Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кольца, над которыми все конечно порожденные модули $\aleph_0$ -инъективны, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 4, 76–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1072>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:27:10

Кольца, над которыми все конечно порожденные модули $\aleph_0$ -инъективны

© 2009 г. А. А. Туганбаев

Доказано, что все конечно порожденные правые A -модули $\aleph_0$ -инъективны в точности тогда, когда A — $\aleph_0$ -инъективное справа регулярное кольцо.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, модули предполагаются унитарными. Хорошо известен следующий результат.

Теорема А ([4]). *Для кольца A равносильны условия:*

- (1) *все конечно порожденные правые A -модули инъективны;*
- (2) *A — полупростое кольцо.*

Пусть M — правый модуль над кольцом A и $\aleph$ — кардинальное число. Модуль M называется $\aleph$ -инъективным, если для любого $\aleph$ -порожденного правого идеала B кольца A каждый гомоморфизм $B_A \rightarrow M$ продолжается до гомоморфизма $A_A \rightarrow M$. Кольцо A называется регулярным (по фон Нейману), если $a \in aAa$ для любого элемента $a \in A$.

Основным результатом данной работы является теорема 1.

Теорема 1. *Для кольца A равносильны условия:*

- (1) *все конечно порожденные правые A -модули $\aleph_0$ -инъективны;*
- (2) *A — регулярное кольцо и в A для любого счетного множества $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортогональных идемпотентов и каждого счетного множества $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов найдется такой элемент $a \in A$, что $ae_i = a_i e_i$ для всех i .*

Замечание 1. В связи с теоремой А и теоремой 1 заметим, что существуют неартиновы кольца A , удовлетворяющие теореме 1. Например, можно взять

$$A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i,$$

где все A_i — поля (см. лемму 3 данной работы).

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведем необходимые определения и обозначения.

Модуль M называется полупростым, если все его подмодули являются прямыми слагаемыми в M . Ненулевые полупростые модули совпадают с прямыми суммами простых

модулей. Полупростые справа (слева) кольца совпадают с кольцами вида $A_1 \times \dots \times A_n$, где каждое кольцо A_i изоморфно кольцу матриц над некоторым телом. Модуль M называется регулярным, если все его конечно порожденные подмодули являются прямыми слагаемыми в M . Кольцо A является регулярным в точности тогда, когда модуль A_A (A_A) регулярен. Регулярные кольца, в которых все идемпотенты центральны, называются строго регулярными. Кольцо A строго регулярно в точности тогда, когда $a \in a^2 A$ ($a \in Aa^2$) для любого элемента $a \in A$. Модуль M называется проективным, если для любого модульного эпиморфизма $h: X \rightarrow \bar{X}$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}: M \rightarrow \bar{X}$ существует такой гомоморфизм $f: M \rightarrow X$, что $\bar{f} = hf$. Модуль M называется инъективным, если для любого модульного мономорфизма $h: \bar{X} \rightarrow X$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow M$ существует такой гомоморфизм $f: X \rightarrow M$, что $\bar{f} = fh$.

Лемма 1. Пусть A — кольцо и $\aleph$ — кардинальное число.

- (1) Если $\{M_i\}_{i \in I}$ — некоторое множество $\aleph$ -инъективных правых A -модулей, то $\prod_{i \in I} M_i$ — $\aleph$ -инъективный модуль.
- (2) Если все $\aleph$ -порожденные правые идеалы кольца A проективны, то все гомоморфные образы любых прямых произведений $\aleph$ -инъективных правых A -модулей $\aleph$ -инъективны.
- (3) Если кольцо A $\aleph$ -инъективно справа и все $\aleph$ -порожденные правые идеалы кольца A проективны, то все конечно порожденные правые A -модули $\aleph$ -инъективны.

Доказательство. 1. Пусть $\pi_i: \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ — естественные проекции, $\aleph$ — кардинальное число, B — $\aleph$ -порожденный правый идеал кольца A и $f: B \rightarrow M$ — гомоморфизм правых A -модулей. Так как все модули M_i $\aleph$ -инъективны, то гомоморфизмы $\pi_i f: B \rightarrow M_i$ продолжаются до гомоморфизмов $g_i: A_A \rightarrow M_i$. Тогда гомоморфизм $\prod_{i \in I} g_i: A_A \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ — продолжение гомоморфизма f . Поэтому $\prod_{i \in I} M_i$ — $\aleph$ -инъективный модуль.

