Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Ильев, Задачи на системах независимости, разрешимые жадным алгоритмом, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 4, 85–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1074>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 09:46:40

Задачи на системах независимости, разрешимые жадным алгоритмом

© 2009 г. В. П. Ильев

Одним из центральных результатов теории матроидов является известная теорема Радо–Эдмондса, утверждающая, что задача максимизации аддитивной функции на системе независимости разрешима жадным алгоритмом тогда и только тогда, когда система независимости является матроидом.

Многочисленные обобщения теоремы Радо–Эдмондса в основном были связаны с расширением множества допустимых решений задачи максимизации, как правило, система независимости заменялась на систему достижимости. Расширение класса целевых функций также сопровождалось расширением допустимой области.

В настоящей работе исследуются задачи максимизации неаддитивных функций множеств на системах независимости. Предложена характеристика класса целевых функций задач на матроидах, разрешимых жадным алгоритмом. Доказано обобщение теоремы Радо–Эдмондса для задачи максимизации на системе независимости неаддитивной функции из указанного класса.

1. Введение

Объектом нашего исследования будут задачи максимизации вида

$$\max\{f(X): X \in \mathcal{A}\}, \quad (1)$$

где $\mathcal{A}$ — непустое семейство подмножеств конечного множества U , а

$$f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$$

— монотонная неотрицательная функция множеств. Пару $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ будем называть системой множеств. Множества семейства $\mathcal{A}$ называются допустимыми.

Чаще всего в приложениях в качестве множества допустимых решений задачи (1) фигурируют системы независимости, обладающие тем свойством, что в них любое подмножество допустимого множества само допустимо. Как правило, в этих задачах требуется найти базу максимального веса, то есть максимальное по включению допустимое множество с максимальным значением целевой функции f .

Очень многие задачи комбинаторной оптимизации, сводящиеся к схеме (1) на системе независимости, являются *NP*-трудными. В качестве метода приближенного решения задачи (1) рассмотрим следующий простой алгоритм, являющийся дискретным аналогом алгоритма наискорейшего подъема.

Жадный алгоритм (GA) . Итерация 0. $X \leftarrow \emptyset$. Перейти на итерацию 1.

Итерация $k, k \geq 1$. Выбрать такой элемент $x_k \in U \setminus X$, что

$$f(X \cup x_k) = \max_{\substack{x \in U \setminus X \\ X \cup x \in \mathcal{A}}} f(X \cup x),$$

$X \leftarrow X \cup x_k$ и перейти на итерацию $k + 1$. Если такого элемента $x_k \in U \setminus X$ нет, то $S_{GA} \leftarrow X$.

Конец.

Здесь и всюду далее в обозначении одноэлементного множества $\{x\}$, как правило, будут опускаться фигурные скобки.

Один из центральных результатов теории матроидов — известная теорема Радо–Эдмондса [1, 2] о том, что задача (1) на системе независимости разрешима жадным алгоритмом для любой аддитивной целевой функции тогда и только тогда, когда система независимости является матроидом.

Многочисленные обобщения теоремы Радо–Эдмондса в основном были связаны с расширением допустимой области. Как правило, множество допустимых решений задачи (1) заменялось на систему достижимости, в которой для любого непустого допустимого множества существует его допустимое подмножество, на единицу меньшей мощности. Примерами таких систем являются гридоиды и матроидные вложения, которые можно рассматривать как обобщения матроидов. Так, в работах [3, 4] охарактеризован класс гридоидов, на которых задача (1) разрешима жадным алгоритмом для любой аддитивной целевой функции, а в [5] установлены аналогичные критерии для более общих классов задач. В [6] доказано, что задача (1) на системе достижимости разрешима жадным алгоритмом для любой аддитивной целевой функции тогда и только тогда, когда допустимая область является матроидным вложением.

