Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Зубов, О выборе оптимальной стратегии защиты для кода аутентификации с двумя состояниями источника, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 4, 135–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 05:19:31

О выборе оптимальной стратегии защиты для кода аутентификации с двумя состояниями источника

© 2009 г. А. Ю. Зубов

Вычисляются точные значения вероятностей успеха активных атак для кода аутентификации с двумя состояниями источника.

Код аутентификации (далее A -код) — это математическая модель системы аутентификации информации. Как и шифр, код аутентификации имеет некоторое множество секретных ключей, которые используются для выбора правила кодирования. Как при шифровании, так и при аутентификации информации, выбор ключей осуществляется, как правило, случайно и равновероятно. Однако если такой выбор ключей положительно влияет на стойкость шифрования, то для кодов аутентификации это может быть и не так. Для некоторых конструкций A -кодов равновероятный выбор ключей может быть совсем неудачным. В данной статье приводится соответствующий пример.

Напомним основные определения и понятия. В литературе, посвященной кодам аутентификации (см., например, [1, 5, 6]), стороны, обменивающиеся информацией, называются передатчиком и приемником. Передатчик наблюдает состояния источника (например, результаты бросания монеты или битовые строки), с помощью некоторых правил кодирует их (используя секретные ключи), передавая получившиеся сообщения приемнику. Приемник восстанавливает передаваемое сообщением состояние источника и принимает полученное сообщение как аутентичное, используя установленный критерий аутентичности. Злоумышленник (называемый оппонентом) осуществляет активные атаки, к числу которых относятся атаки имитации и подмены. При попытке имитации оппонент вставляет, в канал связи поддельное сообщение, а при попытке подмены подменяет передаваемое сообщение поддельным сообщением. В обоих случаях оппонент рассчитывает на то, что поддельное сообщение будет принято как аутентичное. Не зная используемого передатчиком и приемником секретного ключа, оппонент может добиться успеха при выборе поддельного сообщения лишь с некоторой вероятностью. Если оппонент сможет определить по наблюдаемому сообщению секретный ключ, то он добьется успеха с вероятностью, равной 1. Чем меньше эта вероятность, тем более стойким является A -код. В простейшем случае речь идет об атаках на основе не более чем одного наблюдаемого сообщения. Более опасными могут быть атаки на основе ряда наблюдаемых сообщений (образованных, в частности, с помощью одного ключа). Мы ограничимся рассмотрением лишь простейших атак.

Формально A -код определяется следующим образом. Пусть S , M , E — соответственно множества состояний источника, сообщений и правил кодирования. Каждое правило

кодирования — это инъективное отображение $e: S \rightarrow M$. Оно определяет обратное отображение $e^{-1}: M \rightarrow S \cup \{0\}$ формулой

$$e^{-1}(m) = \begin{cases} s \in S, & \text{если } m \in e(S), \text{ причем } m = e(s), \\ 0, & \text{если } m \notin e(S), \end{cases}$$

где

$$e(S) = \{e(s): s \in S\}.$$

При этом полагают, что $0 \notin S$. Естественно, для любых $s \in S$ и $e \in E$ выполняется равенство

$$e^{-1}(e(s)) = s, \quad (1)$$

означающее, что сообщение и правило кодирования однозначно восстанавливают состояние источника. Обычно полагают, что выполняется равенство

$$M = \bigcup_{e \in E} e(S), \quad (2)$$

означающее, что каждое сообщение является результатом применения некоторого правила кодирования к некоторому состоянию источника. Код аутентификации — это тройка конечных множеств (S, E, M) , для которой выполняются условия (1) и (2). Для аутентификации передаваемых состояний источника передатчик и приемник выбирают (в секрете от оппонента) общее правило кодирования e . Передатчик вычисляет $m = e(s)$ и направляет сообщение m приемнику. Критерием аутентичности полученного сообщения является условие $e^{-1}(m) \neq 0$. Для удобства выбора правил кодирования множество E индексируется ключами.

Состояния источника появляются случайно, в соответствии с заданным на множестве S распределением вероятностей

$$\mathbf{P}(S) = (p_S(s), s \in S).$$

Например, при случайном бросании монеты исходы (состояния источника) могут появляться как с равными, так и с разными вероятностями. Пусть $\tilde{S}$ — случайная величина, определенная для любого $s \in S$ равенством

$$\mathbf{P}\{\tilde{S} = s\} = p_S(s).$$

Передатчик и приемник выбирают правила кодирования из множества E случайно в соответствии с некоторым распределением вероятностей

$$P(E) = (p_E(e), e \in E).$$

Пусть $\tilde{E}$ — соответствующая случайная величина.

