}$ — несократимая факторизация однопорожжденной Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с направлением β , причем $Z_p \in \Omega$. Тогда

$$\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}) = f(Z_p),$$

где f — минимальный внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Доказательство. По теореме 1, $K(\mathfrak{S}) \cap \mathfrak{A} \cap \Omega \subseteq (Z_p)$. Тогда, по лемме 8, формация $\mathfrak{F}$ обладает Ω -спутником h таким, что $h(Z_p) = \mathfrak{S}$. Пусть H произвольная группа из $\mathfrak{S}$, тогда $H/O_p(H) \in \mathfrak{S} = h(Z_p)$. Поскольку $O_p(H/O_p(H)) = 1$, по лемме 10, $H/O_p(H) \in f(Z_p)$. Следовательно, $\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}) \subseteq f(Z_p)$.

Несложно показать, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{S} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})).$$

Тогда, в силу леммы 8, $f(Z_p) \subseteq \mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S})$. Значит, $\mathfrak{S}/O_p(\mathfrak{S}) = f(Z_p)$. Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть однопорожжденная Ω -расслоенная формация $\mathfrak{F}$ с направлением β допускает несократимую факторизацию $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_t$, где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ — неразложимые формации и формация $\mathfrak{F}_1$ также является Ω -расслоенной с направлением β . Если формация $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{N}_p$, где $Z_p \in \Omega$, то все множители факторизации $\mathfrak{F}$ однозначно определены.

Доказательство. Допустим, что формация $\mathfrak{F}$ имеет две различные несократимые факторизации $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_t = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_r$ с неразложимыми множителями, в которых $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{S}_1$ — Ω -расслоенные формации с направлением β . Из теоремы 2 следует, что $t \leq 3$ и $r \leq 3$.

Рассмотрим случай, когда $t = r = 2$, то есть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2$. Если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{S}_1$ не нильпотентны, то, по лемме 16, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{S}_2$. Из теоремы 2 следует, что $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{S}_2$ — однопорожжденные абелевы формации. Тогда, по лемме 3.4.5 в [12], $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{S}_1$. Получили противоречие, следовательно, по крайней мере одна из формаций $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{S}_1$ нильпотентна.

Допустим, что нильпотентны обе формации. По теореме 2, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$, где $\omega = \pi(\Omega \cap \mathfrak{A})$ и $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{N}_{\omega'}$. Если $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$ и $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$, то $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{N}_\pi$, где $\pi = \pi(\mathfrak{M}_1)$. Тогда, в силу леммы 17, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{S}_2$. Получаем противоречие. Предположим, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$, а $\mathfrak{S}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega$, тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{S}_1$. Пусть G — группа минимального порядка из разности $\mathfrak{S}_1 \setminus \mathfrak{M}_1$, в таком случае G — монолитическая q -группа, $Z_q \notin \Omega$. По лемме 18.8 из [9], для некоторого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}_1)$ существует точный неприводимый $F_p[G]$ -модуль T . Рассмотрим полупрямое произведение $M = [T]G$. Поскольку $M/T \cong G \in \mathfrak{M}_2$, справедливы соотношения $M^{\mathfrak{M}_2} \subseteq T \in \mathfrak{M}_1$ и $M \in \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2$. Из теоремы 2 следует, что $G \notin \mathfrak{S}_2$, значит, $M^{\mathfrak{S}_2} \not\subseteq T$ и $M^{\mathfrak{S}_2} \in \mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{N}$. Получаем противоречие. Аналогично доказывается, что случай $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega$ и $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$ также невозможен. Таким образом, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{S}_1$.

Пусть H — группа минимального порядка из разности $\mathfrak{S}_2 \setminus \mathfrak{M}_2$. По теореме 2, $\mathfrak{S}_2$ — абелева формация, значит, $H \cong Z_q$. Если $Z_q \notin \Omega$, то, по теореме 2, $Z_q \in \mathfrak{M}_1$ и $Z_q \notin \mathfrak{S}_1$, то есть $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{S}_1$. Получаем противоречие. Значит, $Z_q \in \Omega$. Пусть $M = [T]Z_q$, где T — точный неприводимый $F_p[Z_q]$ -модуль для некоторого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{S}_1)$. Ясно, что $M \in \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$. Но $Z_q \notin \mathfrak{M}_2$, поэтому $M^{\mathfrak{M}_2} \not\subseteq T$ и $M^{\mathfrak{M}_2} \in \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}$. Получаем противоречие. Следовательно, $\mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{M}_2$. В силу симметрии, $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{M}_2$. Получаем противоречие.

