Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Черепов, О приближении непрерывных функций детерминированными функциями с задержкой, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 1, 83–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1086>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:56:48

О приближении непрерывных функций детерминированными функциями с задержкой

© 2010 г. А. Н. Черепов

Рассматриваются детерминированные функции с задержкой, являющиеся обобщением детерминированных функций, и доказываются некоторые свойства этих функций. Ставится задача приближения непрерывных функций функциями с задержкой и доказано утверждение о возможности приближения с произвольной точностью любой непрерывной функции. Приведены приближения некоторых функций, в том числе функций сложения и умножения, минимальные с точки зрения задержки.

1. Введение

В конце 50-х и начале 60-х годов XX века, А. Н. Колмогоровым и его учениками была рассмотрена задача приближения непрерывных функций детерминированными [4, 5]. Поскольку для заданного ε не для всякой непрерывной функции существует ε -равная ей детерминированная функция, были предприняты попытки рассмотрения приближений непрерывных функций функциями, близкими к детерминированным. Например, в [4] была рассмотрена модель, так называемых многозвенных автоматов и был получен ряд результатов о приближении непрерывных функций некоторых классов многозвенными автоматами. В 70-х годах группа немецких математиков исследовала вопрос о возможности реализации непрерывных функций детерминированными [16, 17]. Вместе с тем, представляется естественным исследовать возможность приближения непрерывных функций детерминированными функциями с задержкой. Заметим, что детерминированные функции с задержкой являются разновидностью операторов с предвосхищением [12–15]. Если считать, что автомат — это преобразователь бесконечных входных последовательностей в такие же выходные последовательности, то появление автоматов с задержкой кажется более естественным, чем многозвенных автоматов, в которых рассматриваются конечные входные наборы. Кроме того, замкнутый класс дискретных функций с задержкой интересен сам по себе, как возможное естественное обобщение класса детерминированных функций. Некоторые результаты, связанные с возможностью приближения непрерывных функций детерминированными функциями с задержкой, были получены в [6–11]. В предлагаемой статье содержится обобщения этих результатов и некоторые новые утверждения о сложности приближения непрерывных функций.

2. Дискретные детерминированные функции с задержкой и их свойства

Рассмотрим множество E всех бесконечных двоичных последовательностей. Множество всех функций вида $f: E^n \rightarrow E$ будем обозначать P . Предположим, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ — произвольные последовательности из E , тогда $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — набор таких последовательностей. Пусть $a_1|k, a_2|k, \dots, a_n|k$ — первые k членов последовательностей $a_1, a_2, \dots, a_n$ соответственно, тогда $\tilde{a}|k = (a_1|k, a_2|k, \dots, a_n|k)$. Назовем функцию f детерминированной, если для всех $k = 1, 2, \dots$

$$\forall \tilde{a}, \tilde{b}: \quad \tilde{a}|k = \tilde{b}|k \implies f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k.$$

Класс всех детерминированных функций обозначим P_d , все остальные функции из P будем называть недетерминированными.

Заметим, что понятие детерминированной функции может быть интерпретировано следующим образом. Пусть, как и раньше, $\tilde{a}$ есть n -местный набор бесконечных последовательностей из E и $F(\tilde{a}) = b$. Предположим, что имеется некоторое дискретное устройство с n входами и одним выходом F , и этот дискретный преобразователь функционирует во времени следующим образом: на входы в моменты времени $t = 1, 2, 3, \dots$ подаются входные последовательности $a_1 = a_1(1)a_1(2)\dots$, $a_2 = a_2(1)a_2(2)\dots$ и $a_3 = a_3(1)a_3(2)\dots$. В эти же моменты времени t на выходе возникает выходная последовательность $b = b(1)b(2)\dots$, причем $b = F(\tilde{a})$ и значение $b(k)$ зависит только от значений входных последовательностей в моменты времени $t = 1, 2, 3, \dots, k$. Функция F является детерминированной [2]. Такие дискретные преобразователи называются автоматами, а реализуемые ими функции — автоматными.

В дальнейшем будут проводиться параллели с автоматами при рассмотрении детерминированных функций. Эти функции часто будут трактоваться как результат работы некоторых автоматов во времени. На множестве P обычным образом введем понятия суперпозиции функций, замкнутого класса и полной системы [2].

Определение 1. Функция f является детерминированной функцией с задержкой τ , где τ — произвольное неотрицательное целое число, если для любого $k = 1, 2, 3, \dots$ и любых $\tilde{a}, \tilde{b}$

$$\tilde{a}|k + \tau = \tilde{b}|k + \tau \implies f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k.$$

Множество всех функций с задержкой τ обозначим P_d^τ . Заметим, что $P_d^0 = P_d$.

Множество функций P_d^τ можно определить и следующим образом.

Определение 2. Функция f является детерминированной функцией с задержкой τ , где τ — произвольное неотрицательное целое число, если существует такая детерминированная функция g , что для любого $\tilde{a}$ и $b = g(\tilde{a})$, $b = b(1)b(2)b(3)\dots$, значение функции f на $\tilde{a}$ равно

$$f(\tilde{a}) = b(\tau + 1)b(\tau + 2)b(\tau + 3)\dots$$

Предложение 1. Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство. Пусть f удовлетворяет условию: для любого $k = 1, 2, 3, \dots$ и любых $\tilde{a}, \tilde{b}$

$$\tilde{a}|k + \tau = \tilde{b}|k + \tau \implies f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k.$$

Определим дискретную функцию g следующим образом: если $f(\tilde{b}) = b(1)b(2)\dots$, то $g(\tilde{b}) = 00\dots 0b(1)b(2)\dots$, где в начале последовательности $00\dots 0b(1)b(2)\dots$ стоят τ нулей, то есть функция g в течение первых τ тактов выдает нули, а затем ее значения совпадают со значениями функции f на том же входном наборе. Покажем, что функция g является детерминированной. Предположим, что $\tilde{a}|k = \tilde{b}|k$ и $k \leq \tau$, тогда $g(\tilde{a})|k = g(\tilde{b})|k$, так как функция g в течение первых τ тактов выдает нули. Пусть теперь $k = i + \tau$, где $i > 0$. Тогда из условия $\tilde{a}|i + \tau = \tilde{b}|i + \tau$ следует, что $f(\tilde{a})|i = f(\tilde{b})|i$. Значит, $00\dots 0f(\tilde{a})|i + \tau = 00\dots 0f(\tilde{b})|i + \tau$, где в начале последовательностей $00\dots 0f(\tilde{a})$ и $00\dots 0f(\tilde{b})$ стоят τ нулей. Но, по определению функции g , $g(\tilde{a}) = 00\dots 0f(\tilde{a})$, $g(\tilde{b}) = 00\dots 0f(\tilde{b})$. Таким образом, при любом k

$$\forall \tilde{a}, \tilde{b}: \quad \tilde{a}|k = \tilde{b}|k \implies g(\tilde{a})|k = g(\tilde{b})|k.$$

Отсюда следует, что функция g является детерминированной и, кроме того, для любого $\tilde{a}$ и $b = g(\tilde{a})$

$$f(\tilde{a}) = b(\tau + 1)b(\tau + 2)b(\tau + 3)\dots$$

Пусть теперь функция g является детерминированной и для любого $\tilde{a}$ и $b = g(\tilde{a})$, $b = b(1)b(2)b(3)\dots$

$$f(\tilde{a}) = b(\tau + 1)b(\tau + 2)b(\tau + 3)\dots$$

Рассмотрим произвольное целое $k, k \geq 1$, и предположим, что $\tilde{a}|k + \tau = \tilde{c}|k + \tau$. В силу детерминированности функции g справедливо равенство $g(\tilde{a})|k + \tau = g(\tilde{c})|k + \tau$. Но тогда, по определению функции f , справедливо равенство $f(\tilde{a})|k = f(\tilde{c})|k$. Значит для любого $k = 1, 2, \dots$ и любых $\tilde{a}, \tilde{c}$

$$\tilde{a}|k + \tau = \tilde{c}|k + \tau \implies f(\tilde{a})|k = f(\tilde{c})|k.$$

Предложение доказано.

Из определения 2 следует, что функцию n аргументов из множества P_d^τ можно трактовать так: берется дискретное детерминированное устройство с n входами, преобразующее бесконечные входные последовательности из нулей и единиц в такую же выходную последовательность, и рассматривается выход этого устройства не с первого момента времени, а с момента времени $\tau + 1$. Осуществляемое преобразование и считается функцией множества P_d^τ . Таким образом, функции с задержкой являются естественным обобщением детерминированных функций.