По определению случайные величины $\tilde{S}$ и $\tilde{E}$ полагаются независимыми. Они индуцируют случайную величину $\tilde{M}$ с множеством исходов M . Вероятность $p_M(m)$ вычисляется по формуле

$$p_M(m) = \sum_{e \in E(m)} p_E(e) p_S(e^{-1}(m)), \quad (3)$$

где $m \in M$,

$$E(m) = \{e \in E: e^{-1}(m) \neq 0\}.$$

A -код можно задать $|E| \times |M|$ матрицей, называемой матрицей кодирования, строки которой занумерованы правилами кодирования $e \in E$, столбцы — сообщениями $m \in M$; на пересечении строки матрицы с номером e и столбца с номером m расположен элемент $e^{-1}(m)$.

Следуя работам Г. Симмонса ([3–6]), будем оценивать стойкость A -кода к атаке имитации вероятностью p_0 , определяемой следующим образом. Пусть $P(E) = P$ — произвольное распределение и q — вероятность события $m \in e(S)$ при случайном выборе $e \in E$. Это — вероятность того, что сообщение $m \in M$ будет принято как аутентичное. Она выражается формулой

$$p_M(m) = \sum_{e \in E(m)} p_E(e).$$

Вероятность p_0 определяется равенством

$$p_0 = \min_{P(E)} \max_m p_M(m). \quad (4)$$

Стойкость A -кода к атаке подмены будем оценивать вероятностью p_1 , определяемой следующим образом. Пусть $P(E) = P$ — произвольное распределение и $m, n \in M$ — различные сообщения. Пусть $p_s(n | m)$ — вероятность того, что для случайно выбранной пары (e, s) оппонент добьется успеха при подмене наблюдаемого сообщения $m \in M$ сообщением $n \neq m$. Эта вероятность вычисляется по формуле

$$p_s(n | m) = \frac{1}{p_M(m)} \sum_{e \in E(m, n)} p_E(e) p_S(e^{-1}(m)), \quad (5)$$

где

$$E(m, n) = E(m) \cap E(n).$$

Пусть

$$p_s(m) = \max_{n \neq m} p_s(n | m).$$

Тогда по определению

$$p_1 = \min_{P(E)} \sum_{m \in M} p_s(m) p_M(m). \quad (6)$$

Если ограничиться возможностью оппонента использовать одну из рассмотренных атак, то стойкость A -кода оценивается величиной $\max\{p_0, p_1\}$. Эта величина зависит от распределения $P(E)$, которое называется стратегией защиты. Для некоторых A -кодов с небольшими значениями параметров $|S|$, $|E|$, $|M|$ (см., например, [1–3]) можно точно вычислить вероятности p_0 и p_1 , а также указать распределения $P(E)$, на которых достигаются минимумы в (4) и (6) (оптимальные стратегии защиты). Вычислим точные значения вероятностей успеха активных атак для A -кода с двумя состояниями источника и одинаковым числом правил кодирования и сообщений.

Пусть $S = \{H, T\}$. Состояния источника H и T можно интерпретировать, например, как результаты случайного подбрасывания монеты (орел и решка), которые появляются с вероятностями p и $1 - p$ соответственно, $p \geq 0,5$. Пусть множества E и M состоят из N элементов:

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}, \quad M = \{m_1, m_2, \dots, m_N\},$$

где N — произвольное натуральное число, $N \geq 3$. Пусть матрица кодирования (размера $N \times N$) имеет вид

$$\begin{pmatrix} H & T & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & T & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & H & T \\ H & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & T \end{pmatrix}$$

Будем полагать, что i -я строка матрицы пронумерована правилом кодирования e_i , а j -й столбец — сообщением m_j , $i, j = 1, 2, \dots, N$. Вычислим для данного A -кода вероятности p_0 и p_1 , а также оптимальные стратегии защиты от имитации и от подмены, при $N = 4$ это сделано в [2].

Пусть $p_E(e_i) = x_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда, согласно (4), p_0 совпадает с $\min_{\bar{x} \in \Omega} L(\bar{x})$, где

$$L(\bar{x}) = \max\{x_1 + x_N, x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{N-1} + x_N\}, \\ \Omega = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_N) : x_1 + \dots + x_N = 1, 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Нетрудно видеть, что минимальное значение $L(\bar{x})$ достигается лишь в случае, когда все переменные принимают одинаковые значения. Поэтому $p_0 = 2/N$ и оптимальной стратегией защиты от имитации является равномерное распределение $P(E)$.