Обобщения теоремы Радо–Эдмондса за счет расширения класса целевых функций также сопровождалось расширением допустимой области. В работе [7] доказано обобщение теоремы Радо–Эдмондса для задачи максимизации вогнутой сепарабельной функции на системе целочисленных векторов, обладающей свойством наследственности. Этот результат получил дальнейшее развитие в работе [8]. В [9] исследованы задачи на гридоидах с нелинейными (неаддитивными) целевыми функциями, а в [6] описан класс целевых функций задач на матроидных вложениях, разрешимых жадным алгоритмом.

Мы сосредоточим усилия на изучении задач вида (1) на системах независимости. Это сделано по двум причинам. Во-первых, системы независимости представляют собой классический объект, имеющий многочисленные приложения. Во-вторых, как будет показано далее, любая задача (1), в которой требуется найти базу произвольной системы множеств, эквивалентна задаче на системе независимости.

В данной работе доказано обобщение теоремы Радо–Эдмондса для задачи (1) на системе независимости с неаддитивной целевой функцией и предложена характеристика класса целевых функций задач на матроидах, разрешимых жадным алгоритмом.

2. Определения и известные результаты

Рассмотрим задачу максимизации в следующей постановке:

$$\max\{f(X): X \in \mathcal{B}\}, \quad (2)$$

где $\mathcal{B}$ — семейство всех баз, то есть максимальных по включению подмножеств системы множеств $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$, а $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$ — монотонная неотрицательная функция множеств.

Система множеств $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ называется системой независимости или наследственной системой, если семейство $\mathcal{A}$ непусто и удовлетворяет следующей аксиоме наследственности:

$$\text{если } A \in \mathcal{A} \text{ и } A' \subseteq A, \text{ то } A' \in \mathcal{A}. \quad (3)$$

Множества семейства $\mathcal{A}$ называются независимыми.

Замечание 1. Жадный алгоритм всегда находит базу системы независимости, то есть допустимое решение задачи (2) на системе независимости.

Замечание 2. Задача (2) на произвольной системе множеств $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ эквивалентна некоторой задаче максимизации на системе независимости.

Действительно, в задаче (2) на произвольной системе множеств $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ мы можем заменить систему $\mathcal{S}$ на ее наследственное замыкание $\mathcal{S}^* = (U, \mathcal{A}^*)$, где

$$\mathcal{A}^* = \{A^* \subseteq A \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Понятно, что $\mathcal{S}^*$ — система независимости, и множество оптимальных решений задачи (2) на системе $\mathcal{S}$ совпадает с множеством оптимальных решений аналогичной задачи на системе $\mathcal{S}^*$.

Система независимости $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ называется матроидом, если семейство $\mathcal{B}$ всех ее баз обладает следующим свойством:

$$\begin{aligned} \text{если } B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ и } b_1 \in B_1 \setminus B_2, \\ \text{то } \exists b_2 \in B_2 \setminus B_1 \text{ такой, что } (B_2 \cup b_1) \setminus b_2 \in \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (4)$$

Следующая теорема Радо–Эдмондса является одной из центральных в теории матроидов.

Теорема 1 ([1, 2]). Пусть $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ — система независимости. Жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи (2) для любой аддитивной функции $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}$ — матроид.

Если целевая функция задачи (2) на матроиде не является аддитивной, то жадный алгоритм может не найти оптимальное решение. Однако существуют задачи на матроидах с неаддитивными целевыми функциями, в которых жадный алгоритм гарантированно находит оптимальное решение.

Пример 1. Рассмотрим следующую функцию, определенную на подмножествах множества $U = \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{aligned} f(\emptyset) = 0, \quad f(\{x_1\}) = 5, \quad f(\{x_2\}) = 4, \quad f(\{x_3\}) = 6, \\ f(\{x_1, x_2\}) = f(\{x_1, x_3\}) = 9, \quad f(\{x_2, x_3\}) = 10, \quad f(U) = 11. \end{aligned}$$

Функция множеств в этом примере неаддитивна, но, как нетрудно проверить, жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи максимизации на любом матроиде $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$.

