Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Карташова, О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 3, 119–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1065>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:13:26

О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр

© 2009 г. А. В. Карташова

В работе показано, что решетка топологий конечной однопорожденной коммутативной унарной алгебры изоморфна решетке топологий характеристической полугруппы этой алгебры. С использованием этого утверждения охарактеризован класс всех коммутативных унарных алгебр с линейно упорядоченными решетками топологий. Установлено, что если либо решетка конгруэнций, либо решетка топологий коммутативной унарной алгебры конечна, то и сама алгебра конечна. Приведены примеры бесконечных некоммутативных унарных алгебр с конечными решетками топологий. Доказано, что для произвольной функциональной сигнатуры, содержащей хотя бы один символ, арность которого больше 1, и любого целого числа $n \geq 2$ найдется бесконечная алгебра этой сигнатуры, решетка топологий которой линейно упорядочена и состоит из n элементов.

1. Введение

Унарной алгеброй называется алгебра, сигнатура которой состоит только из унитарных символов. Очевидно, что любую унарную алгебру можно рассматривать как полигон над моноидом или автомат без выхода. В силу этих обстоятельств унарные алгебры постоянно привлекали и привлекают внимание многих исследователей (см., напр., [1–6]). Значительное место в теории унарных алгебр занимают исследования решеток, связанных с алгебрами. Эти решетки несут важную информацию о свойствах самих алгебр. К ним относятся, например, наиболее изученные на сегодняшний день решетки подалгебр и конгруэнций.

В последнее время в связи с активным применением топологических методов в алгебре (см., напр., [7, 8]) становится актуальной задача исследования решеток топологий алгебр. В настоящей работе охарактеризован класс всех коммутативных унарных алгебр с линейно упорядоченными решетками топологий. Установлено, что если решетка конгруэнций, либо решетка топологий коммутативной унарной алгебры конечна, то и сама алгебра конечна. Приведены примеры бесконечных некоммутативных унарных алгебр с конечными решетками топологий. Доказано, что для произвольной функциональной сигнатуры, содержащей хотя бы один символ, арность которого больше 1, и любого целого числа $n \geq 2$ найдется бесконечная алгебра этой сигнатуры, решетка топологий которой линейно упорядочена и состоит из n элементов. Некоторые из приведенных в статье результатов анонсированы в [9].

2. Определения и вспомогательные результаты

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра и δ — топология на множестве A . Сигнатурная n -арная операция F называется непрерывной относительно топологии δ , если для любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ и произвольной окрестности U элемента $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ найдутся окрестности $U_1, U_2, \dots, U_n$ элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, соответственно, такие, что $F(U_1, U_2, \dots, U_n) \subseteq U$. Топология на множестве A , относительно которой каждая операция из Ω является непрерывной, называется топологией на алгебре $\mathfrak{A}$. Множество всех топологий на алгебре $\mathfrak{A}$, упорядоченное по включению, является полной решеткой, которую будем обозначать $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$. Решетки подалгебр и конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ обозначаются через $\text{Sub } \mathfrak{A}$ и $\text{Con } \mathfrak{A}$, соответственно. Подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная элементом $a \in A$, обозначается (a) . Далее всюду $\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел, $\mathbf{N}$ — множество целых положительных чисел и $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Для любой унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ через Ω^* обозначается свободный моноид слов с базой Ω . Единицей в Ω^* является пустое слово. Для любого слова $u \in \Omega^*$ определим отображение σ_u равенством $\sigma_u(a) = u(a)$, $a \in A$. Множество $\{\sigma_u \mid u \in \Omega^*\}$ образует полугруппу $S(\mathfrak{A})$ относительно композиции. Эта полугруппа называется характеристической полугруппой алгебры $\mathfrak{A}$ ([10]).

Унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется коммутативной, если $f(g(a) = g(f(a)$ для всех $f, g \in \Omega$ и $a \in A$.

Отметим, что если $\mathfrak{A}$ — коммутативная унарная алгебра, то каждое отображение σ_u , $u \in \Omega^*$, является эндоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$. Кроме того, очевидно, что в коммутативном случае

$$S\mathfrak{A} \cong \Omega^* / \text{Ann } A,$$

где

$$\text{Ann } A = \{(u, v) \mid u, v \in \Omega^*, u(a) = v(a) \text{ для всех } a \in A\}.$$

Наименьшую по включению топологию на произвольной унарной алгебре, содержащей данное подмножество V носителя этой алгебры, назовем топологией, порожденной множеством V , и обозначим $t(V)$.

Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — унарная алгебра и $V \subseteq A$. Тогда каждое непустое подмножество $X \subsetneq A$, открытое в топологии $t(V)$, равно объединению некоторых конечных пересечений множеств вида $u^{-1}(V)$, где $u \in \Omega^*$ (под $u^{-1}(V)$ понимается полный прообраз V при отображении σ_u).

3. Решетки топологий однопорожденных коммутативных унарных алгебр

Известно (см. теорему 1 в [1]), что для любой однопорожденной коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ справедливо равенство $|A| = |S(\mathfrak{A})|$ и $\text{Con } \mathfrak{A} \cong \text{Con } S(\mathfrak{A})$.

Ниже показано, что аналогичный результат имеет место для решетки топологий конечной однопорожденной коммутативной унарной алгебры.

Далее для любой топологии δ на конечном множестве A через $M(x, \delta)$ будем обозначать наименьшую по включению окрестность элемента $x \in A$ в топологическом пространстве (A, δ) .

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная однопорожденная коммутативная унарная алгебра. Тогда

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{Z}(S(\mathfrak{A})).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = (a)$ и $\sigma_u \in S(\mathfrak{A})$. Для любой топологии $\delta \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ положим

$$H(\sigma_u) = \{\sigma_w \in S(\mathfrak{A}) \mid w(a) \in M(u(a), \delta)\}. \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что совокупность подмножеств $H(\sigma_u)$, $u \in \Omega^*$, носителя полугруппы $S(\mathfrak{A})$ образует базу некоторой топологии $\varphi(\delta)$ на этом множестве.