Рассмотрим атаку подмены. Согласно (6), p_1 совпадает с $\min\{L_1(\bar{x}), \bar{x} \in \Omega\}$, где

$$L_1(\bar{x}) = \max\{px_1; px_N\} + \max\{(1-p)x_1; px_2\} + \max\{(1-p)x_2; px_3\} + \dots \\ + \max\{(1-p)x_{N-2}; px_{N-1}\} + \max\{(1-p)x_{N-1}; (1-p)x_N\}. \quad (7)$$

Введем обозначение

$$a = \frac{1-p}{p}.$$

Теорема 1. Для рассматриваемого A -кода $p_1 = 0,5$, если $p = 0,5$. Оптимальной стратегией защиты от подмены является равномерное распределение $P(E)$. При $p > 0,5$ имеет место формула

$$p_1 = \frac{3p - 1 - p^2(1 + a^{N-1})}{3p - 1 - pa^{N-1}}. \quad (8)$$

Оптимальная стратегия защиты от подмены определяется вектором $\bar{x}$, где

$$x_N = x_1 = \frac{2p - 1}{3p - 1 - pa^{N-1}}, \\ x_2 = \frac{a(2p - 1)}{3p - 1 - pa^{N-1}}, \\ \dots \\ x_{N-1} = \frac{a^{N-2}(2p - 1)}{3p - 1 - pa^{N-1}}. \quad (9)$$

Доказательство. При $p = 0,5$ утверждение очевидным образом следует из вида функции $L_1(\bar{x})$. Пусть $p > 0,5$. Будем вычислять

$$p_1 = \min\{L_1(\bar{x}), \bar{x} \in \Omega\}$$

путем раскрытия максимумов в сумме правой части равенства (7) в 2^N случаях, определяемых расстановкой неравенств $\leq$ или $\geq$ вместо знака $\vee$ в системе

$$\begin{aligned} & px_1 \vee px_N, \\ & (1-p)x_1 \vee px_2, \\ & \dots \\ & (1-p)x_{N-2} \vee px_{N-1}, \\ & (1-p)x_{N-1} \vee (1-p)x_N. \end{aligned} \quad (10)$$

В каждом таком случае $L_1(\bar{x})$ представляет собой линейную функцию с положительными коэффициентами. Представим для удобства систему (10) в виде

$$\begin{aligned} & x_1 \vee x_N, \\ & ax_1 \vee x_2, \\ & \dots \\ & ax_{N-2} \vee x_{N-1}, \\ & x_{N-1} \vee x_N \end{aligned} \quad (11)$$

и расположим переменные $x_1, x_N, x_{N-1}, ax_{N-2}, a^2x_{N-3}, \dots, a^{N-2}x_1$ в одну цепочку, которую для наглядности изобразим в виде схемы

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ x_1 & & x_N & & x_{N-1} & & ax_{N-2} \quad \dots \quad a^{N-3}x_2 \quad a^{N-2}x_1 \end{array} \quad (12)$$

В схеме (12), соответствующей системе (11), на рисунках приведем стрелки, указывающие возрастание переменных:

$$\begin{array}{cc} \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \xleftarrow{\hspace{1cm}} \\ \bullet & \bullet \\ a^{N-i-1}x_i & a^{N-i}x_{i-1} \\ (x_i \leq ax_{i-1}) & (x_i \geq ax_{i-1}) \end{array}$$

Заметим, что в схеме (12) могут быть точки трех видов, назовем их соответственно начальными, конечными и проходными. Начальная точка $a^{N-i-1}x_i$ отвечает случаю, когда в системе (11) имеются неравенства $ax_{i-1} \geq x_i$ и $ax_i \leq x_{i+1}$. Ей соответствует фрагмент схемы вида

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ a^{N-i-2}x_{i+1} & & a^{N-i-1}x_i & & a^{N-i}x_{i-1} \end{array}$$

Конечная точка $a^{N-i-1}x_i$ отвечает случаю, когда в системе (11) имеются неравенства $ax_{i-1} \leq x_i$ и $ax_i \geq x_{i+1}$. Ей соответствует фрагмент схемы вида

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & & \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ a^{N-i-2}x_{i+1} & & a^{N-i-1}x_i & & a^{N-i}x_{i-1} \end{array}$$

Наконец, проходная точка $a^{N-i-1}x_i$ отвечает случаю, когда в системе (11) имеются неравенства $ax_{i-1} \leq x_i$ и $ax_i \leq x_{i+1}$, или неравенства $ax_{i-1} \geq x_i$ и $ax_i \geq x_{i+1}$. Проходной точке соответствует один из фрагментов схемы вида

Нетрудно видеть, что в любом случае, определяемом системой (11), выражение функции $L_1(\bar{x})$ содержит переменную x_i с коэффициентом 1, если точка $a^{N-i-1}x_i$ конечная, с коэффициентом p или $1-p$, если точка $a^{N-i-1}x_i$ проходная, и не содержит x_i , если точка $a^{N-i-1}x_i$ начальная.

