Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Сергеев, Быстрые алгоритмы для элементарных операций с комплексными степенными рядами, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 1, 17–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1082>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 10:58:27

Быстрые алгоритмы для элементарных операций с комплексными степенными рядами

© 2010 г. И. С. Сергеев

Показано, что инвертирование комплексного степенного ряда может быть выполнено асимптотически со сложностью $5/4$ умножений (если сравнивать верхние оценки). Кроме того показано, что извлечение квадратного корня выполняется асимптотически также со сложностью $5/4$, вычисление экспоненты — со сложностью $13/6$, а возведение в произвольную степень требует $41/12$ умножений.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, проекты 08-01-00863 и 08-01-00632а, программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, проект НШ 4470.2008.1, и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики», проект «Синтез и сложность управляющих систем».

1. Введение

В 1966 г. Кук [1] показал, что инвертирование (а следовательно, и деление) чисел может выполняться с такой же по порядку сложностью, как и умножение. Метод Кука является частным случаем дискретного метода последовательных приближений Ньютона–Рафсона, который позволяет вычислять различные элементарные функции, такие как логарифм, экспонента, квадратный корень (см. [2], гл. 9 в [3], [4]).

Метод последовательных приближений работает также и для степенных рядов. В определенном смысле, для степенных рядов он работает даже лучше, чем для чисел: например, логарифм степенного ряда можно вычислить с порядком сложности умножения, а для чисел такого результата получить не удастся (см., например, [2]).

Интерес к изучению эффективности метода последовательных приближений применительно к степенным рядам объясняется тем, что степенные ряды представляются теоретически более простым объектом для анализа, кроме того, сегодня арифметика степенных рядов (многочленов) приобретает прикладное значение.

В 1972 г. Зивекинг [5] опубликовал метод Кука для степенных рядов, вероятно, не зная о работе [1]. Впоследствии различные оценки эффективности метода последовательных приближений были получены Брентом и Кунгом в [2, 6] и других работах этих авторов.

Практический и теоретический интерес представляет минимизация мультипликативных констант в оценках сложности основных операций со степенными рядами (их удобно соотносить со сложностью базовой операции умножения). Так, Брент [2] указывает, что инвертирование, деление, извлечение квадратного корня, логарифмирование, вычисление

экспоненты и возведение в степень с произвольным показателем выполняются асимптотически не сложнее, чем 3 , 4 , $11/2$, 4 , $22/3$ и $34/3$ умножений соответственно (сравнивается сложность операций со степенными рядами по модулю x^n).

Эти оценки можно уточнить, считая, что умножение выполняется специальным способом. В таком случае можно использовать промежуточные результаты вычислений. Над кольцами, содержащими необходимое число корней из единицы (например, над $\mathbb{C}$), умножение рядов естественно выполнять при помощи дискретного преобразования Фурье (ДПФ) (см., например, [7], гл. 7), то есть асимптотически самым быстрым из известных методов. Для операций, перечисленных в предыдущем абзаце, в этой модели известны оценки, асимптотически эквивалентные сложности $3/2$, $5/3$, $11/6$, $5/3$, $7/3$ и 4 умножений (первая оценка доказана в [8, 9], вторая и пятая получены в [10], третья — в [9], четвертая и шестая следуют из методов, изложенных в [2]).

Для умножения над любым кольцом можно использовать метод Карацубы [11], который широко применяется на практике. Сложность операций в модели с методом умножения Карацубы изучалась в работе [12], где, в частности, были получены асимптотические оценки 1 , 1 и $3/4$ сложности умножения для операций инвертирования, деления и извлечения квадратного корня соответственно.

В настоящей работе рассматриваются операции над комплексными (и вещественными) степенными рядами в модели с использованием ДПФ. Стандартным образом результаты могут быть расширены на случай произвольного кольца. Для операций инвертирования, извлечения квадратного корня, вычисления экспоненты и возведения в степень с произвольным показателем получены оценки сложности, асимптотически эквивалентные сложности $5/4$, $5/4$, $13/6$ и $41/12$ умножений соответственно.

Основой для получения новых оценок является комбинация нескольких известных приемов и одного нового. Это, с одной стороны, приемы разбиения рядов на блоки, предложенные Бернштейном [9] и ван дер Хувеном [10], с другой — выполнение многократных умножений, как в методе Шёнхаге [8], с третьей — предлагаемый в настоящей работе прием вычислений с использованием двойных ДПФ. Основные результаты работы коротко изложены в [13].

Изложение построено следующим образом. В разделах 2–3 сообщаются необходимые сведения о сложности умножения и методе последовательных приближений. В разделе 4 изложены основные приемы вычислений, в том числе концепция двойных ДПФ (п. 4.2) и блочные методы (п. 4.3). Далее, в разделах 5–9 рассматриваются быстрые алгоритмы инвертирования, деления (в том числе деления многочленов с остатком), извлечения квадратного корня, вычисления экспоненты и возведения в степень. В разделе 10 собраны замечания о сложности решения линейных однородных дифференциальных уравнений (п. 10.1) и о мультипликативной сложности рассмотренных операций (п. 10.2).

2. Умножение

Для умножения в $\mathbb{C}[[x]]$ по модулю x^n справедлива оценка

$$M(n) \leq 6F(n) + O(n),$$

где

$$F(n) = \min_{m \geq n} F^\circ(m),$$

а $F^\circ(n)$ — сложность ДПФ порядка n .

Известные верхние оценки для $F^\circ(n)$: асимптотически $1,5n \log n$ (логарифмы здесь и дальше по тексту двоичные) операций над $\mathbf{C}$, или $(34/9)n \log n$ операций над $\mathbf{R}$ (см. [4, 14]) в том случае, когда $n = 2^k$. Добавим, что сложность ДПФ с вещественным набором коэффициентов асимптотически не превосходит $(17/9)n \log n$ операций над $\mathbf{R}$ (см. также [4]). Из наблюдения Шёнхаге [15] следует, что эти оценки остаются в силе и для тех чисел n , которые имеют вид

$$n = 2^k n_0, \quad n_0 = O(\log n). \quad (1)$$

Оценка $1,5n \log n$ операций над $\mathbf{C}$ может быть также доказана для любого n с использованием ДПФ специального вида (см. [16]). Все перечисленные оценки, следовательно, справедливы для $F(n)$ при любом n .

Выражение оценок сложности рассматриваемых ниже операций через $F(n)$ корректно в следующем предположении:

$$F(an) - aF(n) = O(an),$$

где $a \in \mathbf{N}$, $a = O(\log n)$. В случае невыполнения данного условия следует $F(n)$ в оценках сложности заменить функцией $\bar{F}(n) \geq F(n)$, удовлетворяющей ему.

Далее во всех алгоритмах параметр n должен выбираться в виде (1), что не будет специально оговариваться.

3. Метод последовательных приближений

Пусть требуется найти первые n членов степенного ряда $g \in \mathbf{C}[[x]]$, который является решением уравнения

$$\varphi[x, g] = h, \quad (2)$$

где $\varphi[x, y]$ — степенной ряд переменных x и y , h — степенной ряд переменной x , а запись $\psi[f]$ означает подстановку в степенной ряд ψ ряда f вместо переменной.

Для произвольного степенного ряда f введем обозначение

$$f_{..n} = f \bmod x^n.$$

Пусть Δg обозначает формальную производную ряда g , а $\Delta_x f$ — производную ряда f нескольких переменных по переменной x . Справедлив следующий аналог формулы Тейлора.

Лемма 1. Для произвольных рядов $\varphi \in \mathbf{C}[[x, y]]$, $g, u \in \mathbf{C}[[x]]$, где $u_{..1} = 0$, таких, что либо $g_{..1} = 0$, либо существует $k \in \mathbf{N}$, при котором $\Delta_y^k \varphi = 0$, справедливо равенство

$$\varphi[x, g + u] = \varphi[x, g] + (\Delta_y \varphi)[x, g]u + (\Delta_y^2 \varphi)[x, g]u^2/2 + \dots$$

Доказательство этой леммы может быть восстановлено по гл. 2 в [17], где она приводится в несколько отличной формулировке.

Пусть известно $g_{..m}$, где g — решение (2). Следующая лемма, которая фактически содержится в [17], показывает, как, зная $g_{..m}$, получить более точное приближение $g_{..m+n}$.

Лемма 2. Пусть $\varphi \in \mathbf{C}[[x, y]]$, $g, h \in \mathbf{C}[[x]]$, $\varphi[x, g] = h$, ряды φ и g удовлетворяют условиям леммы 1, и $(\Delta_y \varphi)_{..1} \neq 0$. Тогда для $m, n \in \mathbf{N}$ при условии, что либо $m \geq n$, либо $\Delta_y^2 \varphi = 0$, справедлива формула

$$g_{..m+n} = g_{..m} + (h - \varphi[x, g_{..m}])_{..m+n}((\Delta_y \varphi)[x, g_{..n}])_{..n}^{-1} \bmod x^{m+n}. \quad (3)$$

Доказательство. Положим

$$g = g_{..m} + x^m g'.$$

Условия леммы гарантируют выполнение вытекающего из леммы 1 равенства

$$\begin{aligned} (\varphi[x, g_{..m}])_{..m+n} &= (\varphi[x, g - x^m g'])_{..m+n} \\ &= \varphi[x, g] - (\Delta_y \varphi)[x, g] x^m g' \bmod x^{m+n} \\ &= h - x^m ((\Delta_y \varphi)[x, g_{..n}])_{..n} g'_{..n} \bmod x^{m+n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (h - \varphi[x, g_{..m}])_{..m+n} ((\Delta_y \varphi)[x, g_{..n}])_{..n}^{-1} \bmod x^{m+n} \\ = x^m ((\Delta_y \varphi)[x, g_{..n}])_{..n} ((\Delta_y \varphi)[x, g_{..n}])_{..n}^{-1} g'_{..n} \bmod x^{m+n} \\ = x^m g'_{..n} \bmod x^{m+n}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Условие $(\Delta_y \varphi)_{..1} \neq 0$ необходимо для существования обратного к $(\Delta_y \varphi)[x, g_{..n}]$ ряда.

Формула (3) фактически является дискретным вариантом итерации метода касательных Ньютона—Рафсона.

Более подробное изложение метода последовательных приближений можно найти в п. 4.7 в [18], главе 2 в [17], главе 9 в [3].

Рассмотрим следующие известные следствия из леммы 2, которые будут использоваться далее.

1. Инвертирование. Обратный к ряду f , $f_{..1} \neq 0$, степенной ряд r является решением задачи $rf = 1$ (в обозначениях (2) $\varphi[x, y] = yf[x]$, $h = 1$). Из леммы 2 вытекает справедливая при любых m, n формула

$$r_{..m+n} = r_{..m} + r_{..n}(1 - r_{..m}f_{..m+n}) \bmod x^{m+n}. \quad (4)$$

В [19] указано, что вариант этой формулы применялся еще Шульцем для обращения матриц в работе [20] 1933 года.

2. Деление. Сохраняем и далее обозначение $r = 1/f$. Обозначим через s частное от деления ряда h на f , оно является решением задачи $sf = h$ (где $\varphi[x, y] = yf[x]$), для которой лемма 2 дает справедливую при любых m, n итерацию

$$s_{..m+n} = s_{..m} + r_{..n}(h_{..m+n} - s_{..m}f_{..m+n}) \bmod x^{m+n}. \quad (5)$$

3. Квадратный корень. Пусть требуется найти ряд $f = \sqrt{h}$, $h_{..1} = 1$. Заметим, что если добавить в базис операцию извлечения квадратного корня в $\mathbb{C}$, то достаточным является ограничение $h_{..1} \neq 0$.