Проиллюстрировать связь детерминированных функций и функций с задержкой можно через одно из канонических представлений детерминированной функции — представление посредством дерева. Отметим, что дерево любой детерминированной функции естественным образом связывается с соответствующим автоматом: считается, что для пары a/b , приписанной k -му элементу i -го яруса, b — это то, что выдает автомат в момент времени i при подаче на вход последовательности, получающейся последовательным прохождением от корня до выбранной вершины, то есть, перемещаясь по дереву детерминированной функции из корня в вершину, соответствующую подаваемой входной последовательности, вторые элементы каждой пары образуют выходную последовательность. Заметим, что при получении согласно определению 2 из детерминированной функции функций с задержкой, как результат могут получаться и детерминированные функции. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Пусть своим деревом задана детерминированная функция $f(x)$, которую можно описать так: в первый момент времени эта функция равна 0, в последующие моменты, если первым был подан 0, то на каждом последующем такте работы реализуется полученное на предыдущем такте входное значение a , если была подана 1, то реализуется $\bar{a}$. Из этой функции легко получить функцию множества P_d^1 : будем считывать результат, начиная со второго яруса дерева функции. Таким образом, получаем следующую функцию f_1 : для любой последовательности $x \in E$ получаем, что $f_1(0x) = 0x$, $f_1(1x) = 0\bar{x}$ (где под $\bar{x}$ понимается поразрядное отрицание входного набора x). Эта функция детерминирована. Возьмем $\tau = 2$, то есть, будем считывать результат, начиная с третьего яруса дерева функции. Тогда получим функцию f_2 , которая выглядит так: для любой последовательности $x \in E$ получаем, что $f_2(00x) = 0x$, $f_2(01x) = 1x$, $f_2(10x) = 1\bar{x}$, $f_2(11x) = 0\bar{x}$. Очевидно, эта функция уже не будет являться детерминированной.

Приведем пример семейства функций $\{\Phi_\tau(x)\}$, где каждая из функций $\Phi_\tau(x)$ принадлежит множеству P_d^τ . Заметим, что это семейство функций будет использовано в дальнейшем.

Пример 2. Пусть τ — целое неотрицательное число и $x = x(1)x(2)x(3)\dots$. Тогда $\Phi_\tau(x)$ для любого x определяется так:

$$\Phi_\tau(x) = x(\tau + 1)x(\tau + 2)x(\tau + 3)\dots$$

Очевидно, что $\Phi_\tau(x) \in P_d^\tau$ и при $\tau = 0$ функция $\Phi_0(x)$ реализует тождественное преобразование.

Укажем одно из свойств множеств P_d^τ .

Свойство 1. Если $\tau \leq \nu$, то $P_d^\tau \subseteq P_d^\nu$. В частности, $P_d \subseteq P_d^\tau$ при всех $\tau = 1, 2, \dots$

Доказательство. Пусть $f \in P_d^\tau$ и $\tau \leq \nu$, тогда для любого $i = 1, 2, \dots$ и любых $\tilde{a}, \tilde{b}$

$$\tilde{a}|i + \tau = \tilde{b}|i + \tau \implies f(\tilde{a})|i = f(\tilde{b})|i.$$

В частности, это будет верно и при $i = \nu - \tau + 1, \nu - \tau + 2, \nu - \tau + 3, \dots$. Возьмем такие значения i и рассмотрим последовательность значений функции в моменты времени $i + \tau$, $i = 1, 2, \dots$. Эта последовательность совпадает с последовательностью значений функции в моменты времени $j + \nu$ при $j = 1, 2, 3, \dots$. Но тогда при всех $j = 1, 2, 3, \dots$ и любых $\tilde{a}, \tilde{b}$

$$\tilde{a}|j + \nu = \tilde{b}|j + \nu \implies f(\tilde{a})|i = f(\tilde{b})|i.$$

В этом случае $i + \tau = j + \nu$, поэтому $i \geq j$ и из $f(\tilde{a})|i = f(\tilde{b})|i$ следует, что $f(\tilde{a})|j = f(\tilde{b})|j$. Свойство доказано.

Множества функций P_d^τ не замкнуты относительно суперпозиции, но их объединение является замкнутым классом.

Определение 3. В класс P_d^∞ включим все функции множеств P_d^τ при $\tau = 0, 1, \dots$. Таким образом,

$$P_d^\infty = \bigcup_{\tau=0}^{\infty} P_d^\tau.$$

Предложение 2. Класс P_d^∞ замкнут.

Доказательство. Рассмотрим произвольные функции $f, f_1, f_2, \dots, f_n$. Не ограничивая общности, можно считать, что все эти функции имеют одинаковую арифность, вводя при необходимости фиктивные переменные. В силу свойства 1 множеств P^τ , также можно считать, что все эти функции принадлежат одному множеству P_d^τ , выбрав в качестве такового наибольшее из множеств, которым принадлежат функции $f, f_1, f_2, \dots, f_n$. Покажем, что суперпозиция этих функций $f(f_1, f_2, \dots, f_n)$ будет функцией с задержкой 2τ , то есть будет принадлежать множеству $P_d^{2\tau}$. Рассмотрим произвольные наборы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ такие, что $\tilde{a}|i + 2\tau = \tilde{b}|i + 2\tau$ для любого $i = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{a})|i + \tau &= f_1(\tilde{b})|i + \tau, \\ f_2(\tilde{a})|i + \tau &= f_2(\tilde{a})|i + \tau, \\ &\vdots \\ f_n(\tilde{a})|i + \tau &= f_n(\tilde{b})|i + \tau, \end{aligned}$$

так как $f_1, f_2, \dots, f_n \in P_d^\tau$. Но функция f тоже принадлежит P_d^τ . Поэтому

$$f(f_1(\tilde{a}), f_2(\tilde{a}), \dots, f_n(\tilde{a}))|i = f(f_1(\tilde{b}), f_2(\tilde{b}), \dots, f_n(\tilde{b}))|i,$$

что и доказывает предложение.

Лемма 1. Пусть $\Phi_1(x)$ — одна из функций $\Phi_\tau(x)$ примера 2, рассмотренного ранее, при $\tau = 1$. Тогда при любом $\tau > 1$

$$\Phi_\tau(x) = \Phi_1(\Phi_1(\dots(\Phi_1(x))\dots)),$$

где в правой части равенства в суперпозиции участвуют τ функций $\Phi_1(x)$.

Доказательство. Используем индукцию по τ . Так как $\Phi_1(x) = x(2)x(3)\dots$, при $x = x(1)x(2)x(3)\dots$ справедливы равенства

$$\Phi_1(\Phi_1(x)) = x(3)x(4)\dots = \Phi_2(x).$$

Пусть утверждение доказано для $\tau = k$, докажем его для $\tau = k + 1$. Рассмотрим суперпозицию

$$\Phi(x) = \Phi_1(\Phi_1(\dots(\Phi_1(x))\dots)),$$

где в правой части использована $k + 1$ функция $\Phi_1(x)$. По предположению индукции, выполнены равенства

$$\Phi(x) = \Phi_1(\Phi_1(\dots(\Phi_1(x))\dots)) = \Phi_1(\Phi_k(x)).$$

Но при $x = x(1)x(2)x(3)x(4)\dots$, по определению $\Phi_k(x)$,

$$\Phi_k(x) = x(k+1)x(k+2)x(k+3)\dots$$

Поэтому

$$\Phi_1(\Phi_k(x)) = x(k+2)x(k+3)\dots = \Phi_{k+1}(x).$$

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$P_d^\infty = [P_d \cup \{\Phi_1(x)\}].$$

Доказательство. Функция $\Phi_1(x)$ принадлежит замкнутому классу P_d^∞ , поэтому достаточно показать, что любую функцию этого класса можно получить с помощью суперпозиций детерминированных функций и функции $\Phi_1(x)$. Рассмотрим произвольную функцию f , принадлежащую множеству P_d^τ . Согласно определению 2 множества функций P_d^τ , существует такая детерминированная функция g , что при любом $\tilde{a}$, если $b = g(\tilde{a})$, то $f(\tilde{a}) = b(\tau + 1)b(\tau + 2)b(\tau + 3) \dots$. Но тогда $f(\tilde{a}) = \Phi_\tau(g(\tilde{a}))$ при любом $\tilde{a}$. По лемме 1, функцию $\Phi_\tau(x)$ можно получить суперпозициями функций $\Phi_1(x)$, что и доказывает теорему.

3. Действительные детерминированные функции с задержкой и их свойства

Каждой двоичной последовательности $a(1)a(2) \dots a(i) \dots$ сопоставим число из $[0, 1]$, равное $0,a(1)a(2) \dots a(i) \dots$. Из двух возможных представлений $0,a(1)a(2) \dots a(i)100 \dots = 0,a(1)a(2) \dots a(i)0111 \dots$ выберем первое. Для числа 1 берем представление $1 = 0,1111 \dots$. Числа отрезка $[0, 1]$, допускающие два представления, будем называть неправильными или двоично-рациональными, остальные числа будем называть правильными. Аналогичным образом перейдем от наборов $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E^n$ к точкам n -мерного куба $[0, 1]^n$. При этом n -мерную точку $\tilde{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ будем называть неправильной, если хотя бы одна из ее координат является неправильным числом. В противном случае точка правильная или двоично-рациональная. Заметим, что множество двоично-рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ есть множество чисел, равных рациональным дробям вида $m/2^k$, где $0 \leq m/2^k \leq 1$, m, k — целые неотрицательные числа.