Остается предположить, что $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}$. Обозначим m_1 и f минимальные Ω -спутники формаций $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Поскольку $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}$, найдется такая группа $Z_q \in \Omega$, что $m_1(Z_q) \neq \mathfrak{M}_0$. Из теоремы 5 в [4] и леммы 10 вытекает, что $m_1(Z_q)$ порождается некоторым множеством нильпотентных групп G с $O_{Z_q}(G) = 1$, то есть $m_1(Z_q) \subseteq \mathfrak{N}_{q'}$. В силу леммы 8, $\mathfrak{F}$ обладает таким Ω -спутником t , что $t(Z_p) = m_1(Z_p) \mathfrak{M}_2$, если $Z_p \in K(\mathfrak{M}_1) \cap \Omega = K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$. Пусть N — монолитическая группа из $m_1(Z_p) \mathfrak{M}_2$. Если $O_{Z_p}(N) = 1$, то, в силу леммы 10, $N \in f(Z_p)$. Пусть $O_{Z_p}(N) \neq 1$. По определению,

$N^{\mathfrak{M}_2} \in m_1(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Значит, $N^{\mathfrak{M}_2} = 1$ и $N \in \mathfrak{M}_2$. Для произвольной группы B из $m_1(Z_p)$ рассмотрим регулярное сплетение

$$W = B \wr N = [K]N,$$

где K — база сплетения. Ясно, что $W \in m_1(Z_p)\mathfrak{M}_2 = t(Z_p)$. В силу леммы 10, $W \in f(Z_p)$ и $N \in f(Z_p)$. Таким образом, $m_1(Z_p)\mathfrak{M}_2 \subseteq f(Z_p)$, а так как $f \leq t$, справедливо равенство

$$m_1(Z_p)\mathfrak{M}_2 = f(Z_p).$$

По лемме 17,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_2 &= R_0 \left(\bigcup_{A \in (K(\mathfrak{F}) \cap \Omega)} f(A) \right) = Q R_0 \left(\bigcup_{A \in (K(\mathfrak{F}) \cap \Omega)} m_1(A)\mathfrak{M}_2 \right) \\ &= \bigvee_{A \in (K(\mathfrak{F}) \cap \Omega)} m_1(A)\mathfrak{M}_2. \end{aligned}$$

По лемме 3.4.4 в [12],

$$\mathfrak{S}_2 = \left(\bigvee_{A \in (K(\mathfrak{F}) \cap \Omega)} m_1(A) \right) \mathfrak{M}_2, \quad \bigvee_{A \in (K(\mathfrak{F}) \cap \Omega)} m_1(A) \neq 1.$$

Получили противоречие с неразложимостью $\mathfrak{S}_2$.

Допустим, что $t = r = 3$, то есть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$. По лемме 3.2.5 в [12], формации $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ не нильпотентны. Поэтому, по лемме 16, $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{S}_3$. По теореме 2, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$ и $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$, значит, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{N}_\pi$. Допустим, что существует группа $G \in \mathfrak{M}_2 \setminus \mathfrak{S}_2$. По лемме 17, $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$, поэтому $G^{\mathfrak{S}_2} \in \mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$. Но из теоремы 2 следует, что $G \in \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{S}_2} = 1$ и $G \in \mathfrak{S}_2$. Получаем противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{S}_2$ и, из соображений симметрии, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{S}_2$.

Остается случай $t \neq r$, например, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$. Если $\mathfrak{S}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}$, то, по лемме 16, $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{S}_2$. Из теоремы 2 следует, что $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{S}_2$ — однопорожденная абелева формация. Значит, по лемме 17, $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{S}_1$, что противоречит неразложимости формации $\mathfrak{S}_1$. Следовательно, $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{N}$. Поскольку $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$, справедливы соотношения $\mathfrak{S}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$ и $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{S}_1$. Если H — группа из разности $\mathfrak{S}_1 \setminus \mathfrak{M}_1$, то, по теореме 2, $H \cong Z_q \notin \Omega$. В этом случае существует точный неприводимый $F_p[Z_q]$ -модуль T для некоторого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{S}_1)$. Пусть $M = [T]Z_q$. Очевидно, что $M \in \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$. Но $Z_q \notin \mathfrak{S}_2$, поэтому $M^{\mathfrak{S}_2} = M \in \mathfrak{S}_1$, что противоречит нильпотентности $\mathfrak{S}_1$. Таким образом, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$.