Ряд f является решением задачи $f^2 = h$ (в обозначениях (2) $\varphi[x, y] = y^2$), для которой из леммы 2 вытекает справедливая при $m \geq n$ формула

$$f_{..m+n} = f_{..m} + \frac{(h_{..m+n} - f_{..m}^2)r_{..n}}{2} \bmod x^{m+n}. \quad (6)$$

4. Логарифм. Через $\mathbf{J}g$ обозначим формальный интеграл ряда g со свободным членом $(\mathbf{J}g)_{..1} = 0$. Как обычно, формальный логарифм $\ln g$ ряда g , $g_{..1} = 1$, определяется как

$$\ln g = (g - 1) - (g - 1)^2/2 + (g - 1)^3/3 - \dots$$

Брент [2] заметил, что сложность логарифмирования степенного ряда по модулю x^n не более чем на $O(n)$ превосходит сложность деления, благодаря соотношению

$$\ln g = \mathbf{J}(\Delta g/g). \quad (7)$$

5. Экспонента. Формальная экспонента e^g ряда g , где $g_{..1} = 0$, определяется как

$$e^g = 1 + g + g^2/2! + g^3/3! + \dots$$

Пусть $f = e^h$. Решая задачу $\ln f = h$, где $h_{..1} = 0$, методом леммы 2 (в которой $\varphi[x, y] = \ln y$), получаем справедливую при $m \geq n$ формулу

$$f_{..m+n} = f_{..m} + f_{..n}(h - \ln f_{..m})_{..m+n} \bmod x^{m+n}. \quad (8)$$

6. Возведение в степень. Пусть требуется возвести ряд h , $h_{..1} = 1$, в произвольную степень $C \in \mathbb{C}$. Ряд $f = h^C$ может быть найден как решение задачи $\ln f = C \ln h$, для которой лемма 2 (где $\varphi[x, y] = \ln y$ и $C \ln h$ вместо h) дает верную при $m \geq n$ формулу

$$f_{..m+n} = f_{..m} + f_{..n}(C \ln h - \ln f_{..m})_{..m+n} \bmod x^{m+n}. \quad (9)$$

4. Эффективное применение ДПФ

Напомним, что дискретное преобразование Фурье (ДПФ) порядка n для многочлена $g(x)$ определяется как вектор значений $g(x)$ в точках ω_n^k , $k = 0, \dots, n-1$, где ω_n — примитивный корень степени n из единицы в $\mathbb{C}$. Полученному вектору значений можно сопоставить многочлен

$$g^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g(\omega_n^k) x^k$$

степени $n-1$. Справедливо соотношение

$$n(g(x) \bmod (x^n - 1)) = \sum_{k=0}^{n-1} g^*(\omega_n^{n-1-k}) x^k,$$

которое позволяет восстановить многочлен минимальной степени, принимающий заданный набор значений в точках ω_n^k . Соответствующее восстанавливающее преобразование называется обратным ДПФ. Сложность прямого ДПФ порядка n (если оно применяется к многочлену степени $O(n)$) и обратного ДПФ различаются на $O(n)$. Более подробно о ДПФ см. гл. 7 в [7] и гл. 8 в [3].

Прежде чем переходить к изложению алгоритмов, перечислим некоторые приемы, позволяющие в ряде случаев сократить сложность вычислений с применением ДПФ. Через $(g)_n^*$ будем обозначать вектор значений ДПФ порядка n для многочлена $g(x)$. Будем также пользоваться соглашением, что операции с векторами значений выполняются покомпонентно.

4.1. Элементарные приемы

Произведение двух многочленов $a(x)$ и $b(x)$, $\deg a + \deg b < n$, можно вычислить при помощи трех ДПФ порядка n и $O(n)$ прочих операций. Последовательность вычислений здесь следующая. Вычисляются $(a)_n^*$ и $(b)_n^*$ посредством двух ДПФ порядка n . Затем вычисляется $(ab)_n^* = (a)_n^*(b)_n^*$. Окончательно, при помощи обратного ДПФ восстанавливается произведение $a(x)b(x)$.

Следующий прием позволяет экономно вычислять часть коэффициентов произведения. Заменяем в указанной выше схеме умножения a на b ДПФ порядка n на ДПФ порядка $n - k$, где $k < n/2$. В результате найдем многочлен

$$c(x) = a(x)b(x) \bmod (x^{n-k} - 1) = (ab)_{..n-k} + \lfloor ab/x^{n-k} \rfloor, \quad (10)$$

где $\lfloor f/x^m \rfloor$ обозначает $(f - f_{..m})/x^m$. Очевидно, $n - 2k$ коэффициентов многочлена c (при степенях $x^k, \dots, x^{n-k-1}$) совпадают с соответствующими коэффициентами многочлена ab . Если дополнительно известны младшие k коэффициентов ab , то после вычитания $(ab)_{..k}$ из правой части (10), определяются оставшиеся коэффициенты произведения:

$$\lfloor ab/x^{n-k} \rfloor = (c - ab)_{..k}.$$

Свойство линейности ДПФ можно использовать для экономного вычисления выражений вида

$$h(x) = a(x)b(x) + c(x)d(x)$$

(если $\deg(ab) \approx \deg(cd)$). Вместо того, чтобы умножать a на b и c на d по отдельности, и затем произведения складывать, можно операцию сложения произвести с векторами значений ДПФ и сэкономить одно обратное ДПФ, восстановив многочлен h из вектора значений $(h)_n^* = (ab)_n^* + (cd)_n^*$.

4.2. Двойное ДПФ

Отметим еще одно наблюдение. Пусть один и тот же многочлен $g(x)$ является сомножителем в двух произведениях степени $n - 1$ и степени $n + m - 1$. Очевидный способ вычислений состоит в применении ДПФ порядка n для первого умножения и ДПФ порядка $n + m$ для второго. Сложность вычисления $(g)_n^*$ и $(g)_{n+m}^*$ в данном способе оценивается асимптотически как $F^\circ(n) + F^\circ(n + m)$.

В некоторых случаях последнюю оценку можно уточнить, выделив общую часть двух ДПФ. Известно [21], что ДПФ составного порядка kd сводится к вычислению k ДПФ порядка d , d ДПФ порядка k и kd умножениям в $\mathbb{C}$, то есть

$$F^\circ(kd) \leq kF^\circ(d) + dF^\circ(k) + O(kd).$$

Положим

$$d = \text{НОД}(n, m).$$

Тогда при вычислении $(g)_n^*$ и $(g)_{n+m}^*$ указанным методом одно из ДПФ порядка d , а именно то, которое вычисляет $(g)_d^*$, является общим. В случае $d \asymp m \asymp n$ оценка сложности принимает вид $(2n + m - d)F^\circ(d)/d + O(n + m)$, где символом $\asymp$ обозначается равенство по порядку. Так, в типичном случае $m = n/2$ тривиальная оценка $5F^\circ(m)$

сокращается до $4F^\circ(m)$. Ниже мы покажем, что подходящим образом модифицированная задача может быть решена с асимптотической сложностью $3F^\circ(m)$, а в общем случае фактически со сложностью ДПФ порядка $n + m$.

Рассмотрим следующую модификацию ДПФ, которую мы назовем двойным ДПФ. Вектор значений двойного ДПФ порядка (n, m) определяется следующим образом: первые n компонент образуют вектор значений ДПФ порядка n , а остальные m — вектор значений композиции замены переменной $x \rightarrow \zeta x$ и ДПФ порядка m , где ζ — подходящее комплексное число. Другими словами, двойное ДПФ вычисляет вектор значений многочлена $g(x)$ в точках ω_n^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ и $\zeta \omega_m^k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, такой вектор будем обозначать через $(g)_{n,m}^*$. Для существования всюду определенного обратного преобразования необходимо и достаточно, чтобы все точки в указанном наборе были различны — это, как легко проверить, равносильно условию $\zeta \neq 0$, $\zeta^{\text{НОК}(m,n)} \neq 1$.

Из определения видно, что двойное ДПФ порядка (n, m) может быть выполнено со сложностью $F^\circ(n) + F^\circ(m) + O(n + m)$. Покажем, что то же справедливо и в отношении обратного преобразования.

Теорема 1. Обратное к двойному ДПФ порядка (n, m) преобразование может быть реализовано за $F^\circ(n) + F^\circ(m) + O(n + m)$ операций.

Доказательство. Пусть задан вектор значений $(f)_{n,m}^*$ двойного ДПФ для многочлена f степени не выше $n + m - 1$. Искомые коэффициенты многочлена при соответствующих степенях x^i обозначим через f_i .

Применяя обратное ДПФ порядка n к первым n компонентам вектора $(f)_{n,m}^*$, находим многочлен

$$a(x) = f(x) \bmod (x^n - 1).$$

Аналогично, применяя обратное ДПФ порядка m к последним m компонентам вектора $(f)_{n,m}^*$, восстанавливаем многочлен $f(\zeta x) \bmod (x^m - 1)$.

Рассмотрим случай $n \geq m$. Подстановка x/ζ вместо x переводит многочлен $f(\zeta x) \bmod (x^m - 1)$ в многочлен

$$b(x) = f(x) \bmod (x^m - \zeta^m).$$

Указанная подстановка реализуется со сложностью $O(m)$.

Остается показать, что по остаткам $a(x)$ и $b(x)$ многочлен $f(x)$ может быть вычислен со сложностью $O(n + m)$.

Старшие $n - m$ коэффициентов многочлена $a(x)$ совпадают со средними коэффициентами $f(x)$ (см. выше п. 4.1). Для остальных $2m$ коэффициентов $f(x)$ (после исключения известных) справедлива система линейных уравнений вида

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{E}_m \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{T}_m \end{bmatrix} F = B, \quad (11)$$

где $\mathbf{E}_m$ — единичная $m \times m$ матрица,

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} & & \zeta^{km} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \zeta^{km} \\ \zeta^{(k+1)m} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \zeta^{(k+1)m} & & \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ f_n \\ \vdots \\ f_{n+m-1} \end{bmatrix}$$

Рис. 1.

(в матрице $\mathbf{T}_m$ ненулевой является только одна циклическая диагональ), f_i — коэффициент $f(x)$ при x^i , $k = \lfloor n/m \rfloor$.

В случае $m \mid n$ матрица $\mathbf{T}_m$ является диагональной, и методом Гаусса система (11), очевидно, решается за $O(m)$ операций. В противном случае, исключая из уравнений нижней половины системы (11) первые m неизвестных (для этого требуется выполнить m вычитаний в $\mathbf{C}$), приходим к системе

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{E}_m \\ 0 & \mathbf{Z}_m \end{bmatrix} F = B', \quad (12)$$

где

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{T}_m - \mathbf{E}_m.$$

Для краткости будем говорить, что матрица имеет тип Z , если у нее все элементы, расположенные за пределами главной и одной из параллельных ей циклических диагоналей, равны нулю. В частности, матрица $\mathbf{Z}_m$ имеет тип Z .

После разрешения подсистемы системы (12) с матрицей $\mathbf{Z}_m$ относительно переменных $f_n, \dots, f_{n+m-1}$, оставшиеся неизвестные могут быть найдены за $O(m)$ операций.

Лемма 3. Сложность решения системы линейных уравнений с $n \times n$ матрицей типа Z составляет $O(n)$ (подразумевается существование решения).

Доказательство. Пусть k — число элементов циклической диагонали, расположенных под главной диагональю матрицы. Без ограничения общности предположим, что $k \leq n/2$. В случае $k > n/2$ достаточно перейти к эквивалентной системе с транспонированной матрицей и перевернутыми векторами неизвестных и свободных членов.

Методом Гаусса будем последовательно исключать крайние левые вхождения ненулевых элементов в нижних k строках. Один проход этих строк выполняется со сложностью $O(k)$. При этом диагональ с ненулевыми элементами перемещается на k позиций вправо. Выполняется $\lfloor n/k \rfloor$ таких шагов: на последнем шаге исключение применяется только к элементам, расположенным за пределами правого нижнего квадрата размера $k \times k$. Описанный процесс схематически изображен на рис. 1 (диагональными линиями отмечены вхождения ненулевых элементов). По построению, в результате правая нижняя подматрица размера $k \times k$ будет иметь тип Z .