Определение 4. Функцию $\mu: [0, 1] \rightarrow E$ определим следующим образом: для любого числа $a \in [0, 1]$, где $a = 0,a_1a_2a_3 \dots$, значение функции равно $\mu(a) = a_1a_2a_3 \dots$.

Определение 5. Для любой бесконечной двоичной последовательности $a = a_1a_2a_3 \dots$ определим функцию $\mu^{-1}: E \rightarrow [0, 1]$ так, что

- (1) если существует натуральное число k такое, что $a = a_1a_2 \dots a_k01111 \dots$, то есть, начиная с $k+2$ члена, a представляет собой бесконечную последовательность единиц, то $\mu^{-1}(a) = 0,a_1a_2 \dots a_k1000 \dots$;
- (2) для остальных последовательностей $\mu^{-1}(a) = 0,a_1a_2a_3 \dots$.

Определение 6. Любой дискретной функции $f: E^n \rightarrow E$ однозначно сопоставим действительную функцию $g: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ таким образом, что для любой n -мерной точки $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$

$$g(b_1, b_2, \dots, b_n) = \mu^{-1}f(\mu(b_1), \mu(b_2), \dots, \mu(b_n)).$$

Действительную функцию g будем называть функцией, соответствующей дискретной функции f .

Рис. 1.

Рис. 2.

Множества действительных функций, соответствующих множествам дискретных функций P , P_d , P_d^τ , P_d^∞ , будем обозначать D , $\mu^{-1}(P_d)$, $\mu^{-1}(P_d^\tau)$, $\mu^{-1}(P_d^\infty)$ соответственно. Заметим, что при таком сопоставлении теряется информация о преобразовании последовательностей вида $a_1 a_2 \dots a_i 0111 \dots$. Кроме того, может возникать некоторое несоответствие выхода дискретной функции значению функции действительных аргументов, в том случае, когда выходной последовательности соответствует неправильное (двоично-рациональное) число.

Пример 3. В качестве примера рассмотрим детерминированную функцию, заданную своей диаграммой переходов, и функции действительного переменного, эквивалентные ей в смысле определения 6, при задержке $\tau = 0, 1, 2$. Рассмотрим функцию с начальным состоянием q_1 , заданную на рис. 1.

Графики соответствующих функций действительного переменного при $\tau = 0, 1, 2$ имеют вид, показанный на рис. 2.

В дальнейшем более естественным будет рассматривать не сами множества действительных функций $\mu^{-1}(P_d)$, $\mu^{-1}(P_d^\tau)$, $\mu^{-1}(P_d^\infty)$, а некоторые их подмножества. Это позволит в большей степени отразить содержательный смысл понятия детерминированности.

Определение 7. Пусть $a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ и $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ — действительные числа отрезка $[0, 1]$ и k — натуральное число. Тогда будем считать, что $a|k = b|k$, если $\mu(a)|k = \mu(b)|k$, то есть, у чисел совпадают первые k двоичные разрядов. Для точек $\tilde{a}, \tilde{b} \in [0, 1]^n$ справедливо равенство $\tilde{a}|k = \tilde{b}|k$, если в каждой координате $a_i|k = b_i|k$. Действительную функцию f назовем детерминированной, если для любого $k = 1, 2, 3 \dots$ из равенства $\tilde{a}|k = \tilde{b}|k$ следует, что $f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k$. Класс всех детерминированных функций обозначим D_d . В множество D_d^τ действительных функций с задержкой τ включим все функции $\mu^{-1}(P_d^\tau)$, обладающие свойством: для любого $k = 1, 2, 3 \dots$ из равенства $\tilde{a}|k + \tau = \tilde{b}|k + \tau$ следует, что $f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k$.

Класс D_d^∞ определим как объединение всех множеств D_d^τ , то есть

$$D_d^\infty = \bigcup_{\tau=0}^{\infty} D_d^\tau.$$

Следующий пример показывает, что множества функций $\mu^{-1}(P_d^\tau)$ и D_d^τ не совпадают.

Пример 4. Укажем дискретную функцию $f(x)$, принадлежащую множеству P_d^τ , для которой $\mu^{-1}f(\mu(x))$ не принадлежит D_d^τ . Пусть значение $f(x)$ на всех последовательностях, начинающихся с $0\dots 01$, где в начале стоит $\tau + 1$ ноль, равно $0111\dots$. На остальных последовательностях функция $f(x)$ равна $00\dots 0\dots$. Тогда

$$\mu^{-1}f(\mu(0,0\dots 0\dots)) = 0,00\dots 0\dots,$$

но

$$\mu^{-1}f(\mu(0,0\dots 0100\dots)) = 0,100\dots$$

(предполагается, что в числе $0,0\dots 0100\dots$ единица стоит на $\tau + 2$ месте). Получаем, что у наборов $\mu(0,0\dots 0\dots)$ и $\mu(0,0\dots 010\dots)$ совпадают первые $\tau + 1$ значений, но числа $\mu^{-1}f(\mu(00\dots 0\dots))$ и $\mu^{-1}f(\mu(00\dots 0100\dots))$ отличаются уже в первом разряде.

Очевидна замкнутость класса D_d . Нижеследующие доказательства свойства 2 и предложения 3 для функций действительных аргументов по существу повторяют доказательства свойства 1 и предложения 2.

Свойство 2. Если $\tau \leq \nu$, то $D_d^\tau \subseteq D_d^\nu$. В частности, $D_d \subseteq D_d^\tau$ при всех $\tau = 1, 2, \dots$

Доказательство. Пусть $f \in D_d^\tau$ и $\tau \leq \nu$, тогда для любого $i = 1, 2, \dots$ и любых $\tilde{a}, \tilde{b} \in [0, 1]^n$ справедливо свойство

$$\tilde{a}|i + \tau = \tilde{b}|i + \tau \implies f(\tilde{a})|i = f(\tilde{b})|i.$$

Это свойство будет выполнено и при $i = \nu - \tau + 1, \nu - \tau + 2, \nu - \tau + 3, \dots$. При таких i последовательность значений $i + \tau$ совпадает с последовательностью значений $j + \nu$ при $j = 1, 2, 3, \dots$. Поэтому при всех $j = 1, 2, 3$ и любых $\tilde{a}, \tilde{b}$

$$\tilde{a}|j + \nu = \tilde{b}|j + \nu \implies f(\tilde{a})|i = f(\tilde{b})|i,$$

где $i = \nu - \tau + j$. Отсюда, поскольку $i \geq j$, следует, что

$$\tilde{a}|j + \nu = \tilde{b}|j + \nu \implies f(\tilde{a})|i = f(\tilde{b})|i \implies f(\tilde{a})|j = f(\tilde{b})|j.$$

Свойство доказано.

Предложение 3. Класс действительных функций D_d^∞ замкнут относительно суперпозиции.

Доказательство. Рассмотрим произвольные функции $f, f_1, f_2, \dots, f_n$. Не ограничивая общности, можно считать, что все эти функции имеют одинаковую арифметичность, вводя при необходимости фиктивные переменные. В силу свойства 2 множеств D_d^τ , также можно считать, что все эти функции принадлежат одному множеству, выбрав в качестве такового наибольшее из множеств, которому принадлежат функции $f, f_1, f_2, \dots, f_n$. Покажем, что суперпозиция этих функций $f(f_1, f_2, \dots, f_n)$ будет функцией с задержкой 2τ , то есть

будет принадлежать множеству $D_d^{2^\tau}$. Рассмотрим точки $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ такие, что $\tilde{a}|i + 2\tau = \tilde{b}|i + 2\tau$ при всех $i = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{a})|i + \tau &= f_1(\tilde{b})|i + \tau, \\ f_2(\tilde{a})|i + \tau &= f_2(\tilde{b})|i + \tau, \\ &\vdots \\ f_n(\tilde{a})|i + \tau &= f_n(\tilde{b})|i + \tau, \end{aligned}$$

так как $f_1, f_2, \dots, f_n \in D_d^\tau$. Но функция f тоже принадлежит D_d^τ . Поэтому

$$f(f_1(\tilde{a}), f_2(\tilde{a}), \dots, f_n(\tilde{a}))|i = f(f_1(\tilde{b}), f_2(\tilde{b}), \dots, f_n(\tilde{b}))|i.$$

Иными словами, показано, что для любого $i = 1, 2, \dots$ и любых $\tilde{a}, \tilde{b} \in [0, 1]^n$

$$\begin{aligned} \tilde{a}|i + 2\tau &= \tilde{b}|i + 2\tau \\ \implies f(f_1(\tilde{a}), f_2(\tilde{a}), \dots, f_n(\tilde{a}))|i &= f(f_1(\tilde{b}), f_2(\tilde{b}), \dots, f_n(\tilde{b}))|i. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Аналогом семейства функций $\Phi_\tau(x)$ в множествах D_d^τ будет семейство функций $F_\tau(x) = \{2^\tau x\}$, где $\{a\}$ — дробная часть числа a . Для функций $F_\tau(x)$ справедливы утверждения, аналогичные утверждениям о функциях $\Phi_\tau(x)$.