Из (1) непосредственно вытекает, что $M(\sigma_u, \varphi(\delta)) = H(\delta_u)$ при всех $u \in \Omega^*$. Покажем, что $\varphi(\delta)$ является топологией на полугруппе $S(\mathfrak{A})$. Согласно лемме 1 из [11], для этого достаточно проверить, что

$$M(\sigma_u, \varphi(\delta))M(\sigma_v, \varphi(\delta)) \subseteq M(\sigma_{uv}, \varphi(\delta)) \quad (2)$$

для любых $u, v \in \Omega^*$.

Пусть $x, y \in \Omega^*$, $\sigma_x \in M(\sigma_u, \varphi(\delta))$, $\sigma_y \in M(\sigma_v, \varphi(\delta))$. Из (1) вытекает, что $x(a) \in M(u(a), \delta)$, $y(a) \in M(v(a), \delta)$. Следовательно,

$$M(x(a), \delta) \subseteq M(u(a), \delta), \quad (3)$$

$$M(y(a), \delta) \subseteq M(v(a), \delta). \quad (4)$$

Отсюда, в силу (3) и леммы 1 из [11], следует, что

$$xy(a) = yx(a) \in y(M(u(a), \delta)) \subseteq M(yu(a), \delta) = M(uy(a), \delta),$$

и значит, $M(xy(a), \delta) \subseteq M(uy(a), \delta)$. Аналогичными рассуждениями из (4) получаем, что $M(uy(a), \delta) \subseteq M(uv(a), \delta)$. Поэтому $xy(a) \in M(xy(a), \delta) \subseteq M(uv(a), \delta)$. Это означает, что $\sigma_{xy} \in M(\sigma_{uv}, \varphi(\delta))$ согласно (1). Таким образом, справедливо включение (2). Следовательно, соответствие $\varphi: \delta \rightarrow \varphi(\delta)$ является отображением $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ в $\mathfrak{Z}(S(\mathfrak{A}))$. Используя равенство (1), заключаем, что

$$\delta_1 \subseteq \delta_2 \iff \varphi(\delta_1) \subseteq \varphi(\delta_2)$$

для любых двух топологий $\delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$.

Осталось показать, что отображение φ сюръективно. Пусть $\kappa \in \mathfrak{Z}(S(\mathfrak{A}))$ и $u \in \Omega^*$. Положим

$$K(u) = \{v(a) \in A \mid \sigma_v \in M(\sigma_u, \kappa)\}. \quad (5)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что совокупность подмножеств множества A вида $K(u)$, где $u \in \Omega^*$, образует базу некоторой топологии δ на этом множестве и $K(u) = M(u(a), \delta)$ при всех $u \in \Omega^*$. Убедимся, что $\delta \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$. Для этого покажем, что $f(M(u(a), \delta)) \subseteq M(fu(a), \delta)$ для любой операции $f \in \Omega$ и элемента $u(a) \in A$.

Действительно, если $v(a) = f(w(a))$, где $w(a) \in M(u(a), \delta)$, то $\sigma_w \in M(\sigma_u, \kappa)$ ввиду (5). Поэтому $\sigma_{fw} = \sigma_f \sigma_w \in M(\sigma_f, \kappa)M(\sigma_u, \kappa)$. Однако, $\kappa \in \mathfrak{Z}(S(\mathfrak{A}))$, и значит, $M(\sigma_f, \kappa)M(\sigma_u, \kappa) \subseteq M(\sigma_{fu}, \kappa)$ согласно лемме 1 из [2].

Следовательно, $\sigma_{fw} \in M(\sigma_{fu}, \kappa)$, откуда $fw(a) \in M(fu(a), \delta)$ в силу (5). Применяя снова лемму 1 из [11], получаем, что $\delta \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$. Осталось проверить, что $\varphi(\delta) = \kappa$, то есть

$M(\sigma_u, \kappa) = M(\sigma_u, \varphi(\delta))$ для любого элемента $\sigma_u \in S(\mathfrak{A})$. Действительно, из равенств (1) и (5) следует, что

$$\sigma_v \in M(\sigma_u, \varphi(\delta)) \iff v(a) \in M(u(a), \delta) \iff \sigma_v \in M(\sigma_u, \kappa)$$

для каждого $\sigma_v \in S(\mathfrak{A})$. Таким образом, отображение $\varphi: \mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{Z}(S(\mathfrak{A}))$ — изоморфизм решеток.

Напомним (см. [10]), что унарная алгебра $\mathfrak{A}$ называется сильно связной, если она порождается любым своим элементом. Согласно теореме 1 из [10], характеристическая полугруппа $S(\mathfrak{A})$ коммутативной сильно связной алгебры $\mathfrak{A}$ является абелевой группой.

Теперь, используя результаты из [12], из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Решетка топологий произвольной конечной коммутативной сильно связной алгебры модулярна.*

Следующий пример показывает, что условие конечности алгебры в этом утверждении существенно.

Пример 1. Пусть $\mathbb{C}_Z = \langle \mathbf{Z}, f, g \rangle$ — алгебра с двумя унарными операциями f и g , где $f(z) = z + 1$, $g(z) = z - 1$ для всех $z \in \mathbf{Z}$. Ясно, что эта алгебра коммутативна и сильно связна. Покажем, что решетка $\mathfrak{Z}(\mathbb{C}_Z)$ топологий этой алгебры немодулярна.

Пусть X — множество всех неположительных целых чисел, Y — множество всех четных неотрицательных целых чисел, и $\kappa = t(\mathbf{N}_0)$, $\delta = t(X)$, $\nu = t(Y)$ — топологии на алгебре $\mathbb{C}_Z$, порожденные множествами $\mathbf{N}_0$, X , Y соответственно.

Отсюда следует, что $\mathbf{N}_0 = Y \cup g^{-1}(Y) \in \nu$, и значит, $\kappa \leq \nu$. Убедимся также, что $\kappa \neq \nu$. Для этого проверим, что $Y \notin \kappa$.