При условии разрешения полученной подсистемы относительно последних k переменных оставшиеся неизвестные вычисляются со сложностью $O(n)$. Обозначая через $T(n)$ функцию сложности решения системы с матрицей размера $n \times n$, получаем рекуррентное неравенство

$$T(n) \leq T(k) + O(n) \leq T(n/2) + O(n),$$

из которого следует, что

$$T(n) = O(n).$$

Лемма доказана.

Доказательством леммы завершается рассмотрение случая $n \geq m$ теоремы 1. В случае $n < m$ строим систему линейных уравнений относительно коэффициентов многочлена $f(\zeta x)$, предварительно вычислив

$$(f(x) \bmod (x^n - 1))|_{x \rightarrow \zeta x} = f(\zeta x) \bmod (x^n - \zeta^{-n}).$$

К полученной системе применимы проведенные для первого случая рассуждения. Теорема 1 доказана.

Таким образом, вместо вычисления $(g)_n^*$ и $(g)_{n+m}^*$ в примере из начала пункта можно вычислить $(g)_{n,m}^*$ со сложностью $F^\circ(n) + F^\circ(m) + O(n + m)$ (то есть асимптотически $3F^\circ(m)$ в случае $m = n/2$).

Двойное ДПФ не обладает указанным в п. 4.1 свойством обычного ДПФ неполного порядка вычислять часть средних коэффициентов произведения. Однако справедлив более слабый аналог этого свойства.

Пусть

$$\deg a + \deg b < n$$

и известны младшие k коэффициентов произведения $a(x)b(x)$. Тогда остальные коэффициенты произведения можно вычислить при помощи трех двойных ДПФ (двух прямых и одного обратного) порядка (n', m') и $O(n)$ прочих операций, где

$$n' + m' = n - k, \quad k \leq \min\{m', n'\}.$$

Действительно, положим

$$a(x)b(x) = (ab)_{..n-k} + x^{n-k}h(x), \quad \deg h < k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} c(x) &= a(x)b(x) \bmod (x^{n'} - 1)(x^{m'} - \zeta^{m'}) \\ &= (ab)_{..n-k} - h(x)(\zeta^{m'}x^{n'} + x^{m'} - \zeta^{m'}). \end{aligned}$$

Зная $c(x)$ и $(ab)_{..k}$, можно найти

$$h(x) = \zeta^{-m'}(c - ab)_{..k},$$

а затем и остальные коэффициенты многочлена ab .

Для нас далее будет важно уточнение этого свойства в случае, когда двойное ДПФ порядка $(2n, n)$ используется для нахождения коэффициентов многочлена степени не выше $5n - 1$.

Лемма 4. Пусть известен вектор значений двойного ДПФ порядка $(2n, n)$ для многочлена f , $\deg f < 5n$, и также известен многочлен $f_{..2n}$. Тогда коэффициенты f могут быть вычислены за $F^\circ(2n) + F^\circ(n) + O(n)$ операций.

Доказательство. Применяя обратное ДПФ порядка $(2n, n)$, находим многочлен

$$c(x) = f(x) \bmod (x^{2n} - 1)(x^n - \zeta^n).$$

Очевидно, коэффициент многочлена $c(x)$ при x^{jn+i} , где $j = 0, 1, 2$, а $i = 0, 1, \dots, n-1$, является линейной комбинацией коэффициентов f_{jn+i} , f_{3n+i} и f_{4n+i} (через f_k обозначается коэффициент $f(x)$ при x^k). Таким образом, получаем систему линейных уравнений относительно $3n$ неизвестных коэффициентов многочлена $f(x)$, которая имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_n & \mathbf{D}_n^1 & \mathbf{D}_n^2 \\ 0 & \mathbf{D}_n^3 & \mathbf{D}_n^4 \\ 0 & \mathbf{D}_n^5 & \mathbf{D}_n^6 \end{bmatrix} F = B, \quad F = \begin{bmatrix} f_{2n} \\ \vdots \\ f_{5n-1} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{D}_n^i$, $i = 1, \dots, 6$, — диагональные $n \times n$ матрицы. Для решения указанной системы методом Гаусса достаточно $O(n)$ операций. Лемма доказана.

По аналогии с двойным ДПФ можно определить и тройное ДПФ, и ДПФ большей кратности. Например, вектор значений тройного ДПФ порядка (n, m, p) определяется следующим образом: первые $n + m$ компонент образуют вектор значений двойного ДПФ порядка (n, m) , а остальные p — вектор значений композиции замены переменной $x \rightarrow \eta x$ и ДПФ порядка p , где η — подходящее комплексное число.

В действительности, далее будет использоваться только тройное ДПФ порядка $(2n, n, n)$. Несложно проверить, что обратное к нему преобразование можно выполнить за $F^\circ(2n) + 2F^\circ(n) + O(n)$ операций. На самом деле, при выборе параметров $\zeta = \omega_{4n}$ и $\eta = \omega_{4n}^3$ указанное тройное ДПФ с точностью до перестановки компонент вектора значений совпадает с ДПФ порядка $4n$, что позволяет избежать накладных расходов, связанных с решением системы линейных уравнений.

Аналогично, вместо наиболее употребимого далее двойного ДПФ порядка $(2n, n)$, возможно, иногда целесообразно использовать тройное ДПФ порядка (n, n, n) с параметрами $\zeta = \omega_{3n}$ и $\eta = \omega_{3n}^2$, поскольку такое ДПФ с точностью до перестановки компонент вектора значений совпадает с ДПФ порядка $3n$.

4.3. Разбиение на блоки

Два эффективных способа организации итерационных вычислений со степенными рядами, в которых используется подходящее разбиение рядов на блоки, были разработаны Бернштейном [9] и ван дер Хувеном [10]. Далее для краткости эти способы мы будем называть методом *A* и методом *B* соответственно.

4.3.1. Метод A

Рассмотрим следующий пример. Пусть требуется перемножить два многочлена (степенных ряда) f и g по модулю x^{kn} . Разобьем f и g на блоки длины n :

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \dots, \\ g &= b_0 + b_1 x^n + b_2 x^{2n} + \dots, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\deg a_i, b_i < n$. Тогда

$$fg = c_0 + c_1x^n + c_2x^{2n} + \dots, \quad (14)$$

где

$$c_i = \sum_{\lambda+\mu=i} a_\lambda b_\mu \quad (15)$$

и $\deg c_i < 2n$. Вычисление можно произвести следующим образом. При помощи $2k$ ДПФ порядка $2n$ найти все $(a_i)_{2n}^*$ и $(b_i)_{2n}^*$, $i < k$. Опираясь на свойство линейности ДПФ, по формуле (15) вычислить все $(c_i)_{2n}^*$, что выполняется за $O(nM(k))$ операций (так как вектор значений многочленов c_i в фиксированной точке является сверткой векторов значений a_i и b_i в той же точке). Далее находятся все многочлены c_i , $i < k$, посредством k обратных ДПФ порядка $2n$. Окончательно, многочлен $fg \bmod x^{kn}$ восстанавливается по формуле (14) за $O(kn)$ операций. Общая сложность вычислений оценивается как $3kF^\circ(2n) + O(nk \log k)$. (В [9] указан худший остаточный член ввиду реализации свертки стандартным алгоритмом.)

Такой способ вычислений будем называть методом A , более конкретно, методом $A-2n$, в соответствии с порядком используемых ДПФ. В примере выше он асимптотически не дает выигрыша по сравнению со стандартным методом сложности $3F^\circ(2kn) + O(kn)$, однако применение указанного приема внутри итерационного процесса может приводить к экономии за счет многократного использования результатов промежуточных вычислений. По аналогии можно рассматривать также метод $A-3n$, предназначенный для вычисления тройных произведений, и метод $A-(2n, n)$, в котором используются двойные ДПФ порядка $(2n, n)$, эффективные для тех алгоритмов, где выполняются как обычные, так и тройные умножения.

4.3.2. Метод B

Вернемся к примеру умножения степенных рядов f и g по модулю x^{kn} . Пусть

$$fg = d_0 + d_1x^n + d_2x^{2n} + \dots,$$

где $\deg d_i < n$. Предположим, что нам надо вычислить не все d_i , $i < k$, а только один блок d_j . Поступая как выше (см. (14)), мы восстанавливаем c_{j-1} и c_j при помощи двух ДПФ порядка $2n$ и затем находим

$$d_j = \lfloor c_{j-1}/x^n \rfloor + c_j \bmod x^n.$$

Ван дер Хувен [10] заметил, что одно ДПФ можно сэкономить, если воспользоваться формулой

$$d_j = \lfloor (\xi_j b_0 + \xi_{j-1} b_1 + \dots + \xi_0 b_j)/x^n \rfloor \bmod x^n, \quad (16)$$

где $\xi_0 = a_0x^n$ и $\xi_i = a_{i-1} + a_i x^n$ при $i > 0$, а a_i и b_i взяты из (13). Вычисление по формуле (16) состоит в нахождении средних n коэффициентов суммы $\sum \xi_\lambda b_{j-\lambda}$ (при степенях $x^n, \dots, x^{2n-1}$), которая является многочленом степени $3n-2$, поэтому применение ДПФ порядка $2n$ корректно, см. (10).

В рамках той же задачи умножения рядов f и g по модулю x^{kn} дополнительно предположим, что блоки a_j и b_j становятся известными только после того, как вычислен

очередной блок d_{j-1} произведения fg . Последовательное вычисление d_j , $j = 0, \dots, k-1$, требует $3kF^\circ(2n) + O(k^2n)$ операций. На j -м шаге выполняется по три ДПФ порядка $2n$ и $O(jn)$ операций при вычислении $(\sum \xi_\lambda b_{j-\lambda})_{2n}^*$ по формуле (16). Метод работы [22] позволяет указать остаточный член в виде $O(kne^{2\sqrt{\log \log k}} \log k)$. Если k — слабо растущая относительно n функция, то произведение вычисляется асимптотически со сложностью стандартного способа.

Ван дер Хувен [10] предложил этот метод (назовем его методом B или $B-2n$) для алгоритмов, основанных на методе последовательных приближений, и продемонстрировал его эффективность на примерах задач деления и решения линейных однородных дифференциальных уравнений, в частности, вычисления экспоненты.

Метод B несложно распространить на вычисление тройных произведений, используя ДПФ порядка $3n$. Пусть вычисляется произведение степенных рядов f , g и h , которые разбиты на блоки a_i , b_i и c_i длины n соответственно. Положим

$$fgh = d_0 + d_1x^n + d_2x^{2n} + \dots,$$

где $\deg d_i < n$.

Для $i \geq 0$ введем обозначение

$$\xi_i = a_{i-2} + a_{i-1}x^n + a_ix^{2n},$$

полагая $a_{-2} = a_{-1} = 0$. Пусть

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \sum_{\lambda+\mu+\nu=j} a_\lambda b_\mu c_\nu, \\ \delta_j &= \sum_{\lambda+\mu+\nu=j} \xi_\lambda b_\mu c_\nu. \end{aligned}$$

В силу определения многочленов ξ_i , справедливо равенство

$$\delta_j = \gamma_{j-2} + \gamma_{j-1}x^n + \gamma_jx^{2n}, \quad (17)$$

где полагается $\gamma_{-2} = \gamma_{-1} = 0$. Учитывая, что

$$d_j = \gamma_j + \lfloor \gamma_{j-1}/x^n \rfloor + \lfloor \gamma_{j-2}/x^{2n} \rfloor \bmod x^n,$$

получаем равенство

$$d_j = \lfloor \delta_j/x^{2n} \rfloor \bmod x^n,$$

то есть коэффициенты многочлена d_j совпадают с коэффициентами многочлена δ_j при степенях $x^{2n}, \dots, x^{3n-1}$. Следовательно (см. п. 4.1), они могут быть восстановлены из вектора значений ДПФ порядка $3n$ для многочлена δ_j .

Указанное в п. 4.2 ограничение, присущее двойному ДПФ, не позволяет использовать вместо ДПФ порядка $3n$ двойное ДПФ порядка $(2n, n)$ в вышеприведенной схеме вычислений. Это ограничение, впрочем, можно преодолеть в случае, когда задача состоит в последовательном нахождении всех d_j , начиная с $j = 0$.