Лемма 2. При любом $\tau > 1$ выполнено равенство

$$F_\tau(x) = F_1(F_1(\dots(F_1(x))\dots)),$$

где в правой части равенства в суперпозиции участвуют τ функций $F_1(x)$.

Лемма 3. Для любой функции f множества D_d^τ существует такая функция g множества D_d , что $f = F_\tau(g)$.

Доказательство. Заметим, что функция $2^{-\tau}x$ является детерминированной, так как при $a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \in [0, 1]$

$$2^{-\tau}a = 0, 0 \dots 0 a_1 a_2 a_3 \dots,$$

где первые τ разрядов результата равны 0. Введем обозначение

$$2^{-\tau}\tilde{x} = (2^{-\tau}x_1, 2^{-\tau}x_2, \dots, 2^{-\tau}x_n).$$

Пусть функция f принадлежит множеству D_d^τ . Тогда для любого $i = 1, 2, 3 \dots$ из $\tilde{a}|i + \tau = \tilde{b}|i + \tau$ следует, что $f(\tilde{a})|i = f(\tilde{b})|i$. Покажем, что функция $g(\tilde{x}) = 2^{-\tau}f(\tilde{x})$ также является детерминированной. Если $\tilde{a}|i + \tau = \tilde{b}|i + \tau$ для любого $i = 1, 2, 3 \dots$, то, учитывая, что умножение на $2^{-\tau}$ сводится к появлению τ нулей после запятой, получаем, что $2^{-\tau}f(\tilde{a})|i + \tau = 2^{-\tau}f(\tilde{b})|i + \tau$, то есть при $i > \tau$ из $\tilde{a}|i = \tilde{b}|i$ следует равенство $g(\tilde{a})|i = g(\tilde{b})|i$. Поскольку при любом $\tilde{x}$ первые τ разрядов $g(\tilde{x})$ равны 0, это свойство выполнено и при $i = 1, 2, \dots, \tau$. Остается заметить, что справедливо равенство

$$F_\tau(g(\tilde{x})) = F_\tau(2^{-\tau}f(\tilde{x})) = f(\tilde{x}).$$

Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$D_d^\infty = [D_d \cup \{F_1(x)\}].$$

Докажем некоторые утверждения о непрерывности функций множеств $\mu^{-1}(P_d)$, $\mu^{-1}(P_d^\tau)$, $\mu^{-1}(P_d^\infty)$.

Предложение 4. *Пусть $f \in \mu^{-1}(P_d^\tau)$ и $m > \tau$. Тогда если числа $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ совпадают в первых m разрядах, то значения $f(\tilde{a})$, $f(\tilde{b})$ отличаются не более чем на $2^{-m+\tau}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию f , принадлежащую множеству $\mu^{-1}(P_d^\tau)$. По определению множества функций $\mu^{-1}(P_d^\tau)$ и согласно предложению 1, существует функция $g \in P_d^\tau$, соответствующая f . Рассмотрим дерево этой функции. Так как значения первых m двоичных разрядов точек n -мерного куба $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ совпадают, в дереве им соответствует один и тот же путь длины m . Это значит, что, начиная с яруса $\tau + 1$ и до яруса $m - \tau$ дерева (эти ярусы определяют первые $m - \tau$ разрядов значения функции f), значения функции g на этих наборах совпадают, и следовательно, значения функции f различаются менее, чем на $2^{-m+\tau}$, если числа правильные. Возможна ситуация, когда числа различаются в одном из первых $m - \tau$ разрядов. Это может быть, когда одно из чисел $f(\tilde{a})$, $f(\tilde{b})$ неправильное и ему в дереве функции g соответствует выходная последовательность, которая, начиная с разряда $m - \tau + 1$, заканчивается бесконечной последовательностью единиц. Пусть, для определенности это неправильное число равно $f(\tilde{a})$. Обозначим через $f_{m-\tau}$ число, полученное из $f(\tilde{b})$ отбрасыванием последних разрядов, начиная с разряда с номером $(m - \tau + 1)$. Тогда, в силу определения функции μ^{-1} , справедливо равенство

$$f(\tilde{a}) = f_{m-\tau} + 2^{-m+\tau}.$$

Значит, и в этом случае разность $|f(\tilde{a}) - f(\tilde{b})|$ будет не больше $2^{-m+\tau}$.

Следующие предложения 5, 6 были доказаны Н. Ф. Тюленевым для функций одного аргумента. Докажем их справедливость для функций произвольного числа аргументов.

Предложение 5. *Если $f(\tilde{x}) \in \mu^{-1}(P_d^\tau)$, то эта функция непрерывна справа во всех точках $\tilde{a} \in [0, 1]^n$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого значения $\tilde{a} \in [0, 1]^n$ существует $\tilde{\delta} \in [0, 1]^n$, $\delta_i > 0$ при $i = 1, \dots, n$, такое, что $|f(\tilde{a} + \tilde{\delta}) - f(\tilde{a})| < \varepsilon$. Возьмем натуральное число m таким, чтобы $2^{-m} < \varepsilon$. Пусть $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, и пусть $a_i = 0.a_1^i a_2^i \dots a_{m+\tau}^i \dots$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда для любого $i = 1, \dots, n$ существуют натуральные числа p_i , $p_i > m + \tau$, такие, что $a_{p_i}^i = 0$ в силу договоренности о представлении чисел отрезка $[0, 1]$. Положим $\tilde{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, где $\delta_i = 0.0 \dots 0100 \dots$ и единица стоит в разряде p_i . Согласно предложению 4, значения $f(\tilde{a} + \tilde{\delta})$ и $f(\tilde{a})$ отличаются не более чем на 2^{-m} . Тем более это справедливо для любого $\tilde{\sigma}$ такого, что $0 \leq \sigma_i < \delta_i$ при $i = 1, \dots, n$, то есть $f(\tilde{a} + \tilde{\sigma})$ и $f(\tilde{a})$ отличаются не более чем на $2^{-m} < \varepsilon$. Предложение 5 доказано.

Предложение 6. *Если $f(\tilde{x}) \in \mu^{-1}(P_d^\tau)$, то эта функция непрерывна слева во всех правильных точках.*

Доказательство. Аналогично предыдущему случаю, надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой правильной точки $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ существует $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, такое, что $|f(\tilde{a} - \delta) - f(\tilde{a})| < \varepsilon$. Возьмем натуральное число m таким, чтобы $2^{-m} < \varepsilon$. Пусть $a_i = 0, a_1^i a_2^i \dots$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого i существуют натуральные числа p_i , $p_i > m + \tau$, такие, что $a_{p_i}^i = 1$ (так как все a_i правильные). Положим $\tilde{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, где $\delta_i = 0, 0 \dots 010 \dots$ и единица стоит в разряде p_i . Согласно предложению 4, $|f(\tilde{a} - \delta) - f(\tilde{a})| < \varepsilon$. Предложение 6 доказано.

Из предложений 5 и 6 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Любая функция $f(\tilde{x}) \in \mu^{-1}(P_d^\tau)$ непрерывна во всех правильных точках n -мерного куба $[0, 1]^n$.

Следствие 2. Мощность множества точек разрыва любой функции одного аргумента $f(x)$, где $f \in \mu^{-1}(P_d^\tau)$, не более чем счетна.

Доказательство. Точками разрыва функции f могут быть только двоично-рациональные точки, но мощность этого множества счетная.

Поскольку множества D_d , D_d^τ , D_d^∞ являются подмножествами соответственно множеств $\mu^{-1}(P_d)$, $\mu^{-1}(P_d^\tau)$, $\mu^{-1}(P_d^\infty)$, предложения 4–6 и следствия предложений 5, 6 справедливы и для них.