Предположим, что $Y \in \kappa$. Из определения операции f в алгебре $\mathbb{C}_Z$ вытекает, что

$$f^m(\mathbf{N}_0) = \{z \in \mathbf{Z} \mid z \geq m\}$$

для любого числа $m \in \mathbf{Z}$. Кроме того, $g^{-1}(U) = f(U)$ для любого множества $U \subseteq \mathbf{Z}$. Поэтому, в силу леммы 1, множество Y является объединением некоторых множеств вида $f^s(\mathbf{N}_0)$, где $s \in \mathbf{Z}$. Учитывая, что $0 \in Y$, получим, что включения $0 \in f^k(\mathbf{N}_0) \subseteq Y$ справедливы для некоторого $k \in \mathbf{Z}$. Это означает, что $k \leq 0$, откуда следует, что $1 \in f^k(\mathbf{N}_0)$, что невозможно, поскольку $1 \notin Y$.

Теперь для доказательства немодулярности решетки $\mathfrak{Z}(\mathbb{C}_Z)$ достаточно установить, что $\kappa \vee (\delta \wedge \nu) = \kappa$ и $(\kappa \vee \delta) \wedge \nu = \nu$.

Проверим, что $\kappa \vee (\delta \wedge \nu) = \kappa$. Для этого заметим, что при любом $k \in \mathbf{Z}$ справедливы равенства

$$f^k(X) = \{z \in \mathbf{Z} \mid z \leq k\}, \quad f^k(Y) = \{z \in \mathbf{Z} \mid z \geq k \text{ \& } z \equiv k \pmod{2}\}.$$

Далее, пусть $T \in \delta \wedge \nu$. Если допустить, что $T \neq \emptyset$ и $T \neq \mathbf{Z}$, то, используя лемму 1, получим, что T бесконечно и ограничено сверху и снизу. Это невозможно. Поэтому $\delta \wedge \nu = 0_{\mathfrak{Z}(\mathbb{C}_Z)}$, и значит, $\kappa \vee (\delta \wedge \nu) = \kappa$.

Покажем, что $\kappa \vee \delta = 1_{\mathfrak{Z}(\mathbb{C}_Z)}$. Из определения топологий κ и δ вытекает, что множество $\{0\} = \mathbf{N}_0 \cap X \in \kappa \vee \delta$. Кроме того, $\{k\} = f^k(\{0\})$ для любого $k \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $\kappa \vee \delta = 1_{\mathfrak{Z}(\mathbb{C}_Z)}$, откуда очевидным образом вытекает равенство $(\kappa \vee \delta) \wedge \nu = \nu$. Таким образом, решетка $\mathfrak{Z}(\mathbb{C}_Z)$ топологий алгебры $\mathbb{C}_Z$ немодулярна.

4. Конечность линейно-упорядоченных решеток топологий коммутативных унарных алгебр

Лемма 2. Если решетка топологий коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ является цепью, то эта алгебра сильно связна.

Доказательство. Допустим, что существует элемент $a \in A$ такой, что $A \neq (a)$. Зафиксируем также произвольный элемент $b \in A \setminus (a)$ и положим

$$\delta_1 = t((a)), \quad \delta_2 = t(\{b\}).$$

Если предположить, что $\delta_1 \leq \delta_2$, то $(a) \in t(\{b\})$, и значит, согласно лемме 1, множество (a) равно объединению некоторых конечных пересечений множеств вида $u^{-1}(\{b\})$, где $u \in \Omega^*$. Поэтому $a \in u_0^{-1}(\{b\})$ для некоторого $u_0 \in \Omega^*$, откуда $b = u_0(a) \in (a)$, что противоречит выбору элемента b .

Пусть теперь $\delta_2 \leq \delta_1$. Тогда $\{b\} \in t((a))$. Отсюда в силу леммы 1 вытекает, что

$$\{b\} = u_1^{-1}((a)) \cap u_2^{-1}((a)) \cap \dots \cap u_k^{-1}((a)),$$

где $k \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in \Omega^*$. Кроме того, $a \in u_1^{-1}((a)) \cap u_2^{-1}((a)) \cap \dots \cap u_k^{-1}((a))$, поскольку $u_1(a), u_2(a), \dots, u_k(a) \in (a)$. Следовательно, $a = b$, что снова противоречит выбору элемента b .

Таким образом, элементы δ_1 и δ_2 решетки $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ не сравнимы между собой, что противоречит условию.

Напомним (см. лемму 2 в [4]), что классы каждой конгруэнции θ алгебры $\mathfrak{A}$ образуют базу некоторой топологии $\tau(\theta)$, которую мы будем называть топологией, индуцированной конгруэнцией θ .

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — сильно связная коммутативная унарная алгебра такая, что $S(\mathfrak{A}) \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ для некоторого простого числа p (через $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, как обычно, обозначается группа типа p^∞). Тогда решетка топологий этой алгебры не является цепью.

Доказательство. Зафиксируем элемент $a \in A$. По условию, для любых $x, y \in A$ найдутся $u, v \in \Omega^*$ такие, что $x = u(a)$, $y = v(a)$. Положим по определению

$$x\theta y \iff \sigma_u^p = \sigma_v^p. \quad (6)$$

Это определение корректно, так как из равенства $w(a) = z(a)$ всякий раз следует, что $\sigma_w = \sigma_z$. Непосредственная проверка показывает, что $\theta \in \text{Con } \mathfrak{A}$.

Убедимся, что элементы $\delta_1 = \tau(\theta)$ и $\delta_2 = t(A \setminus \{a\})$ решетки $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ не сравнимы. Для этого покажем сначала, что $A \setminus \{a\} \notin \delta_1$. Пусть σ_u — произвольный элемент группы $S(\mathfrak{A})$, порядок которого равен p . Тогда $u(a) \in A \setminus \{a\}$ и $(a, u(a)) \in \theta$ в силу (6). Следовательно, $A \setminus \{a\} \notin \tau(\theta) = \delta_1$ по определению топологии, индуцированной конгруэнцией. Это означает, что включение $\delta_2 \subseteq \delta_1$ невозможно.

Если предположить теперь, что $\delta_1 \subseteq \delta_2$, то $[a]_\theta \in \delta_2$, где $[a]_\theta$ — класс конгруэнции θ , содержащий элемент $a \in \mathfrak{A}$. Отсюда, ввиду леммы 2, вытекает, что

$$A \setminus \{u_1(a), u_2(a), \dots, u_k(a)\} = u_1(A \setminus \{a\}) \cap u_2(A \setminus \{a\}) \cap \dots \cap u_k(A \setminus \{a\}) \subseteq [a]_\theta$$

для некоторых $k \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in \Omega^*$, и значит, множество $[a]_\theta$ бесконечно.