Действительно, согласно (17), младшие $2n$ коэффициентов многочлена δ_j зависят только от коэффициентов многочленов γ_{j-1} и γ_{j-2} . Исходя из (17), несложно проверить, что многочлен γ_j выражается через многочлены δ_i , $i \leq j$. Следовательно, младшие $2n$ коэффициентов многочлена δ_j могут быть найдены, если известны многочлены δ_i (или γ_i) при $i < j$. Поэтому, согласно лемме 4, многочлен δ_j может быть восстановлен целиком

из вектора значений двойного ДПФ порядка $(2n, n)$ при условии, что многочлены δ_i (или γ_i), где $i < j$, вычислены.

Таким образом, в случае использования двойных ДПФ порядка $(2n, n)$ рассматриваемую схему вычислений достаточно дополнить вычислением многочленов δ_j (или γ_j).

Остаточный член в оценке сложности вычисления блоков d_j , $j = 0, 1, \dots, k-1$, можно указать в виде $O(k^2n)$. Он определяется вычислением векторов значений ДПФ для многочленов δ_j на j -м шаге, для этого требуется выполнить $O(jn)$ операций.

4.3.3. Тройное умножение специального вида

Рассмотрим задачу вычисления блоков d_i в произведении вида

$$f \lfloor gh/x^{ln} \rfloor = d_0 + d_1x^n + d_2x^{2n} + \dots, \quad (18)$$

где степенные ряды f , g и h разбиты на блоки a_i , b_i и c_i длины n соответственно. Укажем способ, не использующий вычисления произведения gh и подходящий для реализации методом A - $3n$ или A -($2n, n$). В некоторых случаях такой способ позволяет получить выигрыш, что будет видно на примере алгоритма вычисления экспоненты из п. 8.2.

Осложняющим обстоятельством для применения блочных методов в данном случае является своего рода граничный эффект, возникающий от укорачивания внутреннего произведения gh . С целью учета этого эффекта положим

$$\theta = \left\lfloor \sum_{\lambda+\mu=l-1} b_\lambda c_\mu / x^n \right\rfloor.$$

Тогда

$$\lfloor gh/x^{ln} \rfloor = u_0 + u_1x^n + u_2x^{2n} + \dots,$$

где

$$u_0 = \theta + \sum_{\lambda+\mu=l} b_\lambda c_\mu, \quad u_i = \sum_{\lambda+\mu=l+i} b_\lambda c_\mu, \quad i > 0.$$

Теперь искомое произведение может быть найдено как

$$f \lfloor gh/x^{ln} \rfloor = \delta_0 + \delta_1x^n + \delta_2x^{2n} + \dots, \quad \delta_i = \sum_{\lambda+\mu=i} a_\lambda u_\mu,$$

где $\deg \delta_i < 3n$. Таким образом, для вычисления многочленов δ_i можно использовать ДПФ порядка $3n$ или двойные ДПФ порядка $(2n, n)$.

В тех случаях, когда требуется вычислить один первый блок длины n произведения (18) (как в методе B), мы будем применять разбиение рядов на блоки длины $o(n)$ и проводить вычисления в духе метода A . Пример алгоритма, в котором используется этот прием, будет предъявлен в разделе 9 для реализации возведения в степень.

Указанная техника позволяет вычислять блок произведения вида (18) фактически с такой же сложностью, как и блок обычного тройного произведения fgh .

Ниже будет показано, что методы, основанные на блочном разбиении, являются эффективными с асимптотической точки зрения. Бернштейн [9] однако отмечает, что они (имелся в виду метод A , но, вероятно, то же справедливо и в отношении метода B) не столь эффективны с точки зрения прикладных вычислений (остаточный член вносит весомый вклад в сложность при малых значениях n). Поэтому в большинстве случаев мы также будем уделять внимание модификациям стандартного метода, основанным на материале п. 4.1, 4.2.

5. Инвертирование

Для нахождения обратного к ряду f степенного ряда r обычно (например, [1, 8, 9]) используется итерация второго порядка (то есть итерация, удваивающая точность)

$$r_{..2n} = r_{..n}(2 - r_{..n}f_{..2n}) \bmod x^{2n}, \quad (19)$$

которая является частным случаем (4) при $m = n$.

Быстрые варианты метода Кука [1], предложенные независимо Шёнхаге [8] и Бернштейном [9] в 2000 г., находят $r_{..n}$, используя приблизительно $9F(n)$ операций. Метод $A\text{-}3n$ позволяет сократить объем вычислений до $7,5F(n)$. Обозначим через $I(n)$ сложность инвертирования по модулю x^n .

Теорема 2. *Справедливы соотношения*

$$(a) \quad I(n) \leq 9F(n) + O(n),$$

$$(б) \quad I(n) \leq 7,5F(n) + O(n \log \log n).$$

5.1. Алгоритм Шёнхаге

В методе Шёнхаге [8] итерация (19) реализуется следующим образом:

(0) Пусть многочлен $r_{..n}$ вычислен.

(1) Вычислить $(r_{..n})_{3n}^*$ и $(f_{..2n})_{3n}^*$.

Введем обозначение

$$\alpha = r_{..n}(1 - r_{..n}f_{..2n}) = x^n \beta.$$

(2) Вычислить $(\alpha)_{3n}^* = (r_{..n})_{3n}^*(1 - (r_{..n})_{3n}^*(f_{..2n})_{3n}^*)$.

(3) Вычислить $\alpha \bmod (x^{3n} - 1) = \lfloor \beta/x^{2n} \rfloor + x^n \beta_{..2n}$, откуда находится β . Тогда

$$r_{..2n} = r_{..n} + x^n \beta_{..n}.$$

Для выполнения шагов 1, 3 требуется три ДПФ порядка $3n$, остальные действия выполняются за $O(n)$ операций. Из рекуррентного соотношения

$$I(2n) \leq 3F^\circ(3n) + I(n) + O(n)$$

вытекает оценка

$$I(n) \leq 9F(n) + O(n).$$

Метод $A\text{-}2n$, который использовал Бернштейн [9], приводит к оценке

$$I(n) \leq 9F(n) + O(n \log \log n),$$

где остаточный член по порядку хуже, чем в методе Шёнхаге.

5.2. Асимптотически эффективный метод

Вторую часть теоремы 2 доказывает алгоритм, основанный на методе $A\text{-}3n$. На примере алгоритма Шёнхаге мы видим, что ДПФ порядка $3n$ применяется к $r_{..n}$, а на следующем шаге ДПФ порядка $6n$ применяется к $r_{..2n}$ (то же самое с $f_{..2n}$). Эти вычисления имеют общую часть, которая в блочном методе реализуется отдельно.

Представим f и r в виде

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x^n + a_2x^{2n} + \dots, \\ r &= b_0 + b_1x^n + b_2x^{2n} + \dots, \end{aligned}$$

где $\deg a_i, b_i < n$. Введем обозначение

$$\xi_i = a_{i-2} + a_{i-1}x^n + a_ix^{2n},$$

где $a_{-2} = a_{-1} = 0$.

Выберем $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим следующий алгоритм.

(0) Пусть многочлен $r_{..n} = b_0$ известен.

(0.1) Вычисляются $(\xi_0)_{3n}^*$ и $(b_0)_{3n}^*$.

Далее на каждом i -м шаге, $i = 1, \dots, k$, посредством (19) находится $r_{..2^i n}$. Используются метод тройного умножения, описанный в п. 4.3.2.

(i.1) В случае $i > 1$ вычисляются $(b_j)_{3n}^*$ для всех $j = 2^{i-2}, \dots, 2^{i-1} - 1$.

(i.2) Вычисляются $(\xi_j)_{3n}^*$ для всех $j = 2^{i-1}, \dots, 2^i - 1$. Пусть

$$\alpha = r_{..2^{i-1}n}(1 - r_{..2^{i-1}n}f_{..2^i n}) = x^{2^{i-1}n}\beta.$$

Представим β в виде

$$\beta = c_0 + c_1x^n + c_2x^{2n} + \dots,$$

где $\deg c_j < n$. Введем обозначение

$$\gamma_j = - \sum_{\substack{\lambda+\mu+\nu=j+2^{i-1} \\ \lambda, \mu < 2^{i-1}}} b_\lambda b_\mu \xi_\nu. \quad (20)$$

Очевидно,

$$\deg \gamma_j < 5n.$$

(i.3) Вычисляются $(\gamma_j)_{3n}^*$, $j = 0, 1, \dots, 2^{i-1} - 1$, исходя из (20).

(i.4) Вычисляются $\gamma_j \bmod (x^{3n} - 1)$, $j = 0, 1, \dots, 2^{i-1} - 1$. Находятся блоки c_j , образованные средними n коэффициентами γ_j , то есть

$$c_j = \lfloor \gamma_j / x^{2n} \rfloor \bmod x^n,$$

после чего становится известным $\beta_{..2^{i-1}n}$. Окончательно получаем, что

$$r_{..2^i n} = r_{..2^{i-1}n} + x^{2^{i-1}n}\beta_{..2^{i-1}n}.$$

Оценим сложность вычислений на i -м шаге. В п. (i.1), (i.2) и (i.4) выполняется всего $2^i + 2^{i-2}$ ДПФ порядка $3n$. П. (i.3) выполняется со сложностью $O(nM(2^i))$ (см. п. 4.3.1), а остальные действия — со сложностью $O(2^i n)$. Суммируя оценки сложности по всем шагам, получаем оценку

$$I(2^k n) \leq (2,5 \cdot 2^k - 1)F^\circ(3n) + I(n) + O(2^k k n).$$

Выбирая

$$k = \log \log n + O(1),$$

получаем, что

$$I(n) \leq 7,5F(n) + O(n \log \log n).$$

Заметим, и будем пользоваться этим наблюдением далее, что в приведенных алгоритмах инвертирования ДПФ порядка $3n$ можно заменить на двойные ДПФ порядка $(2n, n)$.

6. Деление

Рассмотрим задачу нахождения частного s от деления степенного ряда h на ряд f по модулю x^n , сохраняя обозначение $r = 1/f$. Сложность этой операции обозначим через $D(n)$. Один из экономных способов деления был предложен Карпом и Маркштейном [23]. Он основан на стандартном алгоритме инвертирования, в последнюю итерацию которого встроено умножение на h . Быстрый вариант алгоритма [23], использующий асимптотически $12,5F(n)$ операций, описан в [12]. Эта оценка может быть уменьшена до $12F(n)$ при помощи идеи из [24]. Ван дер Хувер [10] при помощи метода B -2n улучшил оценку сложности деления до $10F(n)$ (см. [10]).

Теорема 3. *Справедливы соотношения*

- (а) $D(n) \leq 12F(n) + O(n)$,
- (б) $D(n) \leq 10F(n) + O(n\sqrt{\log n})$.

6.1. Алгоритм Карпа–Маркштейна

Первую часть теоремы доказывает метод [23, 12], основанный на формуле

$$s_{..2n} = s_{..n} + r_{..n}(h_{..2n} - s_{..n}f_{..2n}) \bmod x^{2n},$$

которая вытекает из (5) при $m = n$.

Опишем алгоритм [23, 12].

- (0) Пусть многочлен $r_{..n}$ вычислен.
- (1) Вычислить $(r_{..n})_{2n}^*$, $(f_{..2n})_{2n}^*$, $(h_{..n})_{2n}^*$.
Пусть $\beta = r_{..n}h_{..n}$.
- (2) Вычислить $(\beta)_{2n}^* = (h_{..n})_{2n}^*(r_{..n})_{2n}^*$.
- (3) Вычислить β . Заметим, что $\beta_{..n} = s_{..n}$.
Пусть $s_{..n}f_{..2n} = h_{..n} + x^n\gamma$.