Приведем критерий принадлежности функции множеству D_d^τ . Рассмотрим шаг $h = 2^{-k}$ и множество точек отрезка $[0, 1]$ вида $x_i = i2^{-k}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^k$. В дальнейшем это множество будем называть решеткой точек с шагом $h = 2^{-k}$ и обозначать I_h . Аналогичным образом, в n -мерном кубе $[0, 1]^n$ введем решетку I_h^n , как декартову степень решетки I_h . Пусть $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — произвольная точка решетки I_h^n . Интервалом $I_h(\tilde{a})$ решетки I_h^n назовем множество точек $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного куба $[0, 1]^n$ таких, что $a_i \leq x_i < h$ при $i = 1, 2, \dots$

Теорема 3. Функция $f(\tilde{x})$ принадлежит множеству D_d^τ тогда и только тогда, когда

- (1) она непрерывна справа во всех точках n -мерного куба $[0, 1]^n$;
- (2) при любом $i = \tau + 1, \tau + 2, \dots$ на каждом интервале $I_h(\tilde{a})$, $h = 2^{-i}$, эта функция удовлетворяет условию

$$f(\tilde{a}|i - \tau) \leq f(\tilde{x}) < f(\tilde{a}|i - \tau) + 2^{-(i-\tau)},$$

где $f(\tilde{a})|i - \tau$ — число, полученное из $f(\tilde{a})$ отбрасыванием всех двоичных разрядов, начиная с разряда $i - \tau + 1$.

Доказательство. Докажем необходимость. Любые две точки интервала $I_h(\tilde{a})$, $h = 2^{-i}$, совпадают в первых i разрядах по всем координатам. Поэтому, согласно предложению 4, значения функции f на любых точках этого интервала отличаются от значения $f(\tilde{a})$ не более чем на $2^{-(i-\tau)}$. Кроме того, по свойству 2, если $\tau \leq i$, то $D_d^\tau \subseteq D_d^i$. Следовательно, значения $f(\tilde{a})$ и $f(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in I_h(\tilde{a})$, совпадают в первых $i - \tau$ разрядах.

Докажем достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Для произвольного $i = \tau + 1, \tau + 2, \dots$ рассмотрим точки $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ такие, что $\tilde{a}|i = \tilde{b}|i$. Очевидно, что эти точки принадлежат одному интервалу $I_h(\tilde{c})$, $h = 2^{-i}$, где $\tilde{c}$ — точка решетки I_h^n , каждая координата которой совпадает в первых i разрядах с соответствующими разрядами координат точек $\tilde{a}$, $\tilde{b}$. Но тогда, по второму условию теоремы, значения функции f в точках $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ будут совпадать в первых $i - \tau$ разрядах, то есть f принадлежит множеству D_d^τ . Теорема доказана.

Пусть f — произвольная функция из D и I_h^n , $h = 2^{-i}$, $i \geq \tau + 1$, — некоторая решетка. Обозначим через f_h кусочно-постоянную функцию, значения которой на каждом из интервалов $I_h(\tilde{a})$ этой решетки равны $f(\tilde{a})|i - \tau$.

Следствие 3. *Функция f принадлежит множеству D_d^τ тогда и только тогда, когда при любом $i = \tau + 1, \dots$ на каждом интервале $I_h(\tilde{a})$, $h = 2^{-i}$, выполнено неравенство*

$$f_h \leq f(\tilde{x}) < f_h + 2^{-(i-\tau)}.$$

Следствие 4. *Любая кусочно-константная функция, значения которой на каждом из интервалов $I_h(\tilde{a})$ решетки I_h^n , $h = 2^{-\tau+1}$, постоянны, принадлежит классу D_d^τ .*

Функции множеств D_d , D_d^τ , D_d^∞ могут быть разрывными в неправильных точках. Чтобы лучше понять какими свойствами обладают функции этих множеств, выделим в каждом из них подмножества непрерывных функций и обозначим их CD_d , CD_d^τ , CD_d^∞ соответственно. Рассмотрим некоторые свойства этих множеств [9].

Для любых точек $\tilde{x}, \tilde{y} \in [0, 1]^n$ будем считать, что

$$|\tilde{x} - \tilde{y}| = \max |x_i - y_i|,$$

где максимум берется по всем координатам.

Определение 8. Будем говорить, что функция $f(\tilde{x}) \in D$ удовлетворяет условию Липшица с константой L , если для любых $\tilde{x}, \tilde{y}$

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq L|\tilde{x} - \tilde{y}|.$$

Если для любых $\tilde{x}, \tilde{y}$ выполняется строгое неравенство

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| < L|\tilde{x} - \tilde{y}|,$$

то функция строго удовлетворяет условию Липшица. Множество всех функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой L , обозначим $\text{Lip}(L)$.

Рассмотрим решетку I_h^n . Точки $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ решетки назовем соседними, если либо $|x_i - y_i| = h$, либо $|x_i - y_i| = 0$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 4. *Пусть $h = 2^{-m}$, $f \in CD_d$, $\tilde{x}, \tilde{y}$ — соседние точки в решетке I_h^n , причем либо $x_i = y_i$, либо $y_i = x_i + h$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда*

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq h.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек $\tilde{z}^j$, сходящуюся к $\tilde{y}$. Координаты $\tilde{z}^j$ определяются так: если $x_i = y_i$, то $z_i^j = x_i$ или $z_i^j = x_i + \varepsilon_i$, $0 \leq \varepsilon_i < h$, если $y_i = x_i + h$. Заметим, что при любом j координаты $\tilde{x}, \tilde{z}^j$ совпадают в первых m разрядах. Поскольку $f(\tilde{x}) \in CD_d$, значения $f(\tilde{x})$ и $f(\tilde{z}^j)$ совпадают в первых m разрядах и

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{z}^j)| < 2^{-m}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве и учитывая, что f — непрерывная функция, получаем, что

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq h.$$

Лемма 5. Пусть $h = 2^{-m}$, $f \in CD_d$, $\tilde{x}, \tilde{y}$ — соседние точки в решетке I_h^n . Тогда

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq 2h.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_n)$ — точка решетки I_h^n , где $z_i = \min(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$. По лемме 4, справедливы неравенства

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{z})| \leq h, \quad |f(\tilde{y}) - f(\tilde{z})| \leq h.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| &= |(f(\tilde{x}) - f(\tilde{z})) + (f(\tilde{z}) - f(\tilde{y}))| \\ &\leq |f(\tilde{x}) - f(\tilde{z})| + |f(\tilde{z}) - f(\tilde{y})| \leq 2h. \end{aligned}$$

Лемма 6. Пусть $h = 2^{-m}$, $f \in CD_d$, $\tilde{x}, \tilde{y}$ — произвольные точки решетки I_h^n . Тогда

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq 2|\tilde{x} - \tilde{y}|.$$

Доказательство. Предположим, что $\max |x_i - y_i| = rh$, где r — целое число. Тогда существует последовательность $\tilde{z}^0 = \tilde{x}, \tilde{z}^1, \dots, \tilde{z}^r = \tilde{y}$ из $r+1$ точки решетки I_h^n , в которой любые две последовательные точки являются соседними. Тогда, используя лемму 5, получаем, что

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| &= |(f(\tilde{z}^0) - f(\tilde{z}^1)) + (f(\tilde{z}^1) - f(\tilde{z}^2)) + \dots + (f(\tilde{z}^{r-1}) - f(\tilde{z}^r))| \\ &\leq |f(\tilde{z}^0) - f(\tilde{z}^1)| + |f(\tilde{z}^1) - f(\tilde{z}^2)| + \dots + |f(\tilde{z}^{r-1}) - f(\tilde{z}^r)| \leq 2rh. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 4. Если $f(\tilde{x}) \in CD_d$, то $f(\tilde{x}) \in \text{Lip}(2)$.

Доказательство. Рассмотрим множество A точек всевозможных решеток I_h^n . Заметим, что это множество состоит из всех точек n -мерного куба $[0, 1]^n$, все координаты которых являются двоично-рациональными числами. Пусть $\tilde{x}, \tilde{y} \in A$, тогда существуют такое $h = 2^{-m}$ и такая решетка I_h^n , что $\tilde{x}, \tilde{y} \in I_h^n$. Для любых точек этой решетки по лемме 6 выполнено неравенство

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq 2|\tilde{x} - \tilde{y}|.$$

Но множество A всюду плотно в кубе $[0, 1]^n$ и функция f непрерывна, поэтому это неравенство выполнено и для произвольных точек $\tilde{x}, \tilde{y}$ этого куба.

Следствие 5. Любая функция множества CD_d^τ удовлетворяет условию Липшица с константой $2^{\tau+1}$.

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}) \in CD_d^\tau$, тогда, по лемме 3, существует такая функция g множества CD_d , что $f = F_\tau(g)$, где $F_\tau(x) = \min(1, 2^\tau x)$. Поскольку функция g удовлетворяет условию Липшица с константой 2 и функция $F_\tau(x)$ удовлетворяет этому условию с константой 2^τ , функция f удовлетворяет условию Липшица с константой $2^{\tau+1}$. Следствие доказано.