С другой стороны, если элемент $u(a) \in [a]_\theta$, то из (6) получаем, что $\sigma_u^p = \sigma_e^p$, где $\sigma_e(a) = e(a) = a$ (то есть σ_e — единица группы $S(\mathfrak{A})$). Следовательно, $\sigma_u^p = \sigma_e$. Поскольку $S(\mathfrak{A}) \cong \mathbf{Z}_{p^\infty}$, в группе $S(\mathfrak{A})$ содержится лишь p элементов, порядок которых равен 1 или p . Кроме того, как уже отмечалось, для любых $w, z \in \Omega^*$ справедлива эквиваленция

$$\sigma_w = \sigma_z \iff w(a) = z(a).$$

Таким образом, $|[a]_\theta| = p$, что противоречит бесконечности множества $[a]_\theta$.

Однопорожденный унар $\langle A, f \rangle$ (то есть алгебра с одной унарной операцией) с порождающим элементом a и определяющим соотношением $a = f^n(a)$, где $n \in \mathbf{N}$, обозначается через C_n^0 и называется циклом длины n .

Теорема 2. *Решетка топологий произвольной коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ есть цепь тогда и только тогда, когда для некоторой операции $f \in \Omega$ редукт $\mathfrak{A}_f = \langle A, f \rangle$ является циклом длины p^k , где p — простое число, $k \in \mathbf{N}_0$.*

Доказательство. Докажем достаточность. Из определений вытекает, что решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ топологий унарной алгебры $\mathfrak{A}$ является подрешеткой решетки топологий каждого ее редукта $\mathfrak{A}_f$, $f \in \Omega$. Следовательно, если $\mathfrak{A}_f \cong C_{p^k}^0$, где $f \in \Omega$, p — простое число и $k \in \mathbf{N}_0$, то $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ — цепь согласно теореме 7 из [4].

Докажем необходимость. Пусть решетка топологий коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A}$ — цепь. Тогда, в силу теоремы 1 из [4], решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ конгруэнций этой алгебры также является цепью. Кроме того, $\mathfrak{A}$ — сильно связная алгебра в силу леммы 2. Отсюда, по теореме 1 из [1], характеристическая полугруппа $S(\mathfrak{A})$ является абелевой группой и $\text{Con } \mathfrak{A} \cong \text{Sub } S(\mathfrak{A})$. Теперь из теоремы Оре (см., напр., [5], с. 276) следует, что группа $S(\mathfrak{A})$ изоморфна либо группе типа p^∞ , либо циклической группе $\mathbf{Z}_{p^k}$ порядка p^k , где $k \in \mathbf{N}_0$ и p — простое число.

Учитывая лемму 3, остается принять, что $S(\mathfrak{A}) \cong \mathbf{Z}_{p^k}$. Наконец, из определения группы $S(\mathfrak{A})$ вытекает, что совокупность элементов вида σ_f , где $f \in \Omega$, является системой порождающих этой группы. Поэтому найдется операция $f \in \Omega$, для которой порядок элемента σ_f равен p^k . Это, в свою очередь, означает, что $\mathfrak{A}_f \cong C_{p^k}^0$.

Из теоремы 2 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 2. *Решетка топологий коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A}$ является цепью тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ — сильно связная алгебра и $\text{Aut } \mathfrak{A} \cong \mathbf{Z}_{p^k}$, где p — простое число, $k \in \mathbf{N}_0$.*

Следствие 3. *Произвольная цепь изоморфна решетке топологий подходящей коммутативной унарной алгебры в том и только том случае, когда она конечна.*

5. Об условиях конечности решеток топологий и конгруэнций коммутативных унарных алгебр

Элементы a и b унарной алгебры $\mathfrak{A}$ называются взаимно достижимыми (см. с. 66 в [15]), если $(a) = (b)$. Очевидно, что отношение взаимной достижимости является эквивалентностью. Класс этой эквивалентности с порождающим элементом a называется слоем этого элемента и обозначается через $L(a)$.

Лемма 4. *Любой неоднородный слой произвольной коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ является подалгеброй некоторого ее редукта $\langle A, \Omega_1 \rangle$, где $\Omega_1 \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $|L(a)| > 1$ для некоторого элемента $a \in A$. Тогда множество

$$\Omega_a = \{u \in \Omega^* \mid u(a) \in L(a)\}$$

содержит хотя бы одно непустое слово. Обозначим через Ω_1 множество всех сигнатурных символов, каждый из которых входит хотя бы в одно слово из Ω_a . Покажем, что $\langle L(a), \Omega_1 \rangle$ — сильно связная подалгебра редукта $\mathfrak{A}_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ алгебры $\mathfrak{A}$.

Для этого убедимся сначала, что $L(a)$ — подалгебра редукта $\mathfrak{A}_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$. Пусть $f \in \Omega_1$ и $b \in L(a)$. Тогда в силу коммутативности алгебры $\mathfrak{A}$ найдется слово $u \in \Omega^*$, для которого $uf(a) \in L(a)$, откуда $(a) = (uf(a))$. Кроме того, нетрудно проверить, что элементы $f(a)$ и $f(b)$ взаимно достижимы.

Следовательно,

$$(a) = (uf(a)) \subseteq (f(a)) = (f(b)) \subseteq (b) = (a),$$

откуда $(f(b)) = (a)$, то есть $f(b) \in L(a)$.

Вторая часть предложения вытекает из того факта, что $(a) = (b)$ для любых элементов $a, b \in L(a)$, и определения множества Ω_1 .

В [16] показано, что условие конечности решетки конгруэнций произвольного унара равносильно конечности самого унара. В дальнейшем в [13] было установлено, что это утверждение справедливо и для решеток топологий унаров. В настоящей работе эти результаты обобщены для произвольных коммутативных унарных алгебр.