2. Пусть $\{M_i\}_{i \in I}$ — некоторое множество $\aleph$ -инъективных правых A -модулей, $M = \prod_{i \in I} M_i$, $h: M \rightarrow \bar{M}$ — эпиморфизм, B — $\aleph$ -порожденный правый идеал в A и $\bar{f}: B \rightarrow \bar{M}$ — гомоморфизм правых A -модулей. Так как B — проективный A -модуль, то $\bar{f} = hf$ для некоторого гомоморфизма $f: B_A \rightarrow M$. По п. 1 M — $\aleph$ -инъективный правый A -модуль. Поэтому гомоморфизм f продолжается до некоторого гомоморфизма $g: A_A \rightarrow M$. Тогда $hg: A_A \rightarrow \bar{M}$ — продолжение гомоморфизма $\bar{f}$. Поэтому модуль $\bar{M}$ $\aleph$ -инъективен.

Пусть M — конечно порожденный правый A -модуль. Существует такое конечное множество $\{A_i\}_{i=1}^n$ изоморфных копий свободного циклического модуля A_A , что M — гомоморфный образ модуля $\bigoplus_{i=1}^n A_i$. Так как

$$\bigoplus_{i=1}^n A_i = \prod_{i=1}^n A_i,$$

то по п. 2 M — $\aleph$ -инъективный модуль.

Лемма 2 ([3, 2.14, 2.15]). Пусть A — регулярное кольцо и B — $\aleph_0$ -порожденный правый идеал в A . Тогда правый A -модуль B проективен и существует такое счетное множество $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ ортогональных идемпотентов кольца A , что

$$B = \bigoplus_{i=1}^\infty e_i A.$$

Лемма 3. Для кольца A равносильны условия:

- (1) все конечно порожденные правые A -модули $\aleph_0$ -инъективны;
- (2) все циклические правые A -модули $\aleph_0$ -инъективны;
- (3) A — $\aleph_0$ -инъективное справа регулярное кольцо;
- (4) кольцо A изоморфно прямому произведению $\aleph_0$ -инъективных справа регулярных колец.

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (3) $\Rightarrow$ (4) очевидны.

(2) $\Rightarrow$ (3). Так как модуль A_A циклический, то по (2) кольцо A $\aleph_0$ -инъективно справа. Пусть $a \in A$ и $f: aA \rightarrow aA \subseteq A$ — тождественное отображение. Так как циклический модуль aA $\aleph_0$ -инъективен, то f продолжается до гомоморфизма $g: A_A \rightarrow aA$. Тогда $aA = g(A)$, $g^2 = g$, aA — прямое слагаемое модуля A_A , и кольцо A регулярно.

(4) $\Rightarrow$ (3). Так как кольцо A изоморфно прямому произведению регулярных колец, то A регулярно. С помощью леммы 1 (1) проверяется, что A — $\aleph_0$ -инъективное справа кольцо.

(3) $\Rightarrow$ (1). По лемме 2 все $\aleph_0$ -порожденные правые идеалы кольца A проективны. По лемме 1 (3) все конечно порожденные правые A -модули $\aleph_0$ -инъективны.

Лемма 4. Для регулярного кольца A равносильны условия:

- (1) A — $\aleph_0$ -инъективное справа кольцо;
- (2) в A для любого счетного множества $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортогональных идемпотентов и каждого счетного подмножества $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ найдется такой элемент $a \in A$, что $ae_i = a_i e_i$ для всех i .

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Существует такой гомоморфизм $f: \bigoplus_{i=1}^{\infty} e_i A \rightarrow A_A$, что $f(\sum e_i x_i) = \sum a_i e_i x_i$. По условию, f продолжается до гомоморфизма $g: A_A \rightarrow A_A$. Обозначим $a = g(1)$. Тогда $ae_i = a_i e_i$ для всех i .

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть B — $\aleph_0$ -порожденный правый идеал кольца A и $f: B \rightarrow A$ — гомоморфизм правых A -модулей. По лемме 2 существует такое счетное множество $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортогональных идемпотентов кольца A , что

$$B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} e_i A.$$

Обозначим $a_i = f(e_i)$. Тогда

$$f(e_i) = f(e_i)e_i = a_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

По (2) найдется такой элемент $a \in A$, что $ae_i = a_i e_i = f(e_i)$ для всех i . Определим гомоморфизм $g: A_A \rightarrow A_A$ равенством $g(x) = ax$, $x \in A$. Пусть

$$b = \sum_{i=1}^n e_i x_i \in B, \quad x_i \in A.$$

Тогда

$$g(b) = ab = \sum_{i=1}^n ae_i x_i = \sum_{i=1}^n f(e_i)x_i = f(b).$$

Поэтому g — продолжение f и кольцо A $\aleph_0$ -инъективно справа.