А. Н. Колмогоровым было доказано, что всякую непрерывную функцию многих переменных, заданную в единичном кубе и принимающую значения из отрезка $[0, 1]$, можно представить в виде суперпозиции непрерывных функций одной переменной и функции сложения [1]. Суперпозиция функций, удовлетворяющих условию Липшица, также удовлетворяет условию Липшица для некоторой константы. Кроме того, функции сложения и умножения удовлетворяют этому условию. Известно, что не все непрерывные функции, заданные в n -мерном единичном кубе и принимающие значения из отрезка $[0, 1]$, удовлетворяют условию Липшица. Например, непрерывная функция

$$f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x}, \quad 0 < x \leq 1, \quad f(0) = 0$$

не удовлетворяет условию Липшица [3]. Поэтому из теоремы 4 и следствия из нее получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Множество $[CD_d^\infty \cup \{x + y\} \cup \{x * y\}]$ не содержит все непрерывные функции, определенные на единичном кубе и принимающие значения из отрезка $[0, 1]$.*

Таким образом, теорему А. Н. Колмогорова нельзя усилить, заменив множество непрерывных функций одного аргумента $C[0, 1]$, на множество непрерывных детерминированных функций с задержкой, причем любого числа аргументов, даже если разрешить использовать функцию умножения.

4. Приближение непрерывных функций действительными функциями с задержкой

Задача приближения непрерывных функций функциями специального вида очень часто появляется в математике. Детерминированные функции являются хорошей моделью реальных устройств — преобразователей сигналов, работающих в дискретные моменты времени. Переход от дискретных функций к функциям вещественных переменных, позволяет ставить вопрос о приближении непрерывных функций функциями с задержкой.

Определение 9. Пусть $\varepsilon > 0$, будем говорить, что функция $d(\tilde{x})$ ε -равна функции $f(\tilde{x})$ на единичном кубе $[0, 1]^n$, если при любом $\tilde{x} \in [0, 1]^n$ справедливо неравенство $|f(\tilde{x}) - d(\tilde{x})| < \varepsilon$. Будем также говорить, что в этом случае $d(\tilde{x})$ ε -приближает функцию $f(\tilde{x})$.

Пусть $C[0, 1]^n$ — множество непрерывных на единичном кубе $[0, 1]^n$ функций, принимающих значения из отрезка $[0, 1]$. Оказывается, что не всякую функцию множества $C[0, 1]^n$ можно ε -приблизить детерминированными функциями класса D_d (следствия из предложений 7, 8). Но функций класса D_d^∞ уже достаточно для решения этой задачи. Следующее утверждение было сформулировано в [6] и в [7] доказано для функций класса $\mu^{-1}(P_d^\tau)$. Учитывая малую доступность работы [7] приведем свое доказательство этого утверждения для класса D_d^∞ .

Теорема 6. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(\tilde{x}) \in C[0, 1]^n$ существует число $\tau \geq 0$ и функция $d(\tilde{x}) \in D_d^\tau$ такие, что $d(\tilde{x})$ ε -равна $f(\tilde{x})$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как непрерывная на компакте функция является равномерно непрерывной, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\tilde{x} - \tilde{y}| < \delta \implies |f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| < \varepsilon/2.$$

Выберем τ так, что $2^{-\tau} < \delta$ и рассмотрим решетку I_h^n при $h = 2^{-\tau}$. Для каждой точки $\tilde{a}_i$, $i = 0, 1, \dots$, решетки I_h^n обозначим через f_i значение функции f в этой точке с точностью $\lceil \log 1/\varepsilon \rceil + 1$ разрядов, здесь и в дальнейшем $\lceil * \rceil$ — целая часть числа с избытком, а логарифм берется по основанию 2. Тогда $f(\tilde{a}_i) - f_i \leq \varepsilon/2$ и у числа f_i по крайней мере, начиная с $\lceil \log 1/\varepsilon \rceil + 2$ разряда, все разряды равны нулю. Построим функцию $d(\tilde{x}) \in D_d^\tau$, которая ε -приближает функцию f . Для этого рассмотрим двоичное дерево высоты τ , к висячим вершинам которого подвешены деревья n -арных детерминированных функций. При этом к висячей вершине, соответствующей первым τ разрядам точки решетки $\tilde{a}_i$, подвесим дерево детерминированной функции, реализующей $\lceil \log 1/\varepsilon \rceil + 1$ первых разрядов числа f_i , а затем выдающей одни нули. Построенное дерево определяет некоторую функцию $g(\tilde{x}) \in P_d^\tau$. Пусть $d(\tilde{x})$ — функция множества D_d^τ , соответствующая функции $g(\tilde{x})$. Значение функции $g(\tilde{x})$ при любом $\tilde{x}$ по крайней мере с $\lceil \log 1/\varepsilon \rceil + 2$ разряда представляет собой нулевую последовательность, поэтому $d(\tilde{x})$ принадлежит множеству D_d^τ . Тогда для любого $\tilde{x} \in [0, 1]^n$ и точки $\tilde{a}_i$ решетки I_h^n , совпадающей с $\tilde{x}$ в первых τ разрядах,

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x}) - d(\tilde{x})| &= |(f(\tilde{x}) - f(\tilde{a}_i)) + (f(\tilde{a}_i) - d(\tilde{x}))| \\ &\leq |f(\tilde{x}) - f(\tilde{a}_i)| + |f(\tilde{a}_i) - d(\tilde{x})| < \varepsilon, \end{aligned}$$

так как $f_i = d(\tilde{x})$, $f(\tilde{a}_i) - f_i \leq \varepsilon/2$ и $|\tilde{x} - \tilde{a}_i| < \delta$. Теорема доказана.

Определение 10. Назовем функцию $f(\tilde{x}) \in D_d^\tau$ ограниченной m разрядами, если существует такое m , что $f(\tilde{x}) = 0, a_1 a_2 \dots a_m 000 \dots$ при любом $\tilde{x} \in [0, 1]^n$, то есть, при любом $\tilde{x}$ значение функции является двоично-рациональным числом, причем принадлежащим решетке I_h^n , где $h = 2^{-m}$.

Следствие 6. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(\tilde{x}) \in C[0, 1]^n$ существует целое число $\tau \geq 0$ и ограниченная $\lceil \log 1/\varepsilon \rceil + 1$ разрядами функция $d(\tilde{x}) \in D_d^\tau$ такие, что $d(\tilde{x})$ является ε -равной $f(\tilde{x})$.

Доказательство этого утверждения следует из доказательства теоремы 5 с учетом того, что деревья, реализующие соответствующие рациональные числа, можно рассматривать до уровня $\lceil \log 1/\varepsilon \rceil + 1$, так как разряды, после стоящего на этом месте, не могут повлиять на точность приближения, и их можно задать равными нулю.

В дальнейшем будем считать, что $\varepsilon = 2^{-k}$, где k — натуральное число и $k > 1$. Кроме того, если $d(\tilde{x}) \in D_d^\tau$ и $d(\tilde{x})$ — функция, ε -равная $f(\tilde{x})$, а $g(\tilde{x})$ — дискретная функция, соответствующая $d(\tilde{x})$, то будем говорить, что и $g(\tilde{x})$ ε -приближает $f(\tilde{x})$.

Теорема 7. Пусть $\varepsilon = 2^{-k}$, $\tau = k + \lceil \log L \rceil - 2$, где $\tau = 0$ при $k + \lceil \log L \rceil - 2 \leq 0$. Если функция $f(\tilde{x})$, принадлежащая множеству $C[0, 1]^n$, строго удовлетворяет условию Липшица с константой L на каждом из интервалов $I_h(\tilde{a})$ решетки I_h^n , $h = 2^{-(\tau+1)}$, или L не является степенью 2, то существует функция $d(\tilde{x}) \in D_d^\tau$, которая ε -приближает функцию $f(\tilde{x})$.

Доказательство. Рассмотрим кусочно-постоянную функцию $d(\tilde{x})$, значения которой на каждом из интервалов $I_h(\tilde{a})$ решетки I_h^n , $h = 2^{-(\tau+1)}$, постоянны и равны $(f_{\max} + f_{\min})/2$, где $f_{\max}$, $f_{\min}$ — максимум и минимум функции $f(\tilde{x})$ на замыкании интервала $I_h(\tilde{a})$. По следствию 4, эта функция принадлежит множеству D_d^τ . Покажем, что для любой точки $\tilde{x}$ интервала $I_h(\tilde{a})$ выполнено неравенство $|f(\tilde{x}) - d(\tilde{x})| < \varepsilon$. По условию Липшица, на интервале $I_h(\tilde{a})$

$$|f(\tilde{x}) - d(\tilde{x})| < (L/2)2^{-\tau-1} \leq 2^{-k},$$

если $f(\tilde{x})$ строго удовлетворяет условию Липшица и

$$|f(\tilde{x}) - d(\tilde{x})| \leq (L/2)2^{-\tau-1} < 2^{-k},$$

если L не есть степень 2.