Теорема 3. *Решетка конгруэнций коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ конечна тогда и только тогда, когда сама алгебра $\mathfrak{A}$ конечна.*

Доказательство. Предположим, что алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечна, но решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ конечна. Тогда конечной будет и решетка $\text{Sub } \mathfrak{A}$, поскольку она вложима в $\text{Con } \mathfrak{A}$. Кроме того, очевидно, что если $L(x) \neq L(y)$, то $(x) \neq (y)$. Поэтому алгебра $\mathfrak{A}$ имеет лишь конечное число слоев. Отсюда в силу бесконечности алгебры $\mathfrak{A}$ найдется хотя бы один бесконечный слой $L(a)$, $a \in A$. На множестве (a) определим отношение ρ , положив

$$x \rho y \iff (x = y) \vee (\{x, y\} \cap L(a) = \emptyset) \quad (7)$$

для любых $x, y \in (a)$.

Очевидно, что ρ — эквивалентность. Проверим, что ρ — конгруэнция алгебры (a) .

Пусть $f \in \Omega$, $x, y \in (a)$, $x \rho y$ и $x \neq y$. Предположим, что $f(x) \in L(a)$. Тогда $(a) = (f(x)) \subseteq (x)$, откуда следует, что $(a) = (x)$, поскольку $x \in (a)$. Следовательно, $x \in L(a)$ в силу (7), что противоречит неравенству $x \neq y$. Это означает, что $f(x) \notin L(a)$. Аналогично получаем, что $f(y) \notin L(a)$. Таким образом, $f(x) \rho f(y)$.

Покажем, что решетка конгруэнций фактор-алгебры $\mathfrak{B} = (a)/\rho$ бесконечна. По лемме 4, слой $L(a)$ — сильно связная подалгебра некоторого редукта алгебры $\langle (a), \Omega_1 \rangle$, где $\Omega_1 \neq \emptyset$. Убедимся, что решетка конгруэнций алгебры $\mathfrak{L} = \langle L(a), \Omega_1 \rangle$ бесконечна.

По теореме 1 из [1], характеристическая полугруппа $S(\mathfrak{L})$ этой алгебры является бесконечной абелевой группой и $\text{Con } \mathfrak{L} \cong \text{Sub } S(\mathfrak{L})$. Это означает, что решетка $\text{Con } \mathfrak{L}$ бесконечна.

Далее, для любой конгруэнции $\theta \in \text{Con } \mathfrak{L}$ зададим бинарное отношение $\varphi(\theta)$ на носителе алгебры $\mathfrak{B}$ по правилу:

$$[c]_{\rho} \varphi(\theta) [d]_{\rho} \iff (c \rho d) \vee (\{c, d\} \subseteq L(a) \ \& \ (c \theta d)) \quad (8)$$

для любых $c, d \in (a)$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что это определение корректно и $\varphi(\theta)$ — эквивалентность. Покажем, что это отношение стабильно относительно любой операции $f \in \Omega$. Пусть $([x]_{\rho}, [y]_{\rho}) \in \varphi(\theta)$. Если при этом $x \rho y$, то $f(x) \rho f(y)$, и значит, $([f(x)]_{\rho}, [f(y)]_{\rho}) \in \varphi(\theta)$ согласно (8).

Пусть $\{x, y\} \subseteq L(a)$ и $x \theta y$. Тогда $(x) = (a) = (y)$, откуда в силу условия коммутативности алгебры вытекает, что $(f(x)) = (f(y))$. По определению слоя возможны следующие случаи:

$$(1) \ \{f(x), f(y)\} \subseteq L(a),$$

$$(2) \ \{f(x), f(y)\} \cap L(a) = \emptyset.$$

В первом случае $f(x) \theta f(y)$, поскольку $x \theta y$. Отсюда в силу (8) следует, что $([f(x)]_{\rho}, [f(y)]_{\rho}) \in \varphi(\theta)$.

Во втором случае из (7) следует, что $f(x) \rho f(y)$, откуда в силу (8) получаем, что $([f(x)]_{\rho}, [f(y)]_{\rho}) \in \varphi(\theta)$.

Таким образом, соответствие $\theta \rightarrow \varphi(\theta)$ является отображением решетки $\text{Con } \mathfrak{L}$ в решетку $\text{Con } \mathfrak{B}$. В силу (8) оно инъективно. Следовательно, решетка $\text{Con } \mathfrak{B}$ бесконечна, поскольку $\text{Con } \mathfrak{L}$ бесконечна.

Далее, алгебра $\mathfrak{B}$ — фактор-алгебра алгебры (a) , поэтому $|\text{Con } \mathfrak{B}| \leq |\text{Con}(a)|$ (см., напр., с. 61 в [17]). Кроме того, $|\text{Con}(a)| \leq |\text{Con } \mathfrak{A}|$ в силу леммы 1 в [18]. Следовательно, решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ бесконечна.

Из теоремы 3 и теоремы 1 из [4] вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ топологий произвольной коммутативной унарной алгебры конечна тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{A}$ конечна.*

Покажем теперь, что если бесконечная алгебра $\mathfrak{A}$ не является унарной или не коммутативна, то каждая из решеток $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ и $\text{Con } \mathfrak{A}$ может быть конечной. С этой целью докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{C} = \langle C, \cdot \rangle$ — произвольный группоид и Ω — функциональная сигнатура, содержащая хотя бы один символ, арность которого больше 1. Тогда на множестве C можно построить алгебру $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω такую, что $\mathfrak{Z}(\mathfrak{C}) \cong \mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$.*

Доказательство. Интерпретируем на множестве C символы из Ω следующим образом. Пусть $F \in \Omega$ и арность символа F равна t . Положим $F(x) = x$ для любого $x \in C$ при $t = 1$ и $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1 \cdot x_2$ для любых $x_1, x_2, \dots, x_m \in C$ при $t > 1$, где $\cdot$ — операция группоида $\mathfrak{C}$. Непосредственная проверка показывает, что каждая топология на группоиде $\mathfrak{C}$ будет топологией на алгебре $\mathfrak{A} = \langle C, \Omega \rangle$ и, наоборот, всякая топология на алгебре $\mathfrak{A}$ является топологией на группоиде $\mathfrak{C}$.