Предположим, что найдется группа $S \in \mathfrak{M}_3 \setminus \mathfrak{S}_2$. Нетрудно показать, что $S \cong Z_q \in \Omega$. Из теоремы 2 вытекает, что $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$ и $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{S}_2$. Для произвольного числа $p \in \pi(\mathfrak{M}_2)$ существует точный неприводимый $F_p(Z_q)$ -модуль T . Пусть $M = [T]Z_q$, тогда $M \in \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 \subseteq \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$. Но $Z_q \notin \mathfrak{S}_2$, значит, $M \in \mathfrak{S}_1$. Получаем противоречие с нильпотентностью $\mathfrak{S}_1$, то есть $\mathfrak{M}_3 \subseteq \mathfrak{S}_2$.

Возьмем произвольную группу D из разности $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 \setminus \mathfrak{S}_2$. Ясно, что $D \in \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ и монолит $D^{\mathfrak{S}_2} \in \mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$. Но $D^{\mathfrak{M}_3} \neq 1$ и $D^{\mathfrak{S}_2} \subseteq D^{\mathfrak{M}_3} \in \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$. Из данного противоречия заключаем, что $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 \subseteq \mathfrak{S}_2$. Пусть C — группа минимального порядка из разности $\mathfrak{S}_2 \setminus \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$. Тогда C — монолитическая группа с монолитом R . Поскольку

$C^{\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3} \in \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$, монолит R — элементарная абелева p -группа, $Z_p \in \Omega$. Рассмотрим $M = [T]C$, где T — точный неприводимый $F_q[C]$ -модуль для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{S}_1) \setminus \{p\}$. Очевидно, что $M \in \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ и $M^{\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3} \in \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$. С другой стороны, $M^{\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3} \not\subseteq T$, что противоречит нильпотентности $M^{\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3}$. Итак, $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{S}_2$. Теорема доказана.

С использованием леммы 18 аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4. Пусть однопорожденная Ω -расслоенная формация $\mathfrak{F}$ с направлением β допускает несократимую факторизацию $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_t = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_2/O_p(\mathfrak{F}_2))\mathfrak{F}_3 \dots \mathfrak{F}_t$, где $\mathfrak{F}_2/O_p(\mathfrak{F}_2), \mathfrak{F}_3, \dots, \mathfrak{F}_t$ — неразложимые формации, $Z_p \in \Omega$. Тогда множители $\mathfrak{F}_2/O_p(\mathfrak{F}_2), \mathfrak{F}_3, \dots, \mathfrak{F}_t$ факторизации $\mathfrak{F}$ однозначно определены.

Список литературы

1. Скиба А. Н., О произведении формаций. *Алгебра и логика* (1983) **22**, №5, 574–583.
2. Шеметков Л. А., Экраны произведения формаций. *Доклады АН Белорусской ССР* (1981) **25**, №8, 677–680.
3. Skiba A. N., On nontrivial factorizations of a one-generated local formation of finite groups. *Contemp. Math.* (1992) **131**, №1, 363–374.
4. Ведерников В. А., Сорокина М. М., Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискретная математика* (2001) **13**, №3, 125–144.
5. Vedernikov V. A., Maximal satellites of Ω -foliated formations and Fitting classes. *Proc. Steklov Inst. Math.* (2001) 217–233.
6. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Матем. Труды* (1999) **2**, №2, 114–147.
7. Ведерников В. А., Коптюх Д. Г., *Частично композиционные формации групп*, Препринт №2. БГПУ, Брянск, 1999.
8. Еловигов А. Б., Факторизация однопорожденных формаций. *Математические заметки* (2003) **73**, №5, 684–697.
9. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., *Формации алгебраических систем*. Наука, Москва, 1989.
10. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп*. Наука, Москва, 1978.
11. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., О минимальном композиционном экране композиционной формации. *Вопросы алгебры* (1992) **7**, 39–43.
12. Скиба А. Н., *Алгебра формаций*. Беларуская навука, Минск, 1997.
13. Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groups*. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
14. Сорокина М. М., Корпачева М. А., О критических Ω -расслоенных формациях конечных групп. *Дискретная математика* (2006) **18**, №1, 106–115.

Статья поступила 20.12.2006.

Переработанный вариант поступил 10.02.2009.