Теорема 1 вытекает из леммы 3 и леммы 4.

Если в теореме 1 заменить конечно порожденные модули на $\aleph_0$ -порожденные, то придем к полупростым кольцам.

Замечание 2. Для кольца A равносильны условия:

- (1) все $\aleph_0$ -порожденные правые A -модули $\aleph_0$ -инъективны;
- (2) в кольце A все $\aleph_0$ -порожденные правые идеалы $\aleph_0$ -инъективны;
- (3) A — регулярное кольцо без бесконечных множеств ортогональных идемпотентов;
- (4) A — полупростое кольцо;
- (5) все правые A -модули и все левые A -модули инъективны и проективны.

Доказательство. Эквивалентность условий (3), (4) и (5) хорошо известна (см. [2, 19.26A] и [1, 8.2.2]). Импликации (4) $\Rightarrow$ (1) и (1) $\Rightarrow$ (2) очевидны.

(2) $\Rightarrow$ (3). По теореме 1 кольцо A регулярно. Допустим, что A содержит некоторое бесконечное множество $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ненулевых ортогональных идемпотентов. Обозначим через E правый идеал $\bigoplus_{i=1}^{\infty} e_i A$ кольца A . Пусть $f: B \rightarrow B \subseteq A$ — тождественное отображение. Так как $\aleph_0$ -порожденный правый идеал B $\aleph_0$ -инъективен, то f продолжается до гомоморфизма $g: A_A \rightarrow B$. Тогда $B = g(A)$, $g^2 = g$, B — прямое слагаемое модуля A_A и кольцо A полупросто.

Наша следующая цель — показать, что $\aleph_0$ -инъективные справа регулярные кольца совпадают с $\aleph_0$ -алгебраически компактными справа регулярными кольцами (см. предложение 1 ниже).

Пусть M — правый модуль над кольцом A и $L(a_{ij}, m_i, M_A)$ — система из счетного числа линейных уравнений $\left\{ \sum_{j=0}^{t(i)} x_j a_{ij} = m_i \right\}_{i=0}^{\infty}$ с коэффициентами $a_{ij} \in A$ от счетного числа неизвестных $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$, принимающих значения в M , причем любая конечная подсистема этой системы разрешима. Такая система $L(a_{ij}, m_i, M_A)$ называется счетной конечно разрешимой системой. Правый A -модуль M называется $\aleph_0$ -алгебраически компактным, если любая счетная конечно разрешимая система $L(a_{ij}, m_i, M_A)$ имеет решение в M .

Лемма 5. Для правого модуля M над кольцом A равносильны условия:

- (1) M — $\aleph_0$ -алгебраически компактный модуль;
- (2) для любой счетной конечно разрешимой системы $L(a_{ij}, m_i, M_A) = L$ найдется такой элемент $y_0 \in M$, что каждая конечная подсистема L^* в L имеет частное решение $\bar{y}^* = \{y_0, y_1^*, \dots\}$, где y_0 зависит только от системы L .

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) проверяется непосредственно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Необходимо доказать существование решения $\bar{y} = \{y_0, y_1, \dots\}$ системы L . Существование элементов $y_n \in M$ докажем по индукции. По условию y_0 существует. Допустим, что $y_0, \dots, y_n$ найдены. Рассмотрим систему

$$N \equiv \left\{ \sum_{j=n+1}^{t(i)} x_j a_{ij} = m_i - \sum_{j=0}^n y_j a_{ij} \right\}_{i=0}^{\infty}.$$

По условию, примененному к N и неизвестному x_{n+1} , найдется $y_{n+1} \in M$, для которого любая конечная подсистема N^* в N имеет решение $\bar{z}^* \equiv \{y_{n+1}, y_{n+2}^*, \dots\}$, где y_{n+1} зависит от системы N , но y_{n+1} не меняется при переходе к другой конечной подсистеме из N . Докажем, что $\bar{y} \equiv \{y_0, y_1, \dots\}$ — требуемое решение системы L . Достаточно доказать, что $\bar{y}$ — решение любой конечной подсистемы L^* из L . Подсистема L^* содержит лишь конечное число неизвестных $x_0, \dots, x_n$. Из способа выбора последовательности $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ следует существование такого решения $\bar{y}^*$ системы L^* , что $y_0, \dots, y_n \in M$ — первые $n+1$ компонент этого решения. Поэтому $\bar{y}$ — решение системы L^* .