Наша цель — получить обобщение теоремы Радо–Эдмондса для задачи (2) на системе независимости с неаддитивной целевой функцией и охарактеризовать класс целевых функций задач (2) на матроидах, разрешимых жадным алгоритмом.

В работе [6] подобные результаты доказаны для задач на системах достижимости и матроидных вложениях. Сформулируем их.

Система множеств $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ называется системой достижимых множеств или системой достижимости, если семейство $\mathcal{A}$ непусто и удовлетворяет следующей аксиоме:

$$\text{если } A \in \mathcal{A} \text{ и } A \neq \emptyset, \text{ то } \exists a \in A, \text{ такой, что } A \setminus a \in \mathcal{A}. \quad (5)$$

Система достижимости $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ с семейством баз $\mathcal{B}$ называется расширяемой, если она обладает следующим свойством:

$$\text{если } A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \text{ и } A \subset B, \text{ то } \exists b \in B \setminus A, \text{ такой, что } A \cup b \in \mathcal{A}.$$

Система достижимости $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ называется конгруэнтно-замкнутой, если она удовлетворяет следующей аксиоме:

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A}, \forall u, v \in \text{ext}(A), \forall V \subseteq U \setminus A \setminus \text{ext}(A) \\ \text{из } A \cup u \cup V \in \mathcal{A}^* \text{ следует, что } A \cup v \cup V \in \mathcal{A}^*, \end{aligned}$$

где

$$\text{ext } A = \{u \in U \mid A \cup u \in \mathcal{A}\},$$

$\mathcal{S}^* = (U, \mathcal{A}^*)$ — наследственное замыкание системы $\mathcal{S}$.

Матроидное вложение — это система достижимости, которая является расширяемой, конгруэнтно-замкнутой и наследственное замыкание которой есть матроид. Очевидно, что матроидное вложение, являющееся системой независимости, совпадает с матроидом.

В статье [6] доказано следующее обобщение теоремы Радо–Эдмондса.

Теорема 2 ([6]). Пусть $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ — система достижимости. Жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи (2) на системе $\mathcal{S}$ для любой аддитивной функции $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}$ — матроидное вложение.

Как и в случае задач на матроидах, существуют задачи на матроидных вложениях с неаддитивными целевыми функциями, в которых жадный алгоритм гарантированно находит оптимальное решение. В [6] получена характеристика целевых функций задач на матроидных вложениях, разрешимых жадным алгоритмом. Чтобы сформулировать этот результат, нам потребуется следующее определение.

Определение 1. Монотонная функция множеств $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$ называется согласованной, если для любых множеств $T \subset T' \subset U$ и для любых элементов $x, y \in U \setminus T'$ таких, что

$$f(T \cup x) \geq f(T \cup y),$$

имеет место неравенство

$$f(T' \cup x) \geq f(T' \cup y). \quad (6)$$

Очевидно, что любая аддитивная функция является согласованной.

Теорема 3 ([6]). Пусть $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$ — неотрицательная функция множеств. Жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи (2) с целевой функцией f на любом матроидном вложении $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда функция f является согласованной.

Далее в разделе 4 будет доказана аналогичная теорема для матроидов.

3. Градиентно-согласованные функции

Чтобы доказать критерий разрешимости задачи (2) на матроиде, нам придется несколько расширить класс согласованных функций.

Пусть U — конечное множество, $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$. Рассмотрим множество $V \subseteq U$ мощности $|V| \geq 3$, и пусть натуральное число

$$k \leq |V| - 2.$$

Множество $X \subset V$ будем называть градиентным подмножеством множества V , если существует такое упорядочение $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ его элементов, что

$$\begin{aligned} f(\{x_1\}) &\geq f(\{x\}) && \text{для любого } x \in V, \\ f(\{x_1, x_2\}) &\geq f(\{x_1, x\}) && \text{для любого } x \in V \setminus x_1, \\ &\dots \\ f(X) &\geq f(\{x_1, \dots, x_{k-1}, x\}) && \text{для любого } x \in V \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}. \end{aligned}$$

В дальнейшем, если X — градиентное подмножество множества V , то в записи $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ будет указываться именно тот порядок элементов, о котором идет речь в определении.

