Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Платонов, С. П. Струнков, О некоторых уравнениях, связанных с *tpp*-группами, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 4, 82–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1073>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 04:32:10

О некоторых уравнениях, связанных с *tpp*-группами

© 2009 г. В. П. Платонов, С. П. Струнков

В работе найдены формулы для чисел решений уравнений на конечных группах, в терминах которых естественным образом определяются *tpp*-группы, играющие важную роль в теории быстрых умножений матриц.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-01-00572а.

Пусть G — конечная группа и S — некоторое ее подмножество. Через $Q(S)$ обозначается множество правых частных множества S , то есть

$$Q(S) = \{s's''^{(-1)} \mid s', s'' \in S\}.$$

Конечная группа G называется *tpp*-группой относительно упорядоченной тройки своих подмножеств U, V, W , если для любых элементов $u \in Q(U), v \in Q(V), w \in Q(W)$, из равенства $uvw = 1$ вытекают три равенства $u = 1, v = 1, w = 1$. Впервые *tpp*-группы появились в работах [1, 2], они образовали основу теоретико-группового подхода к проблеме быстрых умножений матриц. Поэтому изучение *tpp*-групп и связанных с ними объектов и конструкций является важной проблемой.

Пусть G — конечная группа, U, V, W — некоторая упорядоченная тройка ее подмножеств. Рассмотрим уравнение на группе G

$$(uvw)^x = g, \tag{1}$$

в котором неизвестными являются упорядоченные четверки элементов $u \in Q(U), v \in Q(V), w \in Q(W), x \in G$. Обозначим через $\zeta(g), g \in G$, число решений этого уравнения. Если для некоторого элемента $g \in G$ уравнение (1) не имеет решений, то $\zeta(g)$ полагается равным нулю. Легко видеть, что четверка U, V, W, G определяет *tpp*-группу тогда и только тогда, когда $\zeta(1) = |G|$. Нашей целью будет доказательство следующей формулы для функции $\zeta(g)$.

Теорема 1. Пусть $\chi_1, \dots, \chi_r$ — множество всех различных неприводимых комплексных характеров группы G . Тогда

$$\zeta(g) = \sum_{s=1}^r \left(\sum_{\substack{u \in Q(U) \\ v \in Q(V) \\ w \in Q(W)}} \chi_s(uvw) \right) \chi_s(g).$$

Доказательство. Пусть $u \in Q(U)$, $v \in Q(V)$, $w \in Q(W)$, $x \in G$ — решение уравнения $(uvw)^x = g$, и пусть g_1 — некоторый элемент группы G , сопряженный элементу g . Тогда для некоторого $a \in G$

$$g_1 = g^a = a^{-1}(uvw)^x a = u^{xa} v^{xa} w^{xa}.$$

Следовательно, функция $\zeta(g)$ постоянна на классах сопряженных элементов группы G и поэтому представляется в виде

$$\zeta(g) = \sum_{s=1}^r \alpha_s \chi_s(g).$$

Пусть $g \rightarrow M_s(g)$ — неприводимое комплексное представление группы G , где $M_s(g)$ — линейные операторы в пространстве представления. Тогда легко видеть, что оператор $\sum_{x \in G} M_s((uvw)^x)$ перестановочен со всеми операторами $M_s(g)$ и, следовательно, по лемме Шура

$$\sum_{x \in G} M_s((uvw)^x) = \lambda E \quad (2)$$

для некоторого числа λ , где E — тождественный оператор. Перейдем к следам в левой и правой части последнего равенства. Тогда

$$|G| \chi_s(uvw) = \lambda \chi_s(1).$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda = \frac{|G|}{\chi_s(1)} \chi_s(uvw).$$

Теперь для операторов равенство (2) имеет следующий вид:

$$\sum_{\substack{u \in Q(U) \\ v \in Q(V) \\ w \in Q(W)}} \sum_{x \in G} M_s((uvw)^x) = \sum_{\substack{u \in Q(U) \\ v \in Q(V) \\ w \in Q(W)}} \lambda E = \frac{|G|}{\chi_s(1)} \sum_{\substack{u \in Q(U) \\ v \in Q(V) \\ w \in Q(W)}} \chi_s(uvw) E.$$

Переходим в этом равенстве к следам слева и справа, получаем следующее равенство:

$$\sum_{x \in G} \sum_{\substack{u \in Q(U) \\ v \in Q(V) \\ w \in Q(W)}} \chi_s((uvw)^x) = |G| \sum_{\substack{u \in Q(U) \\ v \in Q(V) \\ w \in Q(W)}} \chi_s(uvw). \quad (3)$$

С другой стороны, левую сторону предыдущего равенства можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{x \in G} \sum_{\substack{u \in Q(U) \\ v \in Q(V) \\ w \in Q(W)}} \chi_s((uvw)^x) = \sum_{g \in G} \zeta(g) \chi_s(g) = |G| (\zeta(g), \chi_s(g^{-1})). \quad (4)$$

Равенство (4) вытекает из того, что для каждого элемента $g \in G$ справедливы $\zeta(g)$ равенств

$$(u_{i_k} v_{j_k} w_{l_k})^{x_{m_k}} = g, \quad k = 1, 2, \dots, \zeta(g).$$

Сумма всех таких слагаемых в левой части равенства (4), очевидно, равна $\zeta(g)\chi_s(g)$. Из (4) и (3) получаем для скалярного произведения равенство

$$(\zeta(g), \chi_s(g^{-1})) = \sum_{\substack{u \in Q(U) \\ v \in Q(V) \\ w \in Q(W)}} \chi_s(uvw).$$

Но тогда из соотношений ортогональности для неприводимых комплексных характеров коэффициент α_s при $\chi_s(g)$ в разложении функции $\zeta(g)$ по системе неприводимых комплексных характеров $\chi_1(g), \dots, \chi_r(g)$ равен $\sum_{\substack{u \in Q(U) \\ v \in Q(V) \\ w \in Q(W)}} \chi_s(uvw)$, то есть

$$\zeta(g) = \sum_{s=1}^r \left(\sum_{\substack{u \in Q(U) \\ v \in Q(V) \\ w \in Q(W)}} \chi_s(uvw) \right) \chi_s(g).$$

Тем самым теорема доказана.

Список литературы

1. Cohn H., Umans C., A group-theoretic approach to fast matrix multiplication. In: *FOCS'2003*, pp. 438–449.
2. Cohn H., Kleinberg R., Szegedy B., Umans C., Group-theoretic algorithms for matrix multiplication. In: *FOCS'2005*, pp. 379–388.

Статья поступила 19.12.2008.