Теорема 4. *Пусть Ω — произвольная функциональная сигнатура, содержащая хотя бы один символ, арность которого больше 1. Тогда для любого целого числа $n \geq 2$ существует бесконечная алгебра $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω , решетка топологий которой содержит ровно n элементов.*

Доказательство. Согласно лемме 5, достаточно построить для любого целого числа $n \geq 2$ бесконечный группоид с n -элементной решеткой топологий. Зафиксируем произвольное целое число $n \geq 2$ и определим бинарную операцию $*$ на множестве $\mathbf{N}$ по правилу

$$x * y = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{если } y = x + 1 \text{ или } \min\{x, y\} \leq n - 2, \ x \neq y, \\ x + 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Докажем, что решетка $\mathfrak{F}(\mathbb{C})$ группоида $\mathbb{C}_n = \langle \mathbf{N}, * \rangle$ содержит ровно n элементов.

Зафиксируем произвольное число $i \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$. Очевидно, что совокупность подмножеств $\{1\}, \{2\}, \dots, \{i\}, \mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\}$ является базой некоторой топологии δ_i на множестве $\mathbf{N}$. Проверим, что $\delta_i \in \mathfrak{F}(\mathbb{C}_n)$. Действительно, пусть $x * y = z$ для некоторых $x, y, z \in \mathbf{N}$ и U_z — произвольная окрестность элемента z в топологии δ_i . Убедимся, что найдутся окрестности U_x и U_y в топологии δ_i элементов x и y , соответственно, такие, что $U_x * U_y \subseteq U_z$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $x \leq i$ и $y \leq i$, то $\{x\}, \{y\} \in \delta_i$. В этом случае достаточно положить $U_x = \{x\}$ и $U_y = \{y\}$.

В случае $x > i$, $y \leq i$ справедливы равенства $z = x * y = y$ по определению операции $*$. С другой стороны, $\{y\}, \mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\} \in \delta_i$. Полагая $U_x = \mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\}$ и $U_y = \{y\}$, получаем, что $U_x * U_y = \{y\} \subseteq U_z$. Случай $x \leq i$ и $y > i$ рассматривается аналогично.

Наконец, пусть $x > i$, $y > i$. Тогда, поскольку $z \geq \min\{x, y\}$, справедливо неравенство $z > i$, и значит, $\mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\} \subseteq U_z$ по определению топологии δ_i . Используя включение $\mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\} * \mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\} \subseteq \mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\}$, можно положить

$$U_x = U_y = \mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\}.$$

Следовательно, $\delta_i \in \mathfrak{F}(\mathbb{C}_n)$.

Далее через δ_0 и δ_{n-1} обозначим, соответственно, антидискретную и дискретную топологию на группоиде $\mathbb{C}_n$. Очевидно, что $\delta_i \neq \delta_j$ при $i, j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, $i \neq j$. Пусть теперь $\delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{C}_n)$. Проверим, что $\delta \in \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}\}$.

Для этого убедимся сначала в справедливости импликации

$$\{k\} \in \delta \implies \{k - 1\} \in \delta \quad (9)$$

для любого целого числа $k > 1$.

Действительно, ввиду равенства $(k - 1) * (k - 1) = k$ найдутся окрестности U_{k-1} и U'_{k-1} элемента $k - 1$ такие, что $U_{k-1} * U'_{k-1} = \{k\}$. Отсюда следует равенство $U_{k-1} = \{k - 1\}$, поскольку $m * (k - 1) \neq k$ при всех $m \neq k - 1$. Это означает, что $\{k - 1\} \in \delta$.

Предположим теперь, что $\{n - 1\} \in \delta$. Покажем, что в этом случае δ — дискретная топология. В силу (9) получаем, что $\{n - 2\} \in \delta, \{n - 3\} \in \delta, \dots, \{1\} \in \delta$.

Пусть $\{k\} \in \delta$ для некоторого целого числа $k \geq n - 1$. Покажем, что $\{k + 1\} \in \delta$. Действительно, $k * (k + 1) = k$, откуда $U_k * U_{k+1} = \{k\}$ для некоторых окрестностей U_k и U_{k+1} в топологии δ элементов k и $k + 1$, соответственно. Поэтому $\{k + 1\} = U_{k+1} \in \delta$, так как $k * m \neq k$ при всех $m \neq k + 1$. Таким образом, при выполнении соотношения $\{n - 1\} \in \delta$ справедливо включение $\{m\} \in \delta$ при любом $m \in \mathbf{N}$, и значит, $\delta = \delta_{n-1}$.

Пусть $\{n - 1\} \notin \delta$. Докажем, что в этом случае $\delta = \delta_j$ для некоторого числа $j \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$. Для каждого элемента $k \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\}$ через O_k обозначим пересечение всех окрестностей элемента k и докажем включение

$$\mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\} \subseteq O_k. \quad (10)$$

Покажем сначала, что (10) справедливо при $k = n - 1$. Доказательство будем вести индукцией по числу $l \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\}$, начиная с $l = n - 1$. Тогда очевидно, что $n - 1 \in O_{n-1}$. Предположим теперь, что $l \in O_{n-1}$ для некоторого $l \geq n - 1$. Нужно показать, что $l + 1 \in O_{n-1}$. С этой целью зафиксируем произвольную окрестность U элемента $n - 1$ и убедимся, что $l + 1 \in U$.

В силу равенства $(n - 1) * n = n - 1$ найдутся окрестности U_{n-1} и U_n элементов $n - 1$ и n , соответственно, такие, что $U_{n-1} * U_n \subseteq U$. Если $l \neq n - 1$, то $l * n = l + 1$, откуда $l + 1 \in U_{n-1} * U_n \subseteq U$, поскольку по индуктивному предположению $l \in U_{n-1}$.

Пусть $l = n - 1$. Покажем сначала, что $U_n \setminus \{1, 2, \dots, n - 2, n\} \neq \emptyset$. Действительно, допустим, что

$$U_n \subseteq \{1, 2, \dots, n - 2\} \cup \{n\}. \quad (11)$$

Убедимся в том, что $\{1, 2, \dots, n - 2\} \cap O_n \neq \emptyset$. Если предположить, что $1 \notin W_n^1$, $2 \notin W_n^2, \dots, n - 2 \notin W_n^{n-2}$ для некоторых окрестностей $W_n^1, W_n^2, \dots, W_n^{n-2}$ элемента n , то согласно (11) получаем, что $\{n\} = U_n \cap W_n^1 \cap W_n^2 \cap \dots \cap W_n^{n-2} \in \delta$, откуда $\{n - 1\} \in \delta$ в силу (9), что невозможно.