- (4) Вычислить $(s_{..n})_{2n}^*$.
- (5) Вычислить $(s_{..n} f_{..2n})_{2n}^* = (s_{..n})_{2n}^* (f_{..2n})_{2n}^*$.
- (6) Вычислить $s_{..n} f_{..2n} \bmod (x^{2n} - 1)$ и, в частности, $\gamma_{..n}$.
Пусть $h = h_{..n} + x^n h'$ и $\delta = r_{..n} (h'_{..n} - \gamma_{..n})$.
- (7) Вычислить $(h'_{..n} - \gamma_{..n})_{2n}^*$.
- (8) Вычислить $(\delta)_{2n}^* = (r_{..n})_{2n}^* (h'_{..n} - \gamma_{..n})_{2n}^*$.
- (9) Вычислить δ . Окончательно получаем, что

$$s_{..2n} = s_{..n} + x^n \delta_{..n}.$$

Всего на шагах 1–9 выполняется восемь ДПФ порядка $2n$, остальные действия имеют сложность $O(n)$. Получаем соотношение для сложности деления

$$D(2n) \leq I(n) + 8F^\circ(2n) + O(n).$$

Если инвертирование выполняется методом п. 5.2, то из приведенного соотношения следует, что

$$D(n) \leq 11,75F(n) + O(n \log \log n).$$

Если для инвертирования использовать метод Шёнхаге, то получаем оценку из [12]:

$$D(n) \leq 12,5F(n) + O(n).$$

В последнем случае оценка сложности может быть уменьшена, если воспользоваться идеями из [24]. Заметим, что при использовании $(2n, n)$ -варианта алгоритма Шёнхаге после этапа инвертирования известен вектор $(r_{..n/2})_n^*$. Тогда для вычисления произведения $rg \bmod x^n$, где $g \in \mathbf{C}[[x]]$, достаточно пяти ДПФ порядка n (против трех ДПФ порядка $2n$). Действительно,

$$\begin{aligned} r_{..n} &= r_{..n/2} + r' x^{n/2}, \\ g_{..n} &= g_{..n/2} + g' x^{n/2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$(rg)_{..n} = r_{..n/2} g_{..n/2} + x^{n/2} (r_{..n/2} g' + g_{..n/2} r')_{..n/2}.$$

Для вычисления по этой формуле достаточно применить ДПФ к многочленам r' , $g_{..n/2}$, g' и восстановить многочлены $r_{..n/2} g_{..n/2}$ и $r_{..n/2} g' + g_{..n/2} r'$.

В алгоритме Карпа–Маркштейна вычисляется два подобных произведения (β и δ). Указанный прием позволяет заменить пять ДПФ порядка $2n$, используемых для их вычисления, девятью ДПФ порядка n . Соотношение на сложность тогда переписется в виде

$$D(2n) \leq I(n) + 3F^\circ(2n) + 9F^\circ(n) + O(n),$$

откуда вытекает оценка

$$D(n) \leq 12F(n) + O(n).$$

6.2. Алгоритм ван дер Хувена

Методом $B-2n$ доказывается вторая оценка теоремы 3. Введем обозначение

$$h = h_{..m} + x^m h'.$$

Перепишем (5) в виде

$$s_{..m+n} = s_{..m} + x^m r_{..n} (h'_{..n} - \lfloor s_{..m} f_{..m+n} / x^m \rfloor) \bmod x^{m+n}. \quad (21)$$

Представим f и s в виде

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \dots, \\ s &= d_0 + d_1 x^n + d_2 x^{2n} + \dots, \end{aligned}$$

где $\deg a_i, d_i < n$. Также введем обозначение

$$\xi_i = a_{i-1} + a_i x^n,$$

полагая $a_{-1} = 0$.

Выберем $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим следующий алгоритм [10]:

(0) Пусть найден многочлен $r_{..n}$.

(0.1) Вычисляются $(r_{..n})_{2n}^*$ и $(h_{..n})_{2n}^*$.

(0.2) Вычисляется $(r_{..n} h_{..n})_{2n}^* = (r_{..n})_{2n}^* (h_{..n})_{2n}^*$.

(0.3) Вычисляется $r_{..n} h_{..n}$ и находится $s_{..n} = d_0 = (r_{..n} h_{..n})_{..n}$.

Далее на каждом i -м шаге, $i = 1, \dots, k-1$, находится $s_{..(i+1)n}$.

(i.1) Вычисляются $(\xi_i)_{2n}^*$ и $(d_{i-1})_{2n}^*$.

Введем обозначение

$$\alpha = \xi_i d_0 + \xi_{i-1} d_1 + \dots + \xi_1 d_{i-1}. \quad (22)$$

(i.2) Вычисляется $(\alpha)_{2n}^*$, исходя из (22).

(i.3) Вычисляется $\alpha \bmod (x^{2n} - 1)$.

Введем обозначение

$$\beta = \lfloor h / x^{in} \rfloor - \lfloor \alpha / x^n \rfloor.$$

(i.4) Вычисляется $\beta_{..n}$.

(i.5) Вычисляется $(\beta_{..n})_{2n}^*$.

(i.6) Вычисляется $(r_{..n} \beta_{..n})_{2n}^* = (r_{..n})_{2n}^* (\beta_{..n})_{2n}^*$.

(i.7) Вычисляется $r_{..n} \beta_{..n}$.

Окончательно получаем, что

$$d_i = (r_{..n} \beta_{..n})_{..n}.$$

На i -м шаге, $i > 0$, выполняется пять ДПФ порядка $2n$, дополнительная сложность составляет $O(in)$ и определяется п. (i.2). Поэтому для сложности алгоритма в целом справедливо соотношение

$$D(kn) \leq (5k - 2)F^\circ(2n) + I(n) + O(k^2n).$$

Выбирая

$$k = \sqrt{\log n} + O(1),$$

получаем оценку

$$D(n) \leq 10F(n) + O(n\sqrt{\log n}).$$

6.3. Деление с остатком

Задачу деления, то есть вычисления частного $s_{..n} = (h/f)_{..n}$ дополним нахождением остатка

$$t = (h_{..2n} - s_{..n}f_{..n+1})/x^n.$$

Такое определение остатка может показаться несколько странным, однако оно соответствует традиционной постановке задачи деления с остатком многочлена степени $2n - 1$ на многочлен степени n .

Пусть $a(x), b(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg a \leq 2n - 1$ и $\deg b = n$. Пусть $q(x)$ и $r(x)$ — соответственно частное и остаток от деления $a(x)$ на $b(x)$ и $\deg q, r < n$. Тогда

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x). \quad (23)$$

Через $\tilde{a}(x)$, $\tilde{q}(x)$, $\tilde{b}(x)$ и $\tilde{r}(x)$ обозначим соответственно многочлены $x^{2n-1}a(1/x)$, $x^{n-1}q(1/x)$, $x^n b(1/x)$ и $x^{n-1}r(1/x)$. Перепишем (23) в виде

$$\tilde{a}(x) = \tilde{q}(x)\tilde{b}(x) + x^n \tilde{r}(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= (\tilde{a}/\tilde{b})_{..n} = (\tilde{a}_{..n}/\tilde{b}_{..n})_{..n}; \\ \tilde{r} &= (\tilde{a} - \tilde{q}\tilde{b})/x^n = (\tilde{a}_{..2n} - \tilde{q}_{..n}\tilde{b}_{..n+1})/x^n, \end{aligned} \quad (24)$$

откуда видно, что $\tilde{q}$ и $\tilde{r}$ вычисляются в точности так же, как $s_{..n}$ и t в формулировке для степенных рядов. Идея сведения (23) к (24) принадлежит Штрассену [25].

Вернемся к задаче деления с остатком степенных рядов. Обозначим сложность нахождения частного и остатка по модулю x^n через $D_1(n)$.

Теорема 4. *Справедливы соотношения*

$$(a) \quad D_1(n) \leq 14F(n) + O(n),$$

$$(б) \quad D_1(n) \leq 12F(n) + O(n\sqrt{\log n}).$$

Заметим сначала, что алгоритм п. 6.1 остается корректным, если в вычислениях используется не $f_{..2n}$, а $f_{..2n+1}$. Дело в том, что ДПФ порядка $2n$ можно использовать для умножения многочлена степени $n-1$ на многочлен степени n .

Итак, пусть алгоритм п. 6.1 вычисляет $s_{..2n}$, а также $(f_{..2n+1})_{2n}^*$ на промежуточном шаге. Дополним его следующим образом.

Положим

$$t = (h_{..4n} - s_{..2n} f_{..2n+1})/x^{2n}, \quad s_{..2n} f_{..2n+1} = h_{..2n} + x^{2n} \varepsilon.$$

(10) Вычислить $(s_{..2n})_{2n}^*$.

(11) Вычислить $(s_{..2n} f_{..2n+1})_{2n}^* = (s_{..2n})_{2n}^* (f_{..2n+1})_{2n}^*$.

(12) Вычислить $s_{..2n} f_{..2n+1} \bmod (x^{2n} - 1) = h_{..2n} + \varepsilon$.

(13) Вычислить $t = \lfloor h_{..4n}/x^{2n} \rfloor - \varepsilon$.

Для сложности алгоритма деления с остатком справедлива оценка

$$D_1(2n) \leq I(n) + 10F^\circ(2n) + O(n).$$

В итоге получаем, что

$$D_1(n) \leq 14F(n) + O(n).$$

Лучшую оценку сложности позволяет получить метод, основанный на алгоритме деления из п. 6.2. Дополним этот алгоритм (с поправкой $\deg a_{k-1} \leq n$ и соответственно $\deg \xi_{k-1} \leq 2n$) следующим образом.

(k.0) После шага $k-1$ известен многочлен $s_{..kn}$, а также $(d_i)_{2n}^*$ для всех $i = 0, 1, \dots, k-2$ и $(\xi_i)_{2n}^*$ для всех $i = 1, \dots, k-1$. Положим $\xi_k = a_k$.

(k.1) Вычисляются $(d_{k-1})_{2n}^*$ и $(\xi_k)_{2n}^*$. Представим $s_{..kn} f_{..kn+1}$ в виде

$$s_{..kn} f_{..kn+1} = h_{..kn} + x^{kn}(c_0 + c_1 x^n + \dots + c_{k-1} x^{(k-1)n}),$$

где $\deg c_i < n$. Тогда

$$c_i = \lfloor (\xi_k b_i + \xi_{k-1} b_{i+1} + \dots + \xi_{i+1} b_{k-1})/x^n \rfloor \bmod x^n.$$

Положим

$$\alpha_i = \xi_k b_i + \xi_{k-1} b_{i+1} + \dots + \xi_{i+1} b_{k-1}. \quad (25)$$

(k.2) Вычисляются $(\alpha_i)_{2n}^*$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, исходя из (25).

(k.3) Вычисляются все α_i и находятся $c_i = \lfloor \alpha_i/x^n \rfloor_{..n}$, где $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Таким образом, используя $k+2$ ДПФ порядка $2n$ на k -м шаге, выводим соотношение

$$D_1(kn) \leq 6kF^\circ(2n) + I(n) + O(k^2n).$$

Если в методе Штрассена сложность деления с остатком приближенно равна сложности одного деления и одного умножения, то в модели, основанной на ДПФ, сложность этой операции сопоставима со сложностью двух умножений: справедлива оценка

$$D_1(n) \leq 12F(n) + O(n\sqrt{\log n}).$$

7. Квадратный корень

Рассмотрим задачу вычисления квадратного корня $f = \sqrt{h}$, $h_{..1} = 1$. Сохраняем обозначение $r = 1/f$. Сложность извлечения квадратного корня по модулю x^n обозначим через $Q(n)$.

Алгоритм, основанный на итерации второго порядка, рассматривался Брентом [2], а быстрый способ вычислений был предложен Бернштейном [9], который показал, что извлечение квадратного корня требует не более $11F(n) + O(n)$ операций. С применением двойного ДПФ оценка сложности стандартного метода может быть понижена до $10F(n)$. Блочные методы позволяют вычислять квадратный корень асимптотически еще быстрее; в частности, метод Б-3и имеет в этом случае сложность $7,5F(n)$.

