Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Гарипова, Л. С. Казарин, О конечных почтикольцах, порожденных эндоморфизмами экстраспециальной 2-группы, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 1, 104–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1087>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:45:15

О конечных почтикольцах, порожденных эндоморфизмами экстраспециальной 2-группы

© 2009 г. Е. С. Гарипова, Л. С. Казарин

В статье рассматриваются почтикольца, порожденные эндоморфизмами некоторых экстраспециальных 2-групп. Наиболее существенным отличием почтикольца от обычного кольца является отсутствие второй дистрибутивности. Сформулированы и доказаны утверждения о том, что почтикольцо $E(G)$, порожденное эндоморфизмами экстраспециальной 2-группы G порядка 2^{2n+1} , имеет порядок, делящий $2^{2^{2n}+4n^2}$, и о том, что почтикольцо $E(G)$ экстраспециальной 2-группы G типа — порядка 2^{2n+1} имеет порядок, делящийся на $2^{2^{2n}+4n^2-2}$. При этом для случаев $n = 1$ и $n = 2$ верхняя оценка достигается: так, почтикольцо $E(G)$ группы D_8 имеет порядок 2^8 , а почтикольцо $E(G)$ экстраспециальной 2-группы $D_8 * Q_8$ имеет порядок, равный 2^{32} .

1. Введение

Почтикольца — это множества с операциями сложения и умножения, удовлетворяющие законам кольца, за исключением коммутативности и одного из законов дистрибутивности. Мы будем использовать правую дистрибутивность.

Множество $M(G)$ всех отображений группы G в себя является классическим примером почтикольца.

Впервые почтикольца появились в работе Диксона, который ввел понятие почтиполя. Первоначально такие структуры использовались в связи с их применением в геометрии. В конце тридцатых годов прошлого века ряд результатов в этом направлении был получен Виландом (не опубликовано). Теоретико-групповые аспекты почтиколец исследовались в конце пятидесятих годов Ханной Нейман. Позднее были открыты важные приложения почтиколец, в частности, к построениям блок-схем, группам перестановок и связанным с этим вопросам. Далее были найдены приложения в теории автоматов и в теории кодирования.

Первая монография, посвященная почтикольцам, опубликована Пильцем в 1977 г. В 1983 г. вышло второе издание [1], в котором содержался обзор важнейших результатов о почтикольцах и их приложениях. К настоящему времени опубликовано уже несколько монографий, в частности [2] и [3]. Книга [3], перевод которой [4] осуществлен в 1996 г., дает представление о некоторых приложениях почтиколец.

На сегодняшний день получены описания строения некоторых почтиколец небольшого порядка. В частности, Малон [8] описал почтикольцо, порожденное эндоморфизмами группы кватернионов. Как будет показано ниже, его результат для группы кватернионов порядка 8 неверен. Впрочем, работ, посвященных конкретным почтикольцам, немного.

Следует отметить, что почтикольца, содержащиеся в кольце $M(G)$ всех отображений конечной группы G в себя, являются естественным объектом в прикладной алгебре, где важными являются конструкции, связанные с различными отображениями группы в себя.

В. М. Сидельниковым была предложена идея использования почтиколец $E(G)$, порожденных эндоморфизмами небольшой конечной группы G , для изучения рекуррентных последовательностей. В этом случае необходимы знания о строении, именно, о порядке таких колец. И. В. Филимоновым, учеником В. М. Сидельникова, с помощью компьютера, найден порядок почтикольца эндоморфизмов группы диэдра порядка 8. Группы кватернионов и диэдра порядка 8 являются наименьшими в серии так называемых экстраспециальных p -групп. Последние довольно часто возникают в различных приложениях. Например, В. М. Сидельниковым [4] были открыты некоторые интересные свойства групп автоморфизмов экстраспециальных p -групп и построены на этой основе орбитные коды с хорошими характеристиками. Другое приложение, также найденное В. М. Сидельниковым [5], показало, что экстраспециальные 2-группы полезны для построения квантовых кодов.

Нами найдены порядки и строение почтиколец, порожденных эндоморфизмами экстраспециальных групп G типа — порядков 2^3 и 2^5 (теоремы 1–3), получена оценка порядка произвольной экстраспециальной 2-группы (теорема 4). Для экстраспециальной 2-группы порядка 2^{2n+1} типа — эта оценка весьма близка к верхней (теорема 5). Вероятно, и это подтверждается для небольших групп, все булевы функции от $2n$ переменных могут быть описаны как подпочтикольца почтикольца $E(G)$ экстраспециальной 2-группы G порядка 2^{2n+1} .

Перейдем теперь к более формальным определениям и изложению результатов.

2. Примеры почтиколец

В статье рассматриваются алгебраические системы, удовлетворяющие следующему определению.

Почтикольцом называется алгебраическая система R с двумя операциями, сложением и умножением, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) $(R, +)$ — группа (не обязательно абелева);
- (ii) $(R, \cdot)$ — полугруппа;
- (iii) $(a + b)c = ac + bc$ для любых $a, b, c \in R$.

В этом случае почтикольцо называется правым.

Следующие примеры почтиколец являются классическими.