Рассмотрим сначала два случая, в которых соответствующая схема не содержит начальных и конечных точек:

Первый случай невозможен, поскольку (в силу того, что $a < 1$) его условия

$$x_1 \leq x_N \leq x_{N-1} \leq ax_{N-2} \leq \dots \leq a^{N-3}x_2 \leq a^{N-2}x_1$$

противоречивы. Второй случай соответствует системе неравенств

$$x_1 \geq x_N \geq x_{N-1} \geq ax_{N-2} \geq \dots \geq a^{N-3}x_2 \geq a^{N-2}x_1. \quad (13)$$

В этом случае $L_1(\bar{x})$ имеет вид

$$\begin{aligned} L_1(\bar{x}) &= p(x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1}) + (1-p)x_N \\ &= (2p-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1}) + 1-p. \end{aligned} \quad (14)$$

Лемма 1. В условиях (13) минимум функции $L_1(\bar{x})$ достигается на наборе переменных, удовлетворяющем условиям

$$x_{N-1} = ax_{N-2} = \dots = a^{N-3}x_2 = a^{N-2}x_1 = a^{N-2}x_N. \quad (15)$$

При этом

$$\min L_1(\bar{x}) = \frac{3p-1-p^2(1-a^{N-1})}{3p-1-pa^{N-1}}, \quad (16)$$

где минимум берется при выполнении условия (13).

Доказательство. Условия (13) можно представить в виде

$$x_N \leq \frac{1}{a^0} x_1 \leq \frac{1}{a^1} x_2 \leq \dots \leq \frac{1}{a^{N-2}} x_{N-1}. \quad (17)$$

Пусть $\bar{x}^1$ — вектор аргументов, на котором $L_1(\bar{x})$ достигает минимума в условиях (17). Предположим, что в цепочке неравенств (17) имеет место хотя бы одно строгое неравенство:

$$x_N^1 = \frac{1}{a^0} x_1^1 = \dots = \frac{1}{a^{k-1}} x_k^1 < \frac{1}{a^k} x_{k+1}^1 \leq \dots \quad (18)$$

Рассмотрим тогда вектор $\bar{x}'$ с координатами $x'_N = x_N^1 + \varepsilon, x'_1 = x_1^1 + \varepsilon, \dots, x'_k = x_k^1 + \varepsilon, x'_{k+1} = x_{k+1}^1 - (k+1)\varepsilon, x'_{k+2} = x_{k+2}^1, \dots, x'_{N-1} = x_{N-1}^1$.

Очевидно, что ε можно выбрать так, чтобы сумма координат $\bar{x}'$ оставалась равной единице и выполнялись условия (17). Но

$$L_1(\bar{x}') = L_1(\bar{x}^1) - (2p-1)\varepsilon < L_1(\bar{x}^1).$$

Полученное противоречие доказывает, что координаты вектора $\bar{x}$, для которого $L_1(\bar{x})$ достигает минимума в рассматриваемых условиях, удовлетворяют условиям (15). Поскольку сумма координат вектора $\bar{x}$ равна 1, получаем из (15) значения координат вектора $\bar{x}^1$. Они выражаются формулами (9). Учитывая, что в условиях леммы $L_1(\bar{x})$ можно выразить формулой $L_1(\bar{x}) = p - (2p-1)x_N$, из (9) получаем формулу (16).

Лемма 2. Пусть $\bar{x}^{(\alpha)}$ — вектор, для которого $\min L_1(\bar{x}) = L_1(\bar{x}^{(\alpha)})$ в условиях случая, определенного произвольной фиксированной совместной системой неравенств (11). Тогда координаты вектора $\bar{x}^{(\alpha)}$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{aligned} \alpha = 0: & \quad x_N^{(0)} = x_{N-1}^{(0)} = a x_{N-2}^{(0)} = \dots = a^{N-2} x_1^{(0)}; \\ \alpha = 1: & \quad x_{N-1}^{(1)} = a x_{N-2}^{(1)} = \dots = a^{N-2} x_1^{(1)} = a^{N-2} x_N^{(1)}; \\ \alpha = k: & \quad x_{N-k}^{(k)} = a x_{N-k-1}^{(k)} = \dots = a^{N-k-1} x_1^{(k)} = a^{N-k-1} x_N^{(k)} \\ & \quad = a^{N-k-1} x_{N-1}^{(k)} = a^{N-k} x_{N-2}^{(k)} = \dots = a^{N-3} x_{N-k+1}^{(k)}, \quad 2 \leq k \leq N-1. \end{aligned}$$

Доказательство. Случай, когда схема (12), соответствующая данной системе неравенств, не содержит начальных точек, рассмотрен в лемме 1. При этом $\bar{x}^{(\alpha)}$ удовлетворяет условиям (15), которые совпадают с условиями случая $\alpha = 1$. В других случаях схема имеет хотя бы одну начальную и хотя бы одну конечную точку. Рассмотрим фрагмент схемы, в котором начальная точка расположена между двумя конечными точками:

причем $m > 1$. Такому фрагменту соответствует система неравенств

$$\begin{aligned} a^{N-j-1} x_j & \leq a^{N-j} x_{j-1} \leq \dots \leq a^{N-k-1} x_k, \\ a^{N-j-1} x_j & \leq a^{N-j-2} x_{j+1} \leq \dots \leq a^{N-m-1} x_m. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда точно так же, как в лемме 1, можно доказать, что для координат вектора $\bar{x}^{(\alpha)}$ в системе (19) все нестрогие неравенства обязаны быть равенствами. Тем самым, выполняются равенства

$$\frac{1}{a^{j-m}} x_m^{(\alpha)} = \dots = \frac{1}{a} x_{j+1}^{(\alpha)} = x_j^{(\alpha)} = a x_{j-1}^{(\alpha)} = \dots = a^{j-1} x_k^{(\alpha)}. \quad (20)$$

Если для вектора $\bar{x}^{(\alpha)}$ выполняется условие (20), то будем говорить, что в схеме (12) на отрезке $[x_m^{(\alpha)}, x_k^{(\alpha)}]$ достигается равенство.

Пусть системе неравенств (11) соответствует схема (12), в которой имеется более одной начальной точки. Рассмотрим тогда фрагмент схемы, содержащий две соседние начальные точки $a^{N-j-1}x_j$ и $a^{N-s-1}x_s$:

причем $m \neq 1$. Тогда для вектора $\bar{x}^{(\alpha)}$ достигаются равенства на отрезках $[x_m^{(\alpha)}, x_k^{(\alpha)}]$ и $[x_k^{(\alpha)}, x_t^{(\alpha)}]$. А так как эти отрезки пересекаются в точке $a^{N-k-1}x_k$, достигается равенство и на всем отрезке $[x_m^{(\alpha)}, x_t^{(\alpha)}]$. Таким образом, для нахождения вектора $\bar{x}^{(\alpha)}$, минимизирующего $L_1(\bar{x})$ в условиях (11), достаточно рассмотреть случай, когда соответствующая схема содержит ровно одну начальную точку. При этом и конечная точка должна быть одна, так как иначе в соответствующей схеме

последняя точка, $a^{N-2}x_1$, является фактически второй начальной точкой.

Осталось рассмотреть возможные случаи расположения начальной и конечной точек в схеме, включая случай, когда конечная точка является первой или последней точкой схемы (при этом $m = 1$).

Рассмотрим случай, когда конечная точка $a^{N-m-1}x_m$ не совпадает с последними двумя точками схемы $a^{N-3}x_2$ и $a^{N-2}x_1$:

В этом случае имеет место система неравенств

$$\begin{aligned} (1/a^{j-1})x_j &\leq \dots \leq (1/a)x_2 \leq x_1 \leq x_N \leq \dots \leq a^{N-m-1}x_m, \\ x_j &\leq (1/a)x_{j+1} \leq \dots \leq (1/a^{m-j})x_m \end{aligned} \quad (21)$$

Как и в доказательстве леммы 1, легко убедиться в том, что необходимым для вектора $\bar{x}^{(\alpha)}$, минимизирующего $L_1(\bar{x})$, является условие, когда в неравенствах системы (21) достигаются равенства. Исключение составляют последние неравенства цепочек, которые можно записать в виде $ax_{m-1} \leq x_m$ и $x_{m+1} \leq ax_m$. Если бы выполнялись равенства в обоих этих неравенствах, мы получили бы противоречивое равенство $x_1 = a^{N-2}x_1$. Отсюда следует, что для координат вектора $\bar{x}^{(\alpha)}$ справедливо одно из трех условий:

$$\begin{aligned} (1/a^{m-2})x_{m-1}^{(\alpha)} &= \dots = (1/a^j)x_{j+1}^{(\alpha)} = (1/a^{j-1})x_j^{(\alpha)} = \dots \\ &= (1/a)x_2^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha)} = x_N^{(\alpha)} = \dots = a^{N-m-1}x_m^{(\alpha)}, \\ (1/a^{m-1})x_m^{(\alpha)} &= \dots = (1/a^j)x_{j+1}^{(\alpha)} = (1/a^{j-1})x_j^{(\alpha)} = \dots \\ &= (1/a)x_2^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha)} = x_N^{(\alpha)} = \dots = a^{N-m-2}x_{m+1}^{(\alpha)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (1/a^{m-2})x_{m-1}^{(\alpha)} &= \dots = (1/a^j)x_{j+1}^{(\alpha)} = \dots = (1/a)x_2^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha)} = x_N^{(\alpha)} \\ &= a^{N-m-2}x_{m+1}^{(\alpha)} < a^{N-m-1}x_m^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Их можно переписать соответственно в виде