Монотонная функция множеств $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$ называется градиентно-согласованной, если для любых множеств $T \subset T' \subset U$ и для любых элементов $x, y \in U \setminus T'$ таких, что множество $T \cup x = \{x_1, \dots, x_{k-1}, x\}$ является градиентным подмножеством множества $T' \cup \{x, y\}$, справедливо неравенство (6).

Заметим, что это определение отличается от определения согласованной функции тем, что выполнение неравенства (6) требуется теперь не для любых множеств $T \subset T' \subset U$ и любых элементов $x, y \in U \setminus T'$, а лишь для таких, что $T \cup x$ является градиентным подмножеством множества $T' \cup \{x, y\}$. При этом, как легко видеть,

$$f(T \cup x) \geq f(T \cup z), \quad z \in (T' \cup \{x, y\}) \setminus T,$$

так что требование

$$f(T \cup x) \geq f(T \cup y)$$

становится излишним. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Замечание 3. Любая согласованная функция является градиентно-согласованной. В частности, любая аддитивная функция градиентно-согласована.

Однако, не всякая градиентно-согласованная функция является согласованной. Функция множеств f , описанная в примере 1, не является согласованной: если

$$T = \emptyset, \quad T' = \{x_3\}, \quad x = x_1, \quad y = x_2,$$

то

$$f(T \cup x) = f(\{x_1\}) > f(\{x_2\}) = f(T \cup y),$$

но

$$f(T' \cup x) = f(\{x_1, x_3\}) < f(\{x_2, x_3\}) = f(T' \cup y).$$

Однако, множество

$$T \cup x = \{x_1\}$$

не является градиентным подмножеством множества

$$T' \cup \{x, y\} = \{x_1, x_2, x_3\} = U.$$

Поскольку это единственный случай невыполнения определения согласованной функции, функция f является градиентно-согласованной.

Нам потребуется следующий критерий градиентно-согласованности функции.

Лемма 1. *Монотонная функция множеств $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$ является градиентно-согласованной тогда и только тогда, когда для любого множества $V \subseteq U$ мощности $|V| \geq 3$ и любого его градиентного подмножества $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset V$ справедливы неравенства*

$$f(V \setminus v) \geq f(V \setminus x_k) \quad (7)$$

для всех $v \in V \setminus X$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть функция f является градиентно-согласованной. Рассмотрим произвольное множество $V \subseteq U$ мощности $|V| \geq 3$ и его градиентное подмножество

$$X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset V.$$

Пусть

$$V = X \cup Y,$$

где $|Y| \geq 2$.

Положим

$$T = X \setminus x_k, \quad T' = T \cup Y \setminus y,$$

где y — произвольный элемент множества Y . Поскольку

$$T \cup x_k = X$$

является градиентным подмножеством множества

$$V = T' \cup \{x_k, y\},$$

справедливо соотношение

$$f(T \cup x_k) \geq f(T \cup y).$$

Отсюда в силу (6) получаем, что

$$f(V \setminus y) = f(T' \cup x_k) \geq f(T' \cup y) = f(V \setminus x_k),$$

то есть

$$f(V \setminus v) \geq f(V \setminus x_k)$$

для всех $v \in V \setminus X$.

Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Рассмотрим произвольные множества $T \subset T' \subset U$ и любые элементы $x, y \in U \setminus T'$ такие, что

$$T \cup x = \{x_1, \dots, x_{k-1}, x\}$$

является градиентным подмножеством множества $T' \cup \{x, y\}$. Положим

$$V = T' \cup \{x, y\}, \quad X = T \cup x,$$

и пусть $x_k = x$. Тогда из (7) следует, что

$$f(T' \cup x) = f(V \setminus y) \geq f(V \setminus x_k) = f(T' \cup y),$$

то есть функция f является градиентно-согласованной.