Определение 11. Для любой непрерывной функции f и любого $\varepsilon > 0$ назовем сложностью реализации функции f наименьшее τ такое, что существует функция $d(\tilde{x})$ множества D_d^τ , которая ε -равна f . Сложность реализации функции f будем обозначать $L(f, \varepsilon)$, а при $\varepsilon = 2^{-k}$ будем считать, что $L(f, \varepsilon) = L(f, k)$.

Приведем примеры ε -приближений некоторых непрерывных функций функциями из множества D_d^τ , стараясь сделать задержку τ минимальной.

Пример 5. Рассмотрим функцию сложения $x + y$. Для того, чтобы эта функция принимала значения от 0 до 1, рассмотрим ее некоторое ограничение. Будем считать, что

$$x + y = \min(x + y, 1).$$

Предложение 7. Для функции $x + y$ при любом $\varepsilon = 2^{-k}$ справедливо равенство

$$L(x + y, k) = k - 1.$$

Доказательство. Так как функция $x + y$ строго удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 2$ на каждом из интервалов $I_h^n(\tilde{a})$ решетки I_h^n , $h = 2^{-k}$, по теореме 7 для нее при любом $\varepsilon = 2^{-k}$ существует ε -приближающая функция, принадлежащая множеству D_d^τ при $\tau = k - 1$.

Докажем, что ни одна из функций множества $D_d^{\tau-1}$ не реализует сложение с нужной точностью. Для этого достаточно показать, что знания $k - 1$ первых двоичных разрядов чисел x , y недостаточно для определения первого разряда суммы, при вычислении с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$. Укажем две пары двоичных чисел x_1, y_1 и x_2, y_2 , которые совпадают в первых $k - 1$ разрядах соответственно, различаясь в k -ом разряде. Кроме того, если $|(x_1 + y_1) - a| < \varepsilon$ и $|(x_2 + y_2) - b| < \varepsilon$, то в числе a первый разряд обязательно равен нулю, а в числе b — единице. Пусть $\delta > 0$ — достаточно малое число. Рассмотрим следующие две пары значений аргументов x_1, y_1 и x_2, y_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2^{-1} - 2^{-k+2}, & y_1 &= 0; \\ x_2 &= 2^{-1} - \delta, & y_2 &= 2^{-k+2} - \delta. \end{aligned}$$

Заметим, что у чисел x_1, x_2 и y_1, y_2 первые $k - 1$ разрядов совпадают. Тогда

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &= 2^{-1} - 2^{-k+2}, \\ x_2 + y_2 &= 2^{-1} + 2^{-k+2} - 2\delta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)| = 2 \cdot 2^{-k+2} - 2\delta > \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} 2^{-1} - (x_1 + y_1) &= 2^{-k+2} > \varepsilon, \\ (x_2 + y_2) - 2^{-1} &= 2^{-k+2} - 2\delta > \varepsilon. \end{aligned}$$

Эти неравенства означают, что любое число a , приближающее сумму $x_1 + y_1$ с точностью ε , с необходимостью имеет первый разряд равный 0, а число b , приближающее сумму $x_2 + y_2$ с той же точностью, должно иметь первый разряд 1. Таким образом, функции множества $D_d^{\tau-1}$ не могут приближать функцию $x + y$ с точностью ε .

Следствие 7. *Функцию сложения нельзя приблизить с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$ функциями класса D_d при любом целом $k > 1$.*

Пример 6. Рассмотрим функцию умножения $x \cdot y$, где $0 \leq x, y \leq 1$.

Предложение 8. *Для функции $x \cdot y$ при любом $\varepsilon = 2^{-k}$ справедливо равенство*

$$L(x \cdot y, k) = k - 1.$$

Доказательство. Покажем, что задержки $\tau = k - 1$ достаточно для приближения умножения с точностью ε . Так как функция $x \cdot y$ строго удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 1$, по теореме 7 для нее существует ε -приближающая функция при любом $\varepsilon = 2^{-k}$, принадлежащая множеству D_d^{τ} при $\tau = k - 1$. Докажем, что ни одна из функций множества $D_d^{\tau-1}$ не реализует умножение с нужной точностью. Аналогично случаю функции сложения, покажем, что знания первых $k - 1$ разрядов чисел x, y при вычислениях с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$ недостаточно для определения первого разряда произведения. Возьмем достаточно малое значение $\delta > 0$ и рассмотрим следующие пары значений аргументов:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \delta, & y_1 &= 2^{-1} + 2^{-k+1} - \delta; \\ x_2 &= 1 - 2^{-k+1}, & y_2 &= 2^{-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу договоренности о представлении двоичных чисел у пар чисел x_1, x_2 и y_1, y_2 первые $k - 1$ разрядов соответственно совпадают. Тогда

$$\begin{aligned} x_1 \cdot y_1 &= 2^{-1} + 2^{-k+1} - \delta 2^{-1} - \delta - \delta 2^{-k+1} + \delta^2 > 2^{-1} + 2^{-k} = 2^{-1} + \varepsilon; \\ x_2 \cdot y_2 &= 2^{-1} - 2^{-k} = 2^{-1} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, при вычислении с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$ в произведении $x_1 \cdot y_1$ первая двоичная цифра результата с необходимостью должна быть равна 1, а в произведении $x_2 \cdot y_2$ эта цифра равна нулю.

Следствие 8. *Функцию умножения нельзя приблизить с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$ функциями класса D_d при $k > 1$.*

Пример 7. Рассмотрим функцию $\sqrt[n]{x}$, где n — натуральное число.

Предложение 9. *Для функции $\sqrt[n]{x}$ при любом $\varepsilon = 2^{-k}$ справедливо равенство*

$$L(\sqrt[n]{x}, k) = k(n - 1).$$

Доказательство. Получим нижнюю оценку значения задержки. Предположим, что функция $d(x)$ с задержкой τ приближает функцию с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$. Функция $d(x)$ приближает $\sqrt[n]{x}$ при $x = 0$ с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$, поэтому $d(0) < 2^{-k}$. Это означает, что число $d(0)$ начинается с k нулей. С другой стороны, значения k первых разрядов функции $d(x)$ для любого x , начинающегося с $\tau + k$ нулей, должны быть нулевыми, иначе при $x = 0$ требуемая точность не достигается. Рассмотрим число $y = 2^{-(\tau+k)} - \delta$, где δ достаточно

мало. Отметим, что $\tau + k$ первых разрядов этого числа равны нулю. Поэтому τ должно быть таким, чтобы выполнялись неравенства

$$\sqrt[n]{2^{-(\tau+k)}} = \sqrt[n]{y} + \lambda < 2^{-k} + \lambda,$$

где λ можно сделать как угодно малым. Отсюда

$$2^{-(\tau+k)} \leq 2^{-nk} \implies \tau \geq kn - k = (n-1)k.$$

Покажем, что существует функция множества D_d^τ , которая после задержки $\tau = k(n-1)$ выдает последовательно k первых двоичных разряда числа $\sqrt[n]{x}$ для любого $x \in [0, 1]$. Заметим, что на отрезке $[0, 1]$ функция $\sqrt[n]{x}$ монотонно возрастает, а производная этой функции монотонно убывает. Рассмотрим решетку I_h^n , в которой $h = 2^{-\tau-k-1} = 2^{-kn-1}$. Наибольшее изменение функции $\sqrt[n]{x}$ имеет место на отрезке $[0, 2^{-kn-1}]$ и равно $\sqrt[n]{2^{-kn-1}} = 2^{-k} \sqrt[n]{2^{-1}} < 2^{-k}$. Обозначим через f_h кусочно-постоянную функцию, значения которой на каждом из интервалов $I_h(\tilde{a})$ решетки равны $f(\tilde{a})$. Эта функция будет ε -равна функции $f(\tilde{x})$ и, по следствию 4 из теоремы 3, принадлежать множеству D_d^τ . Утверждение доказано.

Рассмотрим функцию x^n , где n — натуральное число.

Предложение 10. Для функции x^n при любом $\varepsilon = 2^{-k}$, $k > 1$, и любом натуральном n , $n > 1$,

$$L(x^n, k) = \lceil \log n \rceil + k - 2.$$

Доказательство. Покажем, что задержки $\tau = \lceil \log n \rceil + k - 2$ достаточно для приближения x^n с любой точностью $\varepsilon = 2^{-k}$. Так как эта функция строго удовлетворяет условию Липшица с константой $L = n$ на каждом из интервалов $I_h(a)$ решетки I_h , $h = 2^{-\tau-1}$, по теореме 7 для нее существует ε -приближающая функция при любом $\varepsilon = 2^{-k}$, принадлежащая множеству D_d^τ при $\tau = \lceil \log n \rceil + k - 2$.