$$\begin{aligned} x_{m-1}^{(\alpha)} &= ax_{m-2}^{(\alpha)} = \dots = a^{m-3}x_2^{(\alpha)} = a^{m-2}x_1^{(\alpha)} \\ &= a^{m-2}x_N^{(\alpha)} = a^{m-2}x_{N-1}^{(\alpha)} = \dots = a^{N-3}x_m^{(\alpha)}, \\ x_m^{(\alpha)} &= ax_{m-1}^{(\alpha)} = \dots = a^{m-2}x_2^{(\alpha)} = a^{m-1}x_1^{(\alpha)} \\ &= a^{m-1}x_N^{(\alpha)} = a^{m-1}x_{N-1}^{(\alpha)} = \dots = a^{N-3}x_{m+1}^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x_{m-1}^{(\alpha)} &= ax_{m-2}^{(\alpha)} = \dots = a^{m-3}x_2^{(\alpha)} = a^{m-2}x_1^{(\alpha)} = a^{m-2}x_N^{(\alpha)} \\ &= a^{m-2}x_{N-1}^{(\alpha)} = \dots = a^{N-4}x_{m+1}^{(\alpha)} < a^{N-3}x_m^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (22)$$

На самом деле, последний случай, соответствующий тому, что в (21) последнее неравенство в каждой из двух цепочек строгое, невозможен. Дело в том, что в условиях (21) функция $L_1(\bar{x})$ имеет вид

$$L_1(\bar{x}) = p(x_m + \dots + x_{j+1} + x_N) + (1-p)(x_1 + \dots + x_{j-1} + x_m + \dots + x_{N-1}). \quad (23)$$

Поэтому действует тот же метод, приводящий к противоречию с условием выбора $\bar{x}^{(\alpha)}$, что и в лемме 1. А именно, достаточно рассмотреть вектор $\bar{x}'$, связанный с $\bar{x}^{(\alpha)}$ соотношениями $x'_s = x_s^{(\alpha)} + \varepsilon$ при $s \neq m$, $x'_m = x_m^{(\alpha)} - \varepsilon(N-1)$, выбрать ε таким, чтобы выполнялись условия (22), и сравнить значения $L_1(\bar{x}^{(\alpha)})$ и $L_1(\bar{x}')$, используя (23).

Каждый из двух оставшихся вариантов $\bar{x}^{(\alpha)}$ может быть получен путем разбиения множества точек схемы (12) на два подмножества, соответствующих двум цепочкам в (21), и последующим приравниванием значений точек в каждом подмножестве. Разбиение иллюстрируется схемой, на которой разорвано одно звено:

Таким разорванным звеном может быть любое из N звеньев схемы. Непосредственно проверяется, что множество вариантов $\bar{x}^{(\alpha)}$ совпадает с множеством векторов, приведенных в формулировке леммы. Индекс α указывает номер (по счету слева) разрываемого звена схемы. При этом охватываются и случаи, когда конечной точкой схемы является одна из точек $a^{N-3}x_2$ или $a^{N-2}x_1$. Лемма доказана.

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Лемма 3. Вектор $\bar{x}^{(\alpha)}$, $0 \leq \alpha \leq N-1$, определяемый условиями леммы 2, имеет следу-

ющие координаты:

$$\begin{aligned} x_1^{(0)} &= \frac{2p-1}{p-(2-3p)a^{N-2}}, \\ &\dots \\ x_{N-2}^{(0)} &= \frac{a^{N-3}(2p-1)}{p-(2-3p)a^{N-2}}, \\ x_N^{(0)} &= x_{N-1}^{(0)} = \frac{a^{N-2}(2p-1)}{p-(2-3p)a^{N-2}}, \end{aligned}$$

координаты $\bar{x}$ из (1) определяются формулами (9); при $2 \leq \alpha = k \leq N-1$

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= x_N^{(k)} = x_{N-1}^{(k)} = \frac{a^{k-2}(2p-1)}{p(1-a^{N-2}) + 2(2p-1)a^{k-2}}, \\ &\dots \\ x_{N-k}^{(k)} &= \frac{a^{N-3}(2p-1)}{p(1-a^{N-2}) + 2(2p-1)a^{k-2}}, \\ x_{N-k+1}^{(k)} &= \frac{(2p-1)}{p(1-a^{N-2}) + 2(2p-1)a^{k-2}}, \\ &\dots \\ x_{N-2}^{(k)} &= \frac{a^{k-3}(2p-1)}{p(1-a^{N-2}) + 2(2p-1)a^{k-2}}. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы остается вычислить $L_1(\bar{x}^{(\alpha)})$ для указанных вариантов векторов $\bar{x}^{(\alpha)}$ и найти среди полученных значений минимальное. Чтобы сделать это, заметим, что координаты всех N векторов $\bar{x}^{(\alpha)}$ удовлетворяют системе неравенств (13). При этом

$$L_1(\bar{x}^{(\alpha)}) = p - (2p-1)x_N^{(\alpha)}.$$

Поэтому достаточно найти

$$\max_{0 \leq \alpha \leq N-1} x_N^{(\alpha)} = x_N^{(l)},$$

и вычислить $L_1(\bar{x}^{(l)})$.