Лемма доказана.

4. Задачи, разрешимые жадным алгоритмом

В этом параграфе будет доказано обобщение теоремы Радо–Эдмондса для задачи (2) на системе независимости с неаддитивной целевой функцией и будет охарактеризован класс целевых функций задач на матроидах, разрешимых жадным алгоритмом.

Лемма 2. *Если в задаче (2) $\mathcal{B}$ — семейство баз матроида $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$, а целевая функция $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$ является градиентно-согласованной, то жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи (2).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ — матроид, а целевая функция задачи (2) является градиентно-согласованной. Пусть жадным алгоритмом GA построена база $S_{GA} = \{x_1, \dots, x_r\}$ матроида $\mathcal{S}$.

Заметим, что если существует такой элемент $u \in U$, что

$$f(\{u\}) > f(\{x_1\}),$$

то u — петля матроида $\mathcal{S}$, то есть $\{u\} \notin \mathcal{A}$. В дальнейшем элемент u можно исключить из рассмотрения, так как все множества, содержащие u , будут зависимыми множествами матроида $\mathcal{S}$. Поэтому сразу без ограничения общности будем считать, что матроид $\mathcal{S}$ не содержит петель.

Лемма будет доказана, если будет доказано, что

$$f(S_{GA}) \geq f(B) \tag{8}$$

для любой базы B матроида $\mathcal{S}$.

Доказательство утверждения (8) проведем индукцией по

$$|S_{GA} \setminus B| = |B \setminus S_{GA}|.$$

Если $|S_{GA} \setminus B| = 1$, то

$$S_{GA} \setminus B = \{x_k\}, \quad k \in \{1, \dots, r\},$$

а

$$B \setminus S_{GA} = \{v\}$$

для некоторого $v \in U \setminus S_{GA}$. Если $k = r$, то в силу выбора алгоритма GA

$$f(S_{GA}) = f(\{x_1, \dots, x_{r-1}, x_r\}) \geq f(\{x_1, \dots, x_{r-1}, v\}) = f(B).$$

Если же $k < r$, то для множества

$$V = B \cup x_k$$

и его градиентного подмножества $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, согласно (7),

$$f(S_{GA}) = f(V \setminus v) \geq f(V \setminus x_k) = f(B).$$

Основание индукции установлено.

Предположим, что утверждение (8) верно для любой базы $B \subset U$, для которой

$$|S_{GA} \setminus B| \leq m - 1, \quad m \geq 2.$$

Рассмотрим такую базу $B \subset U$ матроида $\mathcal{G}$, что

$$|S_{GA} \setminus B| = m.$$

Пусть k — наименьший номер такой, что $x_k \in S_{GA} \setminus B, k \in \{1, \dots, r\}$. Тогда для множества

$$V = B \cup x_k$$

и его градиентного подмножества

$$X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset V,$$

согласно (7),

$$f(V \setminus v) \geq f(V \setminus x_k) = f(B) \tag{9}$$

для всех $v \in V \setminus X$.

По аксиоме (4) для $x_k \in S_{GA} \setminus B$ существует такой элемент $v \in B \setminus S_{GA} \subset V \setminus X$, что множество

$$B' = (B \cup x_k) \setminus v = V \setminus v$$

является базой матроида $\mathcal{G}$. Таким образом,

$$f(B') \geq f(B)$$

в силу (9). А так как

$$|S_{GA} \setminus B'| = |S_{GA} \setminus B| - 1 = m - 1,$$

по предположению индукции справедливо неравенство

$$f(S_{GA}) \geq f(B').$$

Окончательно получаем, что

$$f(S_{GA}) \geq f(B') \geq f(B).$$

Утверждение (8), а вместе с ним и лемма 2 доказаны.