Докажем, что ни одна из функций множества $D_d^{\tau-1}$ не реализует x^n с нужной точностью. Для этого достаточно показать, что знания $\lceil \log n \rceil + k - 2$ первых двоичных разрядов числа x недостаточно для определения разряда с номером k результата при вычислении с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$. Рассмотрим числа $x = 1$, $y = 1 - 2^{\lceil \log n \rceil + k - 2}$, и заметим, что в силу договоренности о представлении чисел отрезка $[0, 1]$ эти числа совпадают в первых $\lceil \log n \rceil + k - 2$ разрядах. Тогда $x^n = 1$ и

$$\begin{aligned} y^n &= (1 - 2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2})^n \leq 1 - n2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2} + (n(n-1)/2)(2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2})^2 \\ &< 1 - n2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2} + (1/2)(n2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2})^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$x^n - y^n > n2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2} + (1/2)(n2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2})^2.$$

Рассмотрим два случая. Пусть n является степенью двух. Тогда для правой части последнего неравенства

$$n2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2} + (1/2)(n2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2})^2 = 2^{-k+2} - (1/2)(2^{-k+2})^2 > 2^{-k}.$$

Отсюда следует, что при приближении $x^n = 1$ с заданной точностью разряд с номером k должен быть равен 1, а при таком же приближении y^n этот разряд должен равняться 0.

Пусть теперь n — произвольное целое число. Тогда

$$x^n - y^n > n2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2} + (1/2)(n2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2})^2.$$

Положим

$$z = n2^{-\lceil \log n \rceil - k + 2}$$

и заметим, что $2 < z \leq 4$. Покажем, что при таких z справедливо неравенство

$$z - (1/2)z^2 > 2^{-k}.$$

Действительно, множество решений этого неравенства включает полуинтервал изменения z . Предложение доказано.

Определение 12. Под константной функцией с задержкой τ будем понимать функцию множества D_d^τ такую, что соответствующая ей дискретная функция из P_d^τ на выходе после задержки τ выдает последовательность значений, не зависящую от значений входных сигналов, поступающих после задержки.

Следствие 9. При любом $\varepsilon = 2^{-k}$ для функций сложения и умножения существуют приближающие константные функции с задержкой $k - 1$, ограниченные k разрядами, ε -равные им.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что приближающие с точностью ε функции, построенные в первой части доказательства предложений 8, 9, являются константными с задержкой $k - 1$. Более того, эти функции ограничены k разрядами.

Предложение 11. Если функция $f(\tilde{x})$, необязательно непрерывная, приближается функцией $d(\tilde{x}) \in D_d^\tau$ с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$, то она приближается константной функцией с задержкой не более $\tau + k - 1$, ограниченной $k + 1$ разрядом.

Доказательство. Рассмотрим дискретную функцию $h(\tilde{x}) \in P_d^\tau$, соответствующую приближающей функции $d(\tilde{x})$. Двоичное дерево этой функции выглядит так: это полное двоичное дерево высоты τ , соответствующее задержке, к каждой висячей вершине которого подвешено двоичное дерево детерминированной функции. Согласно следствию из теоремы 5, можно считать, что $h(\tilde{x})$ является $(k + 1)$ -ограниченной, то есть с момента времени $(\tau + k + 2)$, с учетом задержки τ , ее значения равны 0, независимо от значений входной последовательности. Укажем, как строится двоичное дерево дискретной функции $r(\tilde{x})$, соответствующей искомой константной функции $s(\tilde{x})$. Полное двоичное дерево функции $r(\tilde{x})$ имеет высоту $\tau + k - 1$, эта часть дерева соответствует задержке. К каждой висячей вершине этого дерева подвешено двоичное дерево детерминированной функции, выходные значения которой в течение тактов работы с $\tau + k$ по $\tau + 2k + 1$, с учетом задержки, совпадают со значениями функции $h(\tilde{x})$ на ветви двоичного дерева, соответствующей этой же висячей вершине, но в дереве функции $r(\tilde{x})$. На остальных тактах работы значения $r(\tilde{x})$ равны 0. Тогда значения $r(\tilde{x})$ совпадают со значениями $h(\tilde{x})$. Поэтому $s(\tilde{x})$ ε -приближает $f(\tilde{x})$ и является константной с задержкой $\tau + k - 1$.

Покажем, что существуют функции, для которых приближенная реализация константной функцией с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$ увеличивает задержку ровно на $k - 1$ по сравнению с наилучшей по задержке реализацией.

Пример 8. Рассмотрим функцию четности. Пусть $f(n, x)$ — функция, которая осуществляет отображение числа $0, x_1 x_2 \dots$ в число $0, y_1 y_2 \dots$ по следующему правилу:

$$y_j = x_1 + x_2 + \dots + x_k + \dots + x_{n+j} \pmod{2}$$

для всех $j = 1, 2, 3, \dots$

Легко построить автомат с задержкой n , реализующий дискретную функцию $g(n, x)$, соответствующую действительной функции $f(n, x)$. После задержки n начинает функционировать автомат с двумя состояниями, состоянием q_0 для четного числа единиц в сумме $x_1 + x_2 + \dots + x_j$ и состоянием q_1 для нечетного числа единиц. Начальным состоянием этого автомата будет q_0 , если сумма $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ четна, и q_1 , если она нечетна.

Рассмотрим задачу ε -приближения с минимальной задержкой функции $f(n, x)$ функциями класса D_d^∞ , при $\varepsilon = 2^{-k}$. Заметим, что, в силу договоренности о представлении чисел отрезка $[0, 1]$, функция $f(n, x)$ принадлежит множеству $\mu^{-1}(P_d^n)$, но не принадлежит классу D_d^∞ , поэтому постановка такой задачи имеет смысл. Приближающая $f(n, x)$ с точностью ε функция $d(x)$ множества D_d^n определяется так: для любого x значение $d(x)$ равно значению $f(n, x)$, в котором после запятой берутся только k первые двоичные разряда, а все остальные разряды полагаются равными нулю. Сделать задержку меньше n нельзя, так как первый разряд значения функции $f(n, x)$ существенно зависит от $(n+1)$ -го значения первых разрядов числа x . Очевидно, что для любого константного автомата при реализации функции $g(n, x)$ с точностью $\varepsilon = 2^{-k}$ требуется задержка $n + k - 1$, так как k -й разряд выхода автомата определяется всеми $n + k$ разрядами входа.

Автор выражает свою признательность В. А. Бувечу за постановку задачи и существенную помощь, оказанную при окончательном оформлении результатов.

Список литературы

1. Колмогоров А. Н., О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного. *Докл. АН СССР* (1957) **114**, №5, 953–956.
2. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
3. Натансон И. П., *Теория функций вещественной переменной*. Наука, Москва, 1974.
4. Офман Ю., Об алгоритмической сложности дискретных функций. *Докл. АН СССР* (1962) **145**, №1, 48–51.
5. Офман Ю., О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах. *Докл. АН СССР* (1963) **152**, №4, 823–826.
6. Тюленев Н. Ф., Приближение непрерывных функций дискретными. В сб.: *Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям*. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Москва, 1997, с. 148–151.
7. Тюленев Н. Ф., О приближении непрерывных функций дискретными. В сб.: *Конструкции в алгебре и логике*. Тверской гос. университет, Тверь, 1990, с. 110–116.
8. Черепов А. Н., Черепов И. А., О представлении недетерминированных функций детерминированными. В сб.: *Тез. докл. XIII Международной конф. «Проблемы теоретической кибернетики»*, 2. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Москва, 2002, с. 191.
9. Черепов А. Н., Черепов И. А., О классификации недетерминированных функций. В сб.: *Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям*. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Москва, 2004, с. 160–163.

10. Черепов А. Н., О сложности приближения непрерывных функций недетерминированными функциями с задержкой. В сб.: *Материалы IX Международной конф. «Интеллектуальные системы и компьютерные науки»*, **1 (2)**. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Москва, 2006, с. 307–310.
11. Черепов И. А., О приближении непрерывных функций детерминированными функциями с задержкой. В сб.: *Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям*. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Москва, 2004, с. 163–166.
12. Трахтенброт Б. А., Об операторах, реализуемых в логических сетях. *Докл. АН СССР* (1957) **112**, №6, 1005–1007.
13. Трахтенброт Б. А., Конечные автоматы и логика одноместных предикатов. *Сибирский матем. журнал* (1962) **3**, №1, 103–131.
14. Трахтенброт Б. А., Барздин Я. М., *Конечные автоматы (поведение и синтез)*. Наука, Москва, 1970.
15. Burks A. W., Wright J. B., Theory of logical nets. *Proc. IRE* (1953) **41**, 1357–1365.
16. Bernhardt L., Lindner R., Thiele H., Über sequentiell berechenbare reelle Abbildungen. *Elektron. Inform.-Verarb. Kybernetik* (1971) **7**, 317–329.
17. Valk R., Topologische Wortmengen, topologische Automaten, zustandsendliche, stetige Abbildungen. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung*, **19**. GMD, Bonn, 1972, pp. 133–135.

Статья поступила 11.06.2008.