Используя лемму 3, получаем, что

$$\begin{aligned} x_N^{(s)} - x_N^{(0)} &= \frac{(2p-1)[p - a^{N-2}(1 - pa^{N-1})]}{(3p-1 - pa^{N-1})(p - (2-3p)a^{N-2})} > 0 \\ &\iff p - a^{N-2}(1 - pa^{N-1}) > 0. \end{aligned}$$

Пусть $b = a^{N-2}$. Тогда

$$p - a^{N-2}(1 - pa^{N-1}) = (1-p)b^2 - b + p > 0,$$

поскольку $0 < b < 1$, и корнями квадратного трехчлена $(1-p)b^2 - b + p$ являются $b_1 = 1$, $b_2 = 1/a > 1$. Аналогично,

$$\begin{aligned} x_N^{(1)} - x_N^{(k)} &= \frac{(2p-1)(p(1-a^{N-2}) + 2(2p-1)a^{k-2} - (3p-1-pa^{N-1})a^{k-2})}{(3p-1-pa^{N-1})(p(1-a^{N-2}) + 2(2p-1)a^{k-2})} > 0 \\ &\iff p(1-a^{N-2}) - a^{k-2}(1-p-pa^{N-1}) > 0 \\ &\iff (1-b)(p-a^{k-2}(1-p)) > 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\max_{0 \leq \alpha \leq N-1} x_N^{(\alpha)} = x_N^{(s)},$$

и $L_1(\bar{x}^{(s)})$ выражается формулой (16). Теорема доказана.

Наряду с введенными выше определениями вероятностей p_0 и p_1 используются и другие. Дело в том, что оценка этих вероятностей по формулам (4) и (6) в общем случае затруднительна. Это подтверждается тем, что (как показано в [2, 3]) вычисление p_0 и p_1 , а также соответствующих оптимальных стратегий защиты для A -кодов — это, по сути дела, решение матричных игр с матрицами весьма специфического вида. Хорошо известно, насколько сложны такие задачи. Значительно проще оцениваются вероятности успеха имитации и подмены в случае, когда используется единственная стратегия защиты — случайный и равновероятный выбор ключей A -кода. В этом случае вероятности p_0 и p_1 определяются формулами

$$\bar{p}_0 = \max_{m \in M} p_M(m) = \frac{1}{|E|} \max_{m \in M} |E(m)|, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \sum_{m \in M} p_M(m) p_S(m) \\ &= \sum_{m \in M} \max_{n \neq m} \sum_{e \in E(m,n)} p_E(e) p_S(e^{-1}(m)) \\ &= \frac{1}{|E|} \sum_{m \in M} \max_{n \neq m} \sum_{e \in E(m,n)} p_S(e^{-1}(m)). \end{aligned} \quad (25)$$

В частном случае, когда распределение $P(S)$ равномерно, формула (25) принимает вид

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{|E||S|} \sum_{m \in M} \max_{n \neq m} |E(m,n)|. \quad (26)$$

Определение вероятности успеха подмены по формулам (6) и (25) использует подход в среднем. Помимо этого, используется и подход в худшем случае, когда вероятность успеха подмены определяется как

$$\begin{aligned} p'_1 &= \min_{P(E)} \max_{m \in M} \max_{n \neq m} p_S(n | m) \\ &= \min_{P(E)} \max_{m \in M} \max_{n \neq m} \frac{1}{p_M(m)} \sum_{e \in E(m,n)} p_E(e) p_S(e^{-1}(m)), \end{aligned} \quad (27)$$

или (в случае, когда используется лишь равновероятный выбор ключей)

$$\bar{p}'_1 = \max_{m \in M} \max_{n \neq m} \frac{\sum_{e \in E(m,n)} p_S(e^{-1}(m))}{\sum_{e \in E(m)} p_S(e^{-1}(m))}. \quad (28)$$

В частном случае, когда и распределение $P(S)$ равномерно,

$$\bar{p}'_1 = \max_{m \in M} \max_{n \neq m} \frac{|E(m,n)|}{|E(m)|}. \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что справедливы неравенства $p_0 \leq \bar{p}_0$, $p_1 \leq \bar{p}_1$, $p_1 \leq p'_1$ и $p_1 \leq \bar{p}'_1$. Поэтому, если для конкретной конструкции A -кода удалось получить оценку стойкости в виде неравенств $\bar{p}_0 < \varepsilon$ и $\bar{p}_1 < \varepsilon$ ($p'_1 < \varepsilon$, $\bar{p}'_1 < \varepsilon$), то будет иметь место и оценка стойкости в виде неравенств $p_0 < \varepsilon$ и $p_1 < \varepsilon$. Следовательно, любое предложенное определение вероятностей успеха имитации и подмены имеет право на существование. Однако величины p_1 , $\bar{p}_1$ и p'_1 , $\bar{p}'_1$ могут значительно различаться. Проиллюстрируем это на примере рассмотренного A -кода.