Теорема 5. *Справедливы соотношения*

- (а) $Q(n) \leq 10F(n) + O(n)$;
- (б) $Q(n) \leq 7,5F(n) + O(n\sqrt{\log n})$.

7.1. Модификация стандартного метода

Из (6) при $t = n$ получаем формулу

$$f_{..2n} = f_{..n} + \frac{(h_{..2n} - f_{..n}^2)r_{..n}}{2} \bmod x^{2n}. \quad (26)$$

Рассмотрим следующий алгоритм.

- (0) Пусть найдены многочлены $f_{..n}$ и $r_{..n/2}$, и также известен вектор $(r_{..n/2})_n^*$.
- (1) Вычислить $(f_{..n})_{n,n/2}^*$ и $(r_{..n/2})_{n,n/2}^*$.
- (2) Вычислить $r_{..n}$ методом п. 5.1, используя двойные ДПФ порядка $(n, n/2)$.

Последующие шаги реализуют вычисления по формуле (26). Введем обозначение

$$f_{..n}^2 = h_{..n} + x^n \alpha.$$

- (3) Вычислить $(f_{..n}^2)_n^* = (f_{..n})_n^* (f_{..n})_n^*$.
- (4) Вычислить $f_{..n}^2 \bmod x^n - 1 = h_{..n} + \alpha$ и, следовательно, найти α .

Пусть $h = h_{..n} + x^n h'$. Введем обозначение

$$\beta = (h'_{..n} - \alpha)r_{..n}.$$

- (5) Вычислить $(r_{..n})_{2n}^*$ и $(h'_{..n} - \alpha)_{2n}^*$.
- (6) Вычислить $(\beta)_{2n}^* = (h'_{..n} - \alpha)_{2n}^* (r_{..n})_{2n}^*$.
- (7) Вычислить β . Окончательно получаем, что

$$f_{..2n} = f_{..n} + x^n \beta_{..n/2}.$$

В общей сложности, на шагах 1–7 выполняется два двойных ДПФ порядка $(n, n/2)$, кроме того, по одному ДПФ порядка $n/2$ и порядка n , и три ДПФ порядка $2n$. Остальные действия имеют линейную сложность. Для сложности этого алгоритма получаем рекуррентное соотношение

$$Q(2n) \leq Q(n) + 3F^\circ(n/2) + 3F^\circ(n) + 3F^\circ(2n) + O(n),$$

откуда следует, что

$$Q(n) \leq 10,5F(n) + O(n).$$

Понижение сложности по сравнению с алгоритмом из [9] достигается за счет того, что применение двойного ДПФ позволяет выполнять подзадачу инвертирования более быстрым, чем использовался в [9], алгоритмом Шёнхаге.

Далее, на последнем шаге при вычислении β можно обойтись пятью ДПФ порядка n вместо трех ДПФ порядка $2n$ (см. п. 6.1). Это приводит к оценке сложности

$$Q(n) \leq 10F(n) + O(n).$$

7.2. Асимптотически эффективный метод

Второе соотношение теоремы 5 доказывается методом Б-3 n .

Представим f и h в виде

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x^n + a_2x^{2n} + \dots, \\ h &= d_0 + d_1x^{2n} + d_2x^{4n} + \dots, \end{aligned}$$

где $\deg a_i < n$ и $\deg d_i < 2n$. (Разбиение ряда h на блоки длины $2n$ позволяет сэкономить часть операций.) Введем обозначения

$$b = r_{..n}, \quad \chi_j = x^{(2-j)n}b, \quad j = 0, 1, 2.$$

Выберем $k \in \mathbb{N}$. Пусть k четно. На каждой итерации следующего алгоритма вычисляются очередные n коэффициентов ряда f согласно (6).

(0) Пусть многочлены $f_{..n} = a_0$ и $r_{..n} = b$ известны.

(0.1) Вычисляются b_{3n}^* (а также $(\chi_j)_{3n}^*$ с дополнительной сложностью $O(n)$) и $(d_j)_{3n}^*$ для всех $j = 0, 1, \dots, k/2 - 1$.

Далее на каждом i -м шаге, $i = 1, \dots, k - 1$, находится $f_{..(i+1)n}$.

(i.1) Вычисляется $(a_{i-1})_{3n}^*$.

Положим

$$\begin{aligned} \beta &= (h_{..(i+1)n} - f_{..in}^2)r_{..n} = x^{in}\alpha, \\ \gamma &= \sum_{2\lambda+\mu=i} d_\lambda \chi_\mu - \sum_{\substack{\lambda+\mu+\nu=i \\ \lambda, \mu < i}} a_\lambda a_\mu \chi_\nu. \end{aligned} \tag{27}$$

Очевидно, $\deg \gamma < 5n$.

(i.2) Вычисляется $(\gamma)_{3n}^*$, исходя из (27).

(i.3) Вычисляется $\gamma \bmod (x^{3n} - 1)$. Многочлен, образованный средними n коэффициентами γ , совпадает с $2a_i$, то есть

$$2a_i = \lfloor \gamma / x^{2n} \rfloor_{..n}.$$

Окончательно получаем, что

$$f_{..(i+1)n} = f_{..in} + a_i x^{in}.$$

На каждом i -м шаге, $i > 0$, выполняется по два ДПФ порядка $3n$. Дополнительная сложность определяется п. (i.2). Для алгоритма в целом получаем оценку

$$Q(kn) \leq (2,5k - 1)F^\circ(3n) + Q(n) + O(k^2n).$$

Выбирая

$$k = \sqrt{\log n} + O(1),$$

получаем оценку

$$Q(n) \leq 7,5F(n) + O(n\sqrt{\log n}).$$

8. Экспонента

Рассмотрим задачу вычисления экспоненты $f = e^h$, где $h_{..1} = 0$. Пусть по-прежнему $r = 1/f$. Сложность выполнения этой операции по модулю x^n обозначим через $E(n)$.

В работе [9] Бернштейн получил асимптотическую оценку сложности вычисления экспоненты $17F(n)$ методом A -2n, а также оценку $19,5F(n)$, используя модификацию стандартного метода. Заметим, что в [9] для последнего алгоритма из-за неточности указана завышенная оценка $20F(n)$. Совсем недавно Бостан и Шост [24] улучшили оценку сложности стандартного метода до $16,5F(n)$. Используя метод B -2n и более общую, чем (8), итерационную формулу, ван дер Хувен [10] получил оценку $14F(n)$. На самом деле, можно получить лучшие оценки.

Теорема 6. *Справедливы соотношения*

- (a) $E(n) \leq 15,5F(n) + O(n)$,
- (б) $E(n) \leq 13F(n) + O(n \log \log n)$.

Для доказательства первого соотношения будет предъявлен модифицированный стандартный алгоритм, в котором используются двойные и (формально) тройные ДПФ. Для доказательства второй оценки используется метод A -(2n, n).

8.1. Модификация стандартного метода

Из формулы (8) в случае $m = n$ следует, что

$$f_{..2n} = f_{..n} + (h_{..2n} - (\ln f_{..n})_{..2n}) f_{..n} \bmod x^{2n}. \quad (28)$$

Вычисление $(\ln f_{..n})_{..2n}$ удобно выполнять при помощи формулы (7), подынтегральное выражение в которой согласно (21) (где $m = n - 1$) может быть вычислено по формуле

$$((\Delta f)_{..n-1}/f_{..n})_{..2n-1} = (\Delta h)_{..n-1} - x^{n-1} r_{..n} [(\Delta h)_{..n-1} f_{..n}/x^{n-1}] \bmod x^{2n-1} \quad (29)$$

в силу того, что

$$((\Delta f)_{..n-1}/f_{..n})_{..n-1} = (\Delta h)_{..n-1}.$$

Рассмотрим следующий алгоритм.

- (0) Пусть найдены многочлены $f_{..n}$ и $r_{..n/2}$, и также известен вектор $(r_{..n/2})_n^*$.
- (1) Вычислить $(f_{..n})_{n,n/2,n/2}^*$ и $(r_{..n/2})_{n,n/2}^*$.
- (2) Вычислить $r_{..n}$ методом п. 5.1 с использованием двойных ДПФ.

Шаги 3–9 реализуют вычисления по формуле (29). Заметим, что

$$((\Delta h)_{..n-1} f_{..n})_{..n-1} = (\Delta f)_{..n-1}.$$

Пусть

$$(\Delta h)_{..n-1} f_{..n} = (\Delta f)_{..n-1} + x^{n-1} \gamma.$$

- (3) Вычислить $(\Delta h)_{..n-1}$, $(\Delta f)_{..n-1}$.
- (4) Вычислить $((\Delta h)_{..n-1})_n^*$.
- (5) Вычислить $((\Delta h)_{..n-1} f_{..n})_n^* = ((\Delta h)_{..n-1})_n^* (f_{..n})_n^*$.
- (6) Вычислить $(\Delta h)_{..n-1} f_{..n} \bmod (x^n - 1) = (\Delta f)_{..n-1} + \lfloor \gamma/x \rfloor + x^{n-1} \gamma_{..1}$, откуда находится γ .

Введем обозначение $\delta = r_{..n} \gamma$.

- (7) Вычислить $(r_{..n})_{2n}^*$, $(\gamma)_{2n}^*$.
- (8) Вычислить $(\delta)_{2n}^* = (r_{..n})_{2n}^* (\gamma)_{2n}^*$.
- (9) Вычислить δ .

Введем обозначение $h = h_{..n} + x^n h'$. Тогда

$$h_{..2n} - (\ln f_{..n})_{..2n} = x^n h'_{..n} + \mathbf{J}(x^{n-1} \delta_{..n}) = x^n \alpha.$$

- (10) Вычислить α .

Введем обозначение $\beta = \alpha f_{..n}$.

- (11) Вычислить $(\alpha)_{n,n/2,n/2}^*$.
- (12) Вычислить $(\beta)_{n,n/2,n/2}^* = (\alpha)_{n,n/2,n/2}^* (f_{..n})_{n,n/2,n/2}^*$.
- (13) Вычислить β . Окончательно получаем, что

$$f_{..2n} = f_{..n} + x^n \beta_{..n}.$$

Суммарно на шагах 1–13 выполняется три тройных ДПФ порядка $(n, n/2, n/2)$, одно двойное ДПФ порядка $(n, n/2)$, одно ДПФ порядка $n/2$, два ДПФ порядка n и три ДПФ порядка $2n$, остальные действия выполняются с линейной сложностью. Для сложности алгоритма получаем рекуррентное соотношение

$$E(2n) \leq E(n) + 8F^\circ(n/2) + 6F^\circ(n) + 3F^\circ(2n) + O(n),$$

откуда следует, что

$$E(n) \leq 16F(n) + O(n).$$

Используя на последней итерации алгоритма при вычислении δ прием из [24], как в п. 6.1 и 7.1, получаем оценку

$$E(n) \leq 15,5F(n) + O(n).$$

Согласно замечанию из п. 4.2 тройные ДПФ порядка $(n, n/2, n/2)$ в описанном алгоритме можно реализовать при помощи ДПФ порядка $2n$.

8.2. Асимптотически эффективный метод

Выберем $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим следующий алгоритм. Представим f , r и Δh в виде

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x^n + a_2x^{2n} + \dots, \\ r &= b_0 + b_1x^n + b_2x^{2n} + \dots, \\ \Delta h &= d_0 + d_1x^{n-1} + d_2x^{2n-1} + d_3x^{3n-1} + \dots, \end{aligned}$$

где $\deg a_i, b_i, d_i < n$ и $\deg d_0 < n - 1$.

(0) Пусть многочлены $f_{..2n}$ и $r_{..n} = b_0$ известны.

(1) Вычисляются $(d_j)_{2n,n}^*$ для всех $j = 0, 1, \dots, 2^{k-1} - 1$, а также $(a_0)_{2n,n}^*$, $(a_1)_{2n,n}^*$, $(b_0)_{2n,n}^*$.