Пусть l — наибольшее число в множестве $\{1, 2, \dots, n - 2\} \cap O_n$ и V_n — произвольная окрестность элемента n . Тогда $l \in V_n$ и ввиду равенства $l * n = l$ найдется окрестность V'_n элемента n такая, что $\{l\} * V'_n \subseteq V_n$, откуда следует, что $l + 1 = l * l \in V_n$. Отсюда вытекает, что $l + 1 \in O_n$, и значит, $l + 1 \notin \{1, 2, \dots, n - 2\}$ в силу выбора элемента l . Следовательно, $n - 1 = l + 1 \in O_n \subseteq U_n$, что противоречит (11). Поэтому $U_n \setminus \{1, 2, \dots, n - 2, n\} \neq \emptyset$. Зафиксируем произвольный элемент $z \in U_n \setminus \{1, 2, \dots, n - 2, n\}$. Снова используя индуктивное предположение и включение $U_{n-1} * U_n \subseteq U$, получаем, что $l + 1 = l * z \in U$, откуда $l + 1 \in O_{n-1}$.

Таким образом, при $k = n - 1$ включение (10) справедливо. Теперь проведем индукцию по числу k . Предположим, что (10) справедливо при некотором $k \geq n - 1$. Докажем, что $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\} \subseteq O_{k+1}$. Пусть $V \in \delta$ и $k + 1 \in V$. Тогда в силу равенства $k * k = k + 1$ найдутся окрестности V_k и V'_k элемента k , для которых $V_k * V'_k \subseteq V$. Так как $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\} * \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\}$, в силу индуктивного предположения $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\} \subseteq V_k * V'_k \subseteq V$. Поэтому $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\} \subseteq O_{k+1}$. Таким образом, включение (10) справедливо для любого числа $k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\}$.

Далее положим

$$\mathfrak{M} = \{X \mid X \in \delta \text{ и } \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n - 2\} \subseteq X\}, \quad M = \bigcap_{X \in \mathfrak{M}} X. \quad (12)$$

Очевидно, что множество $\mathfrak{M}$ конечно, откуда $M \in \delta$. Убедимся теперь, что

$$k \in U \cap M \implies k + 1 \in U \cap M \quad (13)$$

для любых $U \in \delta$ и $k \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$.

Пусть $k \in U \cap M$, где $U \in \delta$ и $k \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$. Тогда $U \cap M \in \delta$, откуда ввиду равенства $k * (n - 1) = k$ следует, что $U_k * U_{n-1} \subseteq U \cap M$ для некоторых окрестностей $U_k, U_{n-1} \in \delta$ элементов k и $n - 1$, соответственно. В силу (10) получаем, что $U_{n-1} \in \mathfrak{M}$, и значит, $M \subseteq U_{n-1}$ согласно (12). Поэтому $k \in M \subseteq U_{n-1}$.

Следовательно,

$$k + 1 = k * k \in U_k * U_{n-1} \subseteq U \cap M.$$

Таким образом, соотношение (13) справедливо для любого $U \in \delta$ и любого числа $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$. Пусть j — наименьшее число в множестве M и $i = j-1$. Из (12) вытекает, что $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. Покажем, что $\delta = \delta_i$. Для этого проверим, что

$$M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\}. \quad (14)$$

Действительно, если $l \in M$, то $l \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\}$ в силу выбора числа i , и значит, $M \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\}$. Докажем обратное включение. Пусть $l \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\}$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $l > n-2$, то $l \in M$ ввиду (12). Если $l = i+1$, то $l \in M$ в силу выбора числа i . Наконец, пусть $i+1 < l \leq n-2$. Тогда, последовательно применяя импликацию (13), получаем, что $l \in M$. Таким образом, $M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, i\}$.

Проверим, что $\{x\} \in \delta$ для любого $x \in \{1, 2, \dots, i\}$. Поскольку $i * i = i+1$ и в силу (14) множество M является окрестностью элемента $i+1$, существуют окрестности U_i и U'_i элемента i такие, что $U_i * U'_i \subseteq M$. Если допустить, что множество U_i содержит некоторый элемент $m \neq i$, то $m * i \leq i$. Это противоречит равенству (14), так как $m * i \in M$. Следовательно, $\{i\} = U_i \in \delta$. Теперь из (9) вытекает, что $\{x\} \in \delta$ для любого целого числа $x \in \{1, 2, \dots, i\}$. Отсюда, используя (14), заключаем, что $\delta_i \subseteq \delta$ по определению топологии δ_i .

Зафиксируем множество $U \in \delta$. Если при этом $U \cap M = \emptyset$, то $U \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$ ввиду (14), и значит, $U \in \delta_i$. Пусть теперь $U \cap M \neq \emptyset$. Тогда $n-1 \in U \cap M$ в силу (13), откуда согласно (10) получаем, что

$$\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n-2\} \subseteq O_{n-1} \subseteq U.$$

Поэтому $M \subseteq U$ ввиду (12). Это означает, что $U \in \delta_i$ по определению топологии δ_i . Следовательно, $\delta = \delta_i$. Таким образом, $|\mathfrak{Z}(\mathbb{C}_n)| = n$.

Далее заметим, что топологии $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$, построенные в доказательстве теоремы 4, попарно сравнимы. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 5. Пусть Ω — произвольная функциональная сигнатура, содержащая хотя бы один символ, арность которого больше 1. Тогда для любого целого числа $n \geq 2$ существует бесконечная алгебра $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω , решетка топологий которой является n -элементной цепью.

Теорема 5. Пусть Ω — произвольная функциональная сигнатура, содержащая не менее трех унарных символов. Тогда существует бесконечная алгебра $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω , решетка топологий которой двухэлементна, то есть состоит только из дискретной и антидискретной топологий.