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает следующее обобщение теоремы Радо–Эдмондса для задачи максимизации на системе независимости.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ — система независимости. Жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи (2) на системе $\mathcal{S}$ для любой градиентно-согласованной функции множеств $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}$ — матроид.

Доказательство. Докажем необходимость. Если $\mathcal{S}$ — не матроид, то по теореме Радо–Эдмондса существует такая аддитивная, а значит, градиентно-согласованная функция f , что жадный алгоритм может не найти оптимальное решение задачи (2) с целевой функцией f .

Достаточность условия теоремы 4 следует из леммы 2.

Справедлив следующий критерий разрешимости жадным алгоритмом задачи (2) на матроиде.

Теорема 5. Пусть $f: 2^U \rightarrow \mathbf{R}_+$ — неотрицательная функция множеств. Жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи (2) с целевой функцией f на произвольном матроиде $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда функция f является градиентно-согласованной.

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим, что функция f не является градиентно-согласованной. Докажем, что в этом случае существует матроид $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$, на котором жадный алгоритм может не найти оптимальное решение задачи (2).

Поскольку функция f не является градиентно-согласованной, по лемме 1 существуют такое множество $V \subseteq U$ мощности $|V| \geq 3$ и такое его градиентное подмножество $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset V$, что

$$f(V \setminus v) < f(V \setminus x_k) \quad (10)$$

для некоторого $v \in V \setminus X$. Рассмотрим матроид $\mathcal{S}$ на множестве U , в котором имеется всего две базы

$$B_1 = V \setminus x_k,$$

$$B_2 = V \setminus v,$$

а все элементы множества $U \setminus V$ являются петлями (то есть $\{u\} \notin \mathcal{A}$ для всех $u \in U \setminus V$).

Поскольку $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ является градиентным подмножеством множества V и X независимо (так как является подмножеством базы B_2), алгоритм GA на первых k шагах может последовательно выбрать элементы $x_1, \dots, x_k$. Это означает, что алгоритм

построит базу B_2 , содержащую элемент x_k , в то время как в силу (10) оптимальным решением задачи (2) на матроиде $\mathcal{S}$ является база B_1 , не содержащая x_k .

Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть функция множеств f является градиентно-согласованной. Тогда в силу леммы 2 жадный алгоритм гарантированно найдет оптимальное решение задачи (2) с целевой функцией f на любом матроиде $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Rado R., Note on independence functions. *Proc. London. Math. Soc.* (1957) **7**, №3, 300–320.
2. Edmonds J., Matroids and the greedy algorithm. *Math. Programming* (1971) **1**, №2, 127–136.
3. Korte B., Lovász L., Greedoids and linear objective functions. *SIAM J. Alg. Discrete Math.* (1984) **5**, №2, 229–238.
4. Goetschel R. H., Linear objective functions on certain classes of greedoids. *Discrete Appl. Math.* (1986) **14**, №1, 11–16.
5. Шенмайер В. В., Максимизация линейной целевой функции с помощью жадного алгоритма. *Дискретный анализ и исследование операций, сер. I* (1999) **6**, №4, 104–120.
6. Helman P., Moret B. M. E., Shapiro N. D., An exact characterization of greedy structures. *SIAM J. Discrete Math.* (1993) **6**, №2, 274–283.
7. Глебов Н. И., Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования. *Управляемые системы* (1973) **11**, 38–42.
8. Глебов Н. И., Шенмайер В. В., О применимости алгоритма покоординатного подъема к задачам целочисленного программирования. *Дискретный анализ и исследование операций, сер. I* (2000) **7**, №4, 38–47.
9. Korte B., Lovász L., Mathematical structures underlying greedy algorithm. *Lect. Notes Comput. Sci.* (1981) **117**, 205–209.

Статья поступила 10.04.2007.

Переработанный вариант поступил 26.01.2009.