Далее на каждом i -м шаге, $i = 2, \dots, k$, вычисляются $f_{..2^i n}$ и $r_{..2^{i-1} n}$.

(i.1) Вычисляется $r_{..2^{i-1} n}$ и $(a_j)_{2n,n}^*$ для всех $j = 2^{i-2}, \dots, 2^{i-1} - 1$, методом из п. 5.2 (но при помощи двойных ДПФ).

(i.2) Вычисляются $(b_j)_{2n,n}^*$ для всех $j = 2^{i-2}, \dots, 2^{i-1} - 1$.

Введем обозначение

$$\delta = r_{..2^{i-1} n} \lfloor (\Delta h)_{..2^{i-1} n-1} f_{..2^{i-1} n} / x^{2^{i-1} n-1} \rfloor.$$

При выполнении умножения следует учесть граничный эффект (см. п. 4.3.3).

Положим

$$\tau = \sum_{\lambda+\mu=2^{i-1}-1} d_\lambda a_\mu. \quad (30)$$

(i.3) Вычисляется $(\tau)_{2n}^*$, исходя из (30).

(i.4) Вычисляется τ . Положим $\theta = \lfloor \tau / x^n \rfloor$.

(i.5) Вычисляется $(\theta)_{2n,n}^*$. Тогда

$$\delta = y_0 + y_1 x^n + y_2 x^{2n} + \dots,$$

где

$$y_j = \sum_{\substack{\lambda+\mu+\nu=j+2^{i-1} \\ \lambda,\mu,\nu < 2^{i-1} \\ \mu+\nu \geq 2^{i-1}}} b_\lambda d_\mu a_\nu + b_j \theta. \quad (31)$$

(i.6) Вычисляются $(y_j)_{2n,n}^*$, $j = 0, 1, \dots, 2^{i-1} - 1$, исходя из (31).

(i.7) Вычисляются y_j , $j = 0, 1, \dots, 2^{i-1} - 1$.

(i.8) Вычисляется $\delta_{..2^{i-1}n}$.

Положим $h = h_{..2^{i-1}n} + x^{2^{i-1}n} h'$ и

$$x^{2^{i-1}n} h'_{..2^{i-1}n} + \mathbf{J}(x^{2^{i-1}n-1} \delta_{..2^{i-1}n}) = x^{2^{i-1}n} \alpha.$$

Запишем α в виде

$$\alpha = c_0 + c_1 x^n + c_2 x^{2n} + \dots,$$

где $\deg c_j < n$.

(i.9) Вычисляются c_j , $j = 0, 1, \dots, 2^{i-1} - 1$.

(i.10) Вычисляются $(c_j)_{2n}^*$, $j = 0, 1, \dots, 2^{i-1} - 1$.

Положим $\beta = \alpha f_{..2^{i-1}n}$, тогда

$$\beta = z_0 + z_1 x^n + z_2 x^{2n} + \dots,$$

где

$$z_j = \sum_{\substack{\lambda+\mu=j \\ \lambda,\mu < 2^{i-1}}} c_\lambda a_\mu. \quad (32)$$

(i.11) Вычисляются $(z_j)_{2n}^*$, $j = 0, 1, \dots, 2^{i-1} - 1$, исходя из (32).

(i.12) Вычисляются z_j , $j = 0, 1, \dots, 2^{i-1} - 1$.

(i.13) Вычисляется $\beta_{..2^{i-1}n}$. Окончательно получаем, что

$$f_{..2^i n} = f_{..2^{i-1}n} + x^{2^{i-1}n} \beta_{..2^{i-1}n}.$$

Оценим сложность вычислений на i -м шаге. В п. (i.1), (i.2), (i.5) и (i.7) выполняется соответственно $2^{i-1} + 2$, 2^{i-2} , 1, и 2^{i-1} , то есть всего $1,25 \cdot 2^i + 3$, двойных ДПФ порядка $(2n, n)$. В п. (i.3), (i.10), (i.12) вычисляется $2^i + 1$ ДПФ порядка $2n$. П. (i.6) и (i.11) выполняются со сложностью $O(nM(2^i))$, а остальные действия — со сложностью $O(2^i n)$. Для алгоритма в целом получаем оценку

$$E(2^k n) \leq (5 \cdot 2^k + 4k - 10)F^\circ(2n) + (3 \cdot 2^k + 3k - 5)F^\circ(n) + E(2n) + O(2^k k n).$$

При выборе

$$k = \log \log n + O(1)$$

получаем, что

$$E(n) \leq 13F(n) + O(n \log \log n).$$

Асимптотически такую же оценку сложности (но с худшим остаточным членом) можно получить и методом $B(2n, n)$.

9. Возведение в степень

Очевидный способ реализации операции возведения ряда h , $h_{..1} = 1$, в произвольную степень C состоит в композиции логарифмирования, умножения на C и вычисления экспоненты:

$$h^C = e^{C \ln h}.$$

Поэтому сложность $P(n)$ возведения в степень очевидно оценивается так:

$$P(n) \leq D(n) + E(n) + O(n).$$

Эта общая оценка может быть уточнена при использовании специальных алгоритмов для логарифма и экспоненты, имеющих общую часть. Например, при возведении в степень с помощью алгоритмов из п. 6.1 и 8.1 можно сэкономить порядка $0,5F(n)$ операций (для выполнения шага 4 на последней итерации в алгоритме п. 8.1 не нужно ДПФ) — общая сложность при этом составит $27F(n) + O(n)$. Комбинация лучших описанных алгоритмов (п. 6.2, 8.2) приводит к асимптотической оценке $23F(n)$. Еще лучшую оценку, $20,5F(n)$, можно получить вариантом метода $B(2n, n)$, организовав итерационный процесс непосредственно для операции возведения в степень.

Теорема 7. *Справедливы соотношения*

- (а) $P(n) \leq 27F(n) + O(n)$,
- (б) $P(n) \leq 20,5F(n) + O(n\sqrt{\log n \log \log n})$.

Остается доказать второе соотношение. Введем обозначения

$$r = 1/f, \quad \rho = 1/h, \quad s = \Delta h/h = (1/C)\Delta f/f.$$

Воспользуемся формулой (9). Согласно (7) и (21),

$$\begin{aligned} & (\Delta(C \ln h - \ln f_{..m}))_{..m+n-1} \\ &= (Cs - \Delta \ln f_{..m})_{..m+n-1} \\ &= C(\rho_{..n}(\Delta h - s_{..m-1}h_{..m+n}) + x^{m-1}r_{..n}[s_{..m-1}f_{..m}/x^{m-1}])_{..m+n-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Представим $f, r, s, \Delta h, h, \rho$ в виде

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x^n + a_2x^{2n} + \dots, \\ r &= b_0 + b_1x^n + b_2x^{2n} + \dots, \\ s &= c_0 + c_1x^{n-1} + c_2x^{2n-1} + c_3x^{3n-1} + \dots, \\ \Delta h &= d_0 + d_1x^{2n-1} + d_2x^{4n-1} + d_3x^{6n-1} + \dots, \\ h &= u_0 + u_1x^n + u_2x^{2n} + \dots, \\ \rho &= v_0 + v_1x^n + v_2x^{2n} + \dots, \end{aligned}$$

где степени $a_i, b_i, c_i, d_i, u_i, v_i$ меньше n и $\deg c_0, \deg d_0 < n - 1$. Пусть $k, l \in \mathbb{N}$ и l четно. Для построения алгоритма мы используем несколько усложненную версию метода $B-(2n, n)$, в которой на каждой итерации вычисляются очередные nl коэффициентов искомого ряда f : это связано с необходимостью учета граничного эффекта при вычислении тройного произведения $r_{..n} \lfloor s_{..m-1} f_{..m} / x^{m-1} \rfloor$ (см. п. 4.3.3).

(0) Пусть $f_{..ln}, r_{..ln}, \rho_{..ln}, s_{..ln-1}$ известны.

(1) Вычисляются $(d_j)_{2n,n}^*$ для всех $j = 0, 1, \dots, kl/2 - 1$, $(u_j)_{2n,n}^*$ для всех $j = 0, 1, \dots, kl - 1$, а также $(b_j)_{2n,n}^*$ и $(v_j)_{2n,n}^*$ для всех $j = 0, 1, \dots, l - 1$.

Далее на каждом i -м шаге, $i = 2, \dots, k$, следуя (33), находятся очередные nl коэффициентов рядов f и s .

Для того, чтобы вычислить $s_{..iln-1}$, выполняются следующие операции:

(i.1) Вычисляются $(c_j)_{2n,n}^*$ для всех $j = (i - 2)l, \dots, (i - 1)l - 1$.

(i.2) Далее $s_{..iln-1}$ восстанавливается из тройного произведения

$$s_{..iln-1} - s_{..(i-1)ln-1} = \rho_{..ln}(\Delta h - s_{..(i-1)ln-1} h_{..iln}) \bmod x^{iln-1}.$$

Сложность пункта определяется l обратными ДПФ порядка $(2n, n)$.

Для того, чтобы вычислить $\Delta \ln f_{..iln}$, выполняются следующие операции:

(i.3) Вычисляются $(a_j)_{2n,n}^*$ для всех $j = (i - 2)l, \dots, (i - 1)l - 1$.

(i.4) Далее $\Delta \ln f_{..iln}$ восстанавливается из тройного произведения

$$\begin{aligned} \Delta \ln f_{..(i-1)ln} - \Delta \ln f_{..iln} \\ = C x^{(i-1)ln-1} r_{..ln} \lfloor s_{..(i-1)ln-1} f_{..(i-1)ln} / x^{(i-1)ln-1} \rfloor \bmod x^{iln-1}. \end{aligned}$$

Сложность пункта определяется l обратными ДПФ порядка $(2n, n)$, а также обратным ДПФ порядка $2n$ и ДПФ порядка $(2n, n)$, выполняемыми с целью учета граничного эффекта аналогично шагам (i.3)–(i.5) алгоритма п. 8.2.

(i.5) После вычисления формальным интегрированием $(C \ln h - \ln f_{..(i-1)ln})_{..iln}$ остается найти $f_{..iln}$ из произведения (9), для чего достаточно выполнить по l прямых и обратных ДПФ порядка $2n$.

Дополнительную сложность (то есть без учета ДПФ) каждого из пунктов можно оценить как $O(nM(il))$. Для сложности алгоритма получаем оценку

$$\begin{aligned} P(kln) \leq (7,5kl - 4l + 2k - 2)F^\circ(2n) + (5,5kl - 2l + k - 1)F^\circ(n) \\ + P(ln) + 2I(ln) + D(ln) + O(knM(kl)), \end{aligned}$$

из которой при выборе

$$k, l = \sqrt{\log n / \log \log n} + O(1)$$

получаем оценку

$$P(n) \leq 20,5F(n) + O(n\sqrt{\log n \log \log n}).$$

Описанный алгоритм при натуральных значениях показателя C интересно сравнить со стандартным методом возведения в степень, в котором последовательно при помощи умножений и возведений в квадрат вычисляются все большие и большие степени, пока не будет получена искомая. Легко видеть, что сложность стандартного метода оценивается величиной $2l(C)(F(2n) + O(n))$, где $l(C)$ — длина минимальной аддитивной цепочки для C . Эта оценка лучше полученной выше, если $l(C) \leq 5$, то есть при $C \leq 18$, а также при $C = 20, 24, 32$.

10. Замечания

10.1. О сложности решения линейных однородных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу нахождения приближенного (по модулю x^n) решения линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) порядка p :

$$\Delta^p f = a_{p-1} \Delta^{p-1} f + \dots + a_1 \Delta f + a_0 f \quad (34)$$

с начальными условиями

$$(\Delta^i f)_{..1} = v_i, \quad i = 0, 1, \dots, p-1,$$

где $a_i, f \in \mathbb{C}[[x]]$, $v_i \in \mathbb{C}$. Эта задача может быть переписана в матричной форме:

$$\Delta F = \begin{bmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} F, \quad F_{..1} = V, \quad (35)$$

где $F \in \mathbb{C}[[x]]^p$, $V = (v_{p-1}, \dots, v_0)^T$. (Обозначение $g_{..n} = g \bmod x^n$ распространяется также на векторы и матрицы степенных рядов.) Последняя задача является частным случаем задачи

$$\Delta F = AF, \quad F_{..1} = V \quad (36)$$

с произвольной матрицей A . С задачей (36) тесно связана задача нахождения фундаментальной системы решений, то есть вычисление матрицы M такой, что

$$\Delta M = AM, \quad M_{..1} = E, \quad (37)$$

где E — единичная матрица.