Предложение 1. Для регулярного кольца A равносильны условия:

- (1) A — $\aleph_0$ -инъективное справа кольцо;
- (2) A — $\aleph_0$ -алгебраически компакное справа кольцо.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть L — такая счетная конечно разрешимая система $\left\{ \sum_{j=0}^{t(i)} x_j a_{ij} = m_i \right\}_{i=0}^{\infty}$, что $a_{ij} \in A$, $m_i \in A$, и для любого $n \geq 0$ конечная подсистема

$$L_n \equiv \left\{ \sum_{j=0}^{t(i)} x_j a_{ij} = m_i \right\}_{i=0}^n$$

в L имеет частное решение $\overline{x(n)} = \{x_j(n)\}_{j=0}^{m(n)}$, где

$$m(n) = \max_{0 \leq i \leq n} \{t(i)\}.$$

По лемме 4 достаточно доказать существование такого множества $\{\overline{y(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ частных решений системы L_n , что $\overline{y(n)} = \{b, y_1(n), y_2(n), \dots\}$, где b зависит только от L и не меняется с изменением n . Зафиксируем число n . Пусть

$$H_n \equiv \left\{ \sum_{j=0}^{t(i)} x_j a_{ij} = 0 \right\}_{i=0}^n$$

— однородная конечная система, соответствующая неоднородной системе L_n , G_n — множество всех решений системы H_n , и T_n — левый идеал в A , порожденный всеми первыми компонентами из G_n . Тогда G_n — ядро эндоморфизма h свободного левого A -модуля F ранга $m(n)$. Модуль F регулярен (см. [3, 2.11]). Поэтому $h(F)$ — прямое слагаемое в F и модуль G_n конечно порожден, поскольку модуль G_n изоморфен прямому слагаемому конечно порожденного модуля F . Левый идеал T_n регулярного кольца A — гомоморфный образ модуля G_n и поэтому конечно порожден. Тогда $A = T_n \oplus Af_n$, где f_n — идемпотент. Будем менять n . Так как $T_n \supseteq T_{n+1}$, то найдется такой идемпотент e_{n+1} , что

$T_n = T_{n+1} \oplus Ae_{n+1}$ и $f_n = f_{n+1} + e_{n+1}$. Обозначим $e_0 = f_0$. Тогда $\{e_i\}_{i=0}^\infty$ — счетное множество ортогональных идемпотентов и $f_n = \sum_{i=0}^n e_i$ при $n \geq 0$. Обозначим $a_i = x_0(i) \in A$. Тогда $a_i - a_n \in T_i$ при $i \leq n$, поскольку $\overline{x(i)} - \overline{x(n)} \in H_i$. Поэтому $a_i f_i = a_n f_i$ при $i \leq n$. По теореме 1 найдется элемент $b \in A$, для которого $be_i = a_i e_i$ для всех i . Тогда

$$(b - a_n)f_n = \sum_{i=0}^n (b - a_n)e_i = \sum_{i=0}^n (b - a_i)e_i = 0,$$

$$(b - a_n)(1 - f_n) = b - a_n, \quad b - a_n \in T_n.$$

Поэтому для всех i найдется такое решение $\overline{z(n)} = \{z_j(n)\}_{j=0}^{m(n)}$ однородной системы H_n , что $b = a_n + z_0(n)$. Если $\overline{y(n)}$ — сумма решения $\overline{x(n)}$ неоднородной системы L_n и решения $\overline{z(n)}$ однородной системы H_n , то $\overline{y(n)}$ — решение неоднородной системы L_n и $\overline{y(n)} = \{b, y_1(n), y_2(n), \dots\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). В силу теоремы 1, нам достаточно доказать, что счетная система $L = \{xe_i = a_i e_i\}_{i=1}^\infty$ конечно разрешима. Это равносильно тому, что конечная система $L_n = \{xe_i = a_i e_i\}_{i=1}^n$ разрешима для любого n . Так как все идемпотенты e_i ортогональны, то $\sum_{i=0}^n a_i e_i$ — частное решение системы L_n .

Список литературы

1. Каш Ф., *Модули и кольца*. Мир, Москва, 1981.
2. Фейс К., *Алгебра: кольца, модули и категории*, 2. Мир, Москва, 1979.
3. Goodearl K. R., *Von Neumann regular rings*. Pitman, London, 1979.
4. Osofsky B. L., Rings all of whose finitely generated modules are injective. *Pacific J. Math.* (1964) **14**, 645–650.

Статья поступила 16.06.2009.