Согласно (7), равномерное распределение $P(E)$, используемое в качестве стратегии защиты от подмены для рассматриваемого A -кода, дает возможность оппоненту добиться успеха с вероятностью

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{1}{N}(p + (N-2)\max\{p; 1-p\} + 1-p) \\ &= \frac{1}{N}((N-2)p + 1). \end{aligned}$$

При $p \rightarrow 1$ эта величина стремится к $(N-1)/N$, в то время как значение p_1 стремится к 0,5. Разность этих величин равна $(N-2)/(2N)$. При достаточно больших значениях N это практически 0,5. Конечно, данный A -код нельзя считать стойким, поскольку для него $\max\{p_0, p_1\} > 0,5$. Однако, если бы расхождение между вероятностями p_1 и $\bar{p}_1$ было таким же, как в рассмотренном примере, а величина $\max\{p_0, p_1\}$ не превосходила требуемого уровня стойкости ε , то такой A -код можно было бы признать стойким с позиции вероятностей p_0 и p_1 , но нельзя признать стойким с позиции вероятностей $\bar{p}_0$ и $\bar{p}_1$. Тем самым, использование для оценки стойкости A -кода вероятностей $\bar{p}_0$ и $\bar{p}_1$ может, вообще говоря, оставить за рамками стойких и те A -коды, для которых выполняется неравенство $\max\{p_0, p_1\} < \varepsilon$.

Вычислим, наконец, для данного A -кода величины p'_1 и $\bar{p}'_1$. Согласно определению, для нахождения вероятности p'_1 требуется вычислить минимум функции

$$\begin{aligned} L'_1(\bar{x}) = \max \left\{ \max \left(\frac{x_1}{x_1 + x_N}; \frac{x_N}{x_1 + x_N} \right); \max \left(\frac{ax_1}{ax_1 + x_2}; \frac{x_2}{px_1 + px_2} \right); \dots; \right. \\ \left. \max \left(\frac{ax_{N-2}}{ax_{N-2} + x_{N-1}}; \frac{x_{N-1}}{ax_{N-2} + x_{N-1}} \right); \max \left(\frac{x_{N-1}}{x_{N-1} + x_N}; \frac{x_N}{x_{N-1} + x_N} \right) \right\}. \quad (30) \end{aligned}$$

Можно убедиться в том, что $\min_{\bar{x} \in \Omega} L'_1(\bar{x})$ достигается на векторе

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N} \right)$$

и указанный минимум равен p . Следовательно, $p'_1 = \bar{p}'_1 = p$.

Приведем таблицу точных значений вероятностей p_1 , $\bar{p}_1$, p'_1 , $\bar{p}'_1$ для рассмотренного примера A -кода при $p = 0,6$, $p = 0,9$ и $N = 3, 4, 5, 6$.

$p = 0,6:$	N	3	4	5	6
	p_1	0,525	0,533	0,541	0,545
	$\bar{p}'_1$	0,533	0,550	0,560	0,566
	$\bar{p}'_1 = p'_1$	0,600	0,600	0,600	0,600
$p = 0,9:$	N	3	4	5	6
	p_1	0,521	0,522	0,523	0,524
	$\bar{p}'_1$	0,633	0,700	0,740	0,766
	$\bar{p}'_1 = p'_1$	0,900	0,900	0,900	0,900

Список литературы

1. Зубов А. Ю., *Математика кодов аутентификации*. Гелиос АРВ, Москва, 2007.
2. Зубов А. Ю., К теоретико-игровому подходу исследования кодов аутентификации. *Дискретная математика* (2009) **21**, №3, 45–72.
3. G. J. Simmons, A game theoretical model of digital message authentication. *Congressus Numerantium* (1982) **34**, 413–424.
4. Simmons G. J., Authentication theory/Coding theory. *Lect. Notes Comput. Sci.* (1985) **196**, 411–432.
5. Симмонс Г. Дж., Обзор методов аутентификации информации. *ТИИЭР* (1988) **76**, №5, 105–125.
6. Simmons G. J., A survey of information authentication. In: *Contemporary Cryptology: The Science of Information Integrity* (Simmons G. J., ed.). IEEE Press, New York, 1992, pp. 379–419.

Статья поступила 13.02.2008.