Сложность решения задач (34), (36), (37) методом последовательных приближений оценивалась в работах [19, 10]. В [19] было показано, что задача (37) решается со сложностью $O(F(n)p^2)$, задача (36) — со сложностью $O(F(n)p^2 \log n)$, а исходная задача (34) — со сложностью $O(F(n)p^2)$. Эти оценки были уточнены в [10]. Пусть q обозначает число отличных от констант элементов матрицы A . Тогда из метода [10] следуют асимптотические верхние оценки: для задачи (37) — $(2q + 12p^2)F(n)$, для задачи (36) —

$(2q + 12p)F(n)$ (в самой работе [10] указана более слабая оценка $(6q + 8p)F(n)$). Из последней оценки вытекает (при подстановке $q = p$) оценка сложности решения задачи (34) в виде $14pF(n)$. Везде предполагается, что p достаточно мало по сравнению с n .

В работе [10] методом $B-2n$ реализуются итерации

$$\begin{aligned} M_{..m+n} &= M_{..m} - M_{..n} \mathbf{J}(M_{..n}^{-1}((\Delta M)_{..m-1} - A_{..m+n-1} M_{..m})), \\ F_{..m+n} &= F_{..m} - M_{..n} \mathbf{J}(M_{..n}^{-1}((\Delta F)_{..m-1} - A_{..m+n-1} F_{..m})) \end{aligned} \quad (38)$$

для задач (37) и (36) соответственно. В этом способе решение задачи (37) используется для решения задачи (36).

Для нахождения очередных блоков коэффициентов длины n по формуле (38) методом $B-2n$ используется следующая последовательность вычислений:

- (1) Вычисляется необходимый блок произведения $G = A_{..m+n-1} F_{..m}$, для чего выполняется $q + 2p$ ДПФ порядка $2n$.
- (2) Вычисляется необходимый блок произведения $H = M_{..n}^{-1} G$ посредством $2p$ ДПФ порядка $2n$.
- (3) Окончательно, вычисляется необходимый блок произведения $M_{..n} \mathbf{J} H$ также с использованием $2p$ ДПФ порядка $2n$.

При оценке сложности используется тот факт, что ДПФ для элементов матриц M , M^{-1} вычисляются только на первом шаге.

Из (38) видно, что вычисление блоков произведений G и H можно заменить вычислением блока в тройном произведении $M_{..n}^{-1} [A_{..m+n-1} F_{..m} / x^{m-1}]$. Для этой цели можно использовать метод $B-(2n, n)$ с двойным разбиением рядов, как в алгоритме возведения в степень из раздела 9. Сложность выделения необходимого блока длины n из указанного произведения на шаге итерации соответствует сложности $q + 2p$ двойных ДПФ порядка $(2n, n)$.

Таким образом, сложность решения задачи (36) методом $B-(2n, n)$ составляет асимптотически $(3q + 10p)F(n)$. Как следствие, сложность решения ЛОДУ (34) не превосходит асимптотически $13pF(n)$. Аналогично для сложности задачи (37) можно получить оценку $(3q + 10p^2)F(n)$.

Оценка $14pF(n)$ сложности решения ЛОДУ порядка p методом $B-2n$ является грубой, так как матрица A в приведенной задаче (35) имеет специальный вид. Вновь рассмотрим итерацию (38), где матрица A задана соотношением (35). Так как только одна компонента произведения G является нетривиальной, для его вычисления достаточно выполнить $2p + 1$ ДПФ порядка $2n$. Как следствие, $p + 1$ ДПФ достаточно для вычисления H . Наконец, достаточно найти только одну компоненту вектора F , поэтому заключительное умножение также можно выполнить, используя $p + 1$ ДПФ. Таким образом, для сложности решения ЛОДУ (34) справедлива асимптотическая оценка $(8p + 6)F(n)$ (она лучше, чем в методе $B-(2n, n)$, при $p \geq 2$). Аналогичные рассуждения позволяют для сложности нахождения фундаментальной системы решений уравнения (34) указать оценку $(6p^2 + 8p)F(n)$.

10.2. О мультипликативной сложности

В качестве меры сложности операций можно рассматривать мультипликативную сложность, в которой учитываются только не скалярные умножения и деления. Известно (см., например, [17]), что мультипликативная сложность умножения равна

$$M^*(n) = 2n - 1.$$

Инвертирование по формуле (5) реализуется с мультипликативной сложностью $4n + O(1)$, а всего в соответствующем методе выполняется асимптотически $10F(n)$ операций (см. [9]). Если использовать итерацию третьего порядка

$$r_{..n} = r_{..n}(1 + (2 - r_{..n}f_{..3n})(1 - r_{..n}f_{..3n})),$$

то можно указать метод с мультипликативной сложностью также $4n$, но с общей сложностью $9,5F(n)$. Вариант этого же метода (см. [17]) имеет меньшую мультипликативную сложность $3,75n$ и общую сложность $9,75F(n)$. Можно также предъявить метод, основанный на итерации четвертого порядка, с мультипликативной сложностью $4n$ и общей сложностью $(28/3)F(n)$. (Формулы для итераций высших порядков см., например, в упражнении 9.11 в [3].)

Мультипликативная сложность деления обычно оценивается, исходя из соотношения

$$D^*(n) \leq I^*(n) + M^*(n),$$

откуда следует, что

$$D^*(n) \leq 5,75n$$

(общая сложность соответствующего алгоритма $15,75F(n)$). Из метода п. 6.1 следует, что

$$D^*(n) \leq I^*(n/2) + 3n \leq 4,875n,$$

при этом общая сложность алгоритма оценивается величиной $12,875F(n)$. Соответственно для деления с остатком (см. п. 6.3, первый метод)

$$D_1^*(n) \leq D^*(n) + n \leq 5,875n.$$

Эта оценка была известна Шёнхаге в 1999 г.

В заключение отметим, что квадратный корень степенного ряда можно вычислить при помощи итерации (26) с мультипликативной сложностью $5n$ и общей сложностью $11F(n)$ методом [9], а экспоненту — с мультипликативной сложностью $7n$ и общей сложностью $17F(n)$ вариантом метода п. 8.1. Мультипликативную сложность возведения в степень удобно оценивать, исходя из соотношения

$$P^*(n) \leq D^*(n) + E^*(n),$$

откуда следует, что

$$P^*(n) \leq 11,875n,$$

а общая сложность соответствующего алгоритма — $29,375F(n)$.

В табл. 1 сведены результаты о сложности обсуждавшихся операций. Заметим, что аналогичные оценки имеют место для рядов с коэффициентами из произвольного алгебраически замкнутого поля, а также из произвольного кольца (при переопределении $F(n)$ в последнем случае, см. [4]).

Автор благодарен научному руководителю С. Б. Гашкову за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

Таблица 1.

Операция	$F(n)$:	асимпт.	метод	станд.	C
ДПФ		1	—	1	$1,5n \log n$
Умножение		6	—	6	$9n \log n$
Инвертирование		7,5	$A-3n$	9	$11,25n \log n$
Деление и логарифм		10	$B-2n$ [10]	12	$15n \log n$
Деление с остатком		12	$B-2n$ [10]	14	$18n \log n$
Квадратный корень		7,5	$B-3n$	10	$11,25n \log n$
Экспонента		13	$A-(2n, n)$	15,5	$19,5n \log n$
Возведение в степень		20,5	$B-(2n, n)$	27	$30,75n \log n$
ЛОДУ порядка 1		13	$B-(2n, n)$	—	$19,5n \log n$
ЛОДУ порядка p		$8p + 6$	$B-2n$ [10]	—	$(12p + 9)n \log n$

Список литературы

1. Cook S., *On the minimum computation time of functions*, Doctoral Thesis. Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1966.
2. Brent R. P., Multiple-precision zero-finding methods and the complexity of elementary function evaluation. In: *Analytic Computational Complexity* (Traub J. F., ed.). Academic Press, New York, 1975, pp. 151–176.
3. von zur Gathen J., Gerhard J., *Modern computer algebra*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
4. Bernstein D. J., Fast multiplication and its applications. In: *Algorithmic Number Theory. Lattices, Number Fields, Curves and Cryptography* (Mathematical Sciences Research Institute Publications), **44** (Buhler J. P. et al., eds.). Cambridge, 2008, pp. 325–384.
5. Sieveking M., An algorithm for division of power series. *Computing* (1972) **10**, 153–156.
6. Brent R. P., Kung H. T., Fast algorithms for manipulating formal power series. *J. Assoc. Comput. Mach.* (1978) **25**, №4, 581–595.
7. Aho A. V., Hopcroft J. E., Ullman J. D., *The design and analysis of computer algorithms*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1976.
8. Schönhage A., Variations on computing reciprocals of power series. *Inf. Process. Lett.* (2000) **74**, 41–46.
9. Bernstein D. J., *Removing redundancy in high-precision newton iteration*, <http://cr.yp.to/fastnewton.html> (не опубликовано).
10. van der Hoeven J., *Newton's Method and FFT Trading*, Technical Report 2006–17. Univ. Paris-Sud, Orsay, 2006.
11. Карацуба А. А., Офман Ю. П., Умножение многозначных чисел на автоматах. *Докл. АН СССР* (1962) **145**, №2, 293–294.
12. Hanrot G., Quercia M., Zimmermann P., The middle product algorithm. I: Speeding up the division and square root of power series. *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.* (2004) **14**, 415–438.
13. Сергеев И. С., Быстрые алгоритмы для элементарных операций со степенными рядами. В сб.: *Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения»*. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Москва, 2007, с. 123–126.
14. Bernstein D. J., The tangent FFT. *Lecture Notes Computer Sci.* (2007) **4851**, 291–300.
15. Schönhage A., Asymptotically fast algorithms for the numerical multiplication and division of polynomials with complex coefficients. *Lecture Notes Computer Sci.* (1982) **144**, 3–15.

16. van der Hoeven J., *Notes on the truncated fourier transform*, Technical Report 2005-5. Univ. Paris-Sud, Orsay, 2005.
17. Bürgisser P., Clausen M., Shokrollahi M. A., *Algebraic complexity theory*. Springer, Berlin, 1997.
18. Knuth D. E., *The art of computer programming: seminumerical algorithms*, **2**. Addison-Wesley Longman, Boston, 1998.
19. Bostan A., Chyzak F., Ollivier F., Salvy B., Schost É., Sedoglavic A., Fast computation of power series solutions of systems of differential equations. In: *Proc. Symposium on Discrete Algorithms*. SIAM, Philadelphia, 2007, pp. 1012–1021.
20. Schulz G., Iterative Berechnung der reziproken Matrix. *Z. Angewandte Math. Mech.* (1933) **13**, 57–59.
21. Cooley J. W., Tukey J. W., An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput.* (1965) **19**, 297–301.
22. van der Hoeven J., New algorithms for relaxed multiplication. *J. Symbolic Comput.* (2007) **42**, 792–802.
23. Karp A. H., Markstein P., High-precision division and square root. *ACM Trans. Math. Softw.* (1997) **23**, 561–589.
24. Bostan A., Schost É., A simple and fast algorithm for computing exponentials of power series. *Inf. Process. Lett.* (2009) **109**, 754–756.
25. Strassen V., Die Berechnungskomplexität von elementarsymmetrischen Funktionen und von Interpolationskoeffizienten. *Numer. Math.* (1973) **20**, 238–251.

Статья поступила 2.08.2008.