Доказательство. Зафиксируем три унарных символа $f, g, h \in \Omega$. Для каждого $x \in \mathbb{Z}$ положим $f(x) = x+1$, $g(x) = x-1$ и

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Если $F \in \Omega \setminus \{f, g, h\}$ и m — арность символа F , то для любых $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{Z}$ положим $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1$. Докажем, что решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, \Omega \rangle$ двухэлементна. Пусть $\delta \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$. Если $\{0\} \in \delta$, то топология δ дискретна, поскольку $\{k\} = g^{-k}(\{0\}) \in \delta$ для любого положительного $k \in \mathbb{Z}$ и $\{k\} = f^{-k}(\{0\}) \in \delta$ для любого отрицательного $k \in \mathbb{Z}$.

Предположим, что $\{0\} \notin \delta$. Проверим, что в этом случае топология δ антидискретна. Для этого покажем сначала, что

$$0 \in U \iff 1 \in U \quad (15)$$

для любого $U \in \delta$.

Действительно, если $0 \in U$, то используя равенство $h(0) = 0$, получаем, что $h(U_0) \subseteq U$, где U_0 — подходящая окрестность точки 0 в топологии δ . Кроме того, $U_0 \neq \{0\}$, так как $\{0\} \notin \delta$. Поэтому $1 \in U$ в силу определения функции h .

Пусть теперь $1 \in U$. Тогда в силу равенства $h(-1) = 1$ найдется окрестность U_{-1} элемента -1 такая, что $h(U_{-1}) \subseteq U$. С другой стороны, $0 \in g^{-1}(U_{-1})$, так как $g(0) = -1 \in U_{-1}$, откуда по предыдущему $1 \in g^{-1}(U_{-1})$, и значит, $0 = g(1) \in U_{-1}$. Следовательно, $0 \in h(U_{-1}) \subseteq U$.

Покажем теперь, что

$$0 \in U \implies U = \mathbf{Z} \quad (16)$$

для любого $U \in \delta$.

Действительно, предположим, что существует такое множество $U \in \delta$, что $0 \in U$ и $U \neq \mathbf{Z}$. Пусть $\mathbf{N} \setminus U \neq \emptyset$ и n — наименьшее число в множестве $\mathbf{N} \setminus U$. Из соотношения $f^{n-1}(0) = n - 1 \in U$ следует, что $0 \in f^{-(n-1)}(U)$, откуда $1 \in f^{-(n-1)}(U)$ в силу (15). Поэтому $n = f^{n-1}(1) \in U$, что противоречит выбору числа n .

Если $\mathbf{N} \setminus U = \emptyset$, то $\bar{\mathbf{N}} \setminus U \neq \emptyset$, где

$$\bar{\mathbf{N}} = \{-k \mid k \in \mathbf{N}\}.$$

Обозначим через m наименьшее натуральное число такое, что $-m \in \bar{\mathbf{N}} \setminus U$. Тогда

$$g^m(1) = 1 - m = -(m - 1) \in U,$$

то есть $1 \in g^{-m}(U)$. Поэтому $0 \in g^{-m}(U)$ в силу (15), и значит, $-m \in U$, что противоречит выбору числа m .

Пусть теперь $X \in \delta$, $X \neq \emptyset$ и $x \in X$. Тогда $0 \in f^{-x}(X)$ при $x \geq 0$ и $0 \in g^{-x}(X)$ при $x < 0$. Отсюда в силу (16) либо $f^{-x}(X) = \mathbf{Z}$, либо $g^{-x}(X) = \mathbf{Z}$. Это означает, что $X = \mathbf{Z}$. Таким образом, $\delta = \{\emptyset, \mathbf{Z}\}$. Следовательно,

$$|\mathfrak{S}(\mathfrak{X})| = 2.$$

Список литературы

1. Мальцев А. И., *Алгебраические системы*. Наука, Москва, 1970.
2. Kilp M., Knauer U., Michalev A. V., Skornjakov L. A., *Acts over monoids. A bibliographical survey of publications 1975–1981*. Bibliotheks und Informationssystem der Universität Oldenburg, Oldenburg, 1982.
3. Skornjakov L. A., Unars. *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai* (1982) **29**, 735–743.
4. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V., *Acts and categories*. Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
5. Смирнов Д. М., О соответствии между регулярно определяемыми многообразиями унарных алгебр и полугруппами. *Алгебра и логика* (1978) **17**, №4, 468–477.
6. Кожухов И. Б., Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны. *Фунд. прикл. матем.* (1988) **4**, №4, 1335–1344.

7. Понтрягин Л. С., *Непрерывные группы*. Наука, Москва, 1973.
8. Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V., *Introduction to topological rings and modules*. Marcel Dekker, New York, 1996.
9. Карташова А. В., Бесконечные алгебры с конечной решеткой топологий. В сб.: *Тез. докл. Укр. матем. конгресса. Секция алгебры и теории чисел*, **27**, Киев, 2001.
10. Ésik Z., Imreh B., Remarks on finite commutative automata. *Acta Cybern.* (1981) **5**, №3, 143–146.
11. Карташова А. В., Аналог теоремы Маккензи для решеток топологий конечных алгебр. *Фунд. прикл. матем.* (2005) **11**, №3, 109–117.
12. Šmarda B., The lattice of topologies of topological l -groups. *Czech. Math. J.* (1976) **26**, №1, 128–136.
13. Kartashova A. V., On lattices of topologies of unary algebras. *J. Math. Sci.* (2003) **114**, №2, 1086–1118.
14. Курош А. Г., *Теория групп*. Физматлит, Москва, 1967.
15. Богомолов А. М., Салий В. Н., *Алгебраические основы теории дискретных систем*. Физматлит, Москва, 1997.
16. Kopeček O., A note on some cardinal functions on unary algebras. In: *Contributions to General Algebra*, **2** (Eigenthaler G., Kaiser H. K., Müller W. B., Nöbauer W., eds.). Teubner, Stuttgart, 1983, pp. 221–227.
17. Grätzer G., *Universal algebra*. Springer, Berlin, 1979.
18. Berman J., On the congruence lattices of unary algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1972) **36**, №1, 34–38.

Статья поступила 30.10.2007.

Переработанный вариант поступил 13.12.2007.