- (1) Пусть $(G, +)$ — конечная (не обязательно абелева) группа. Тогда почтикольцом будет множество $M(G) = \{G^G, +, \cdot\}$ всех отображений из G в G с операциями поточечного сложения (то есть $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$) для любых двух отображений $f, g \in M(G)$ и любого $x \in G$ и суперпозицией отображений в качестве умножения (то есть $(fg)(x) = f(g(x))$) для любых двух отображений $f, g \in M(G)$ и любого $x \in G$.
- (2) Почти-кольцо $M_0(G)$, состоящее из всех $f \in M(G)$, для которых $f(0) = 0$, и почти-кольцо констант $M_c(G)$, состоящее из отображений $f \in M(G)$, постоянных на G .

- (3) Пусть V — линейное векторное пространство, тогда

$$M_{\text{Aff}}(V) = \{f \in M(V) \mid f(x) = A(x) + b\},$$

где A — линейное отображение, а $x, b \in V$, также будет почти-кольцом.

- (4) Произвольная конечная группа G , имеющая порядок больший, чем 2, может быть превращена в так называемое тривиальное почтикольцо путем введения операции умножения

$$a \cdot b = \begin{cases} b, & \text{если } a \in S \subseteq G \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3. Некоторые определения и леммы

Абелева p -группа называется гомоциклической, если она является прямым произведением своих циклических подгрупп одинакового порядка p^m . В случае $m = 1$ группа называется элементарной. Если p^n — это максимум порядков элементов p -группы, то говорят, что группа имеет экспоненту p^n . Таким образом, если абелева группа имеет экспоненту p , то она элементарна.

Пусть $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G , то есть пересечение всех максимальных подгрупп группы G , если они существуют, и сама G в противном случае.

Пусть G' — коммутант группы G , то есть подгруппа, которую образуют все коммутаторы группы.

Пусть $Z(G)$ — центр G , то есть подгруппа, которую образуют элементы, перестановочные со всеми элементами группы G .

Говорят, что p -группа G специальна, если либо G — элементарная абелева группа, либо ее коммутант G' совпадает с ее подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ и с ее центром $Z(G)$ и является элементарной группой. Кроме того, G называется экстраспециальной, если G — неабелева специальная группа и $|G'| = p$.

Группа X называется центральным произведением групп A и B , если $X = AB$ и $[A, B] = 1$. Это произведение прямое, если $A \cap B = 1$. Если же $A \cap B \neq 1$, то $A \cap B \leq Z(A) \cap Z(B)$. Для центрального произведения вводим обозначение $X = A * B$.

Пусть Q_8 и D_8 — кватернионная и диэдральная группы восьмого порядка, образующие элементы и определяющие соотношения которых будут подробно рассмотрены ниже.

Если G — экстраспециальная p -группа, то $G = A_1 * A_2 * \dots * A_n$, где $A_i, i = 1, \dots, n$, — экстраспециальная группа порядка p^3 (см. [6]). Целое число n называется шириной экстраспециальной группы G . Для заданного p имеется ровно две неизоморфные экстраспециальные p -группы порядка p^3 . В случае $p = 2$ соответствующие группы — это кватернионная группа порядка 8 и диэдральная группа порядка 8, причем $Q_8 * Q_8 \cong D_8 * D_8$. Поэтому, если G — экстраспециальная 2-группа ширины n , то G изоморфна $(Q_8)^n$ или $(Q_8)^{n-1} * D_8$. В первом случае, говорят, что G — это группа типа $+$, во втором — группа типа $-$.

Предположим, что G — экстраспециальная группа, $Z(G) = \langle z \rangle$ и $\bar{G} = G/Z(G)$. Тогда $\bar{G}$ — векторное пространство над $GF(p)$ и $|z| = p$.

Пусть $M_{2n}(GF(2))$ — полное матричное кольцо квадратных $2n$ -строчных матриц над полем Галуа $GF(2)$ и $O_{2n}^\pm(2)$ — ортогональная группа четной размерности над полем из двух элементов.

Пусть $\text{End}(G) \subseteq M(G)$ — множество эндоморфизмов группы G . Сумма двух эндоморфизмов, вообще говоря, не является эндоморфизмом. Поэтому обозначим через $E(G)$

наименьшее подпотчикольцо $M(G)$, содержащее $\text{End}(G)$, то есть потчикольцо, порожденное эндоморфизмами группы G .

Лемма 1. Пусть G — p -группа с коммутантом порядка p , тогда для любых $\varphi \in E(G)$, $a \in G$, $z \in G'$

$$\varphi(a + z) = \varphi(a) + \varphi(z).$$

Доказательство. По определению любой элемент из $E(G)$ есть целочисленная линейная комбинация эндоморфизмов $\text{End}(G)$ из множества, поэтому

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi_i,$$

где λ_i — целые числа (на деле они ограничены по модулю экспоненты группы G). Тогда для любого $a \in G$ и любого $z \in G'$

$$\varphi(a + z) = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \psi_i \right) (a + z) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi_i(a + z) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\psi_i(a) + \psi_i(z)).$$

Так как $\psi_i(z)$ содержится в центре G для любого $z \in G'$, легко видеть, что последнее выражение совпадает с

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \psi_i(a) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi_i(z) = \varphi(a) + \varphi(z).$$

Потчикольцо I называется идеалом потчикольца R , если выполнены следующие условия:

- (i) I^+ — нормальная подгруппа группы R^+ ;
- (ii) для любых $a \in I$, $r \in R$ справедливо включение $ar \in I$;
- (iii) для любых $a \in I$, $r, s \in R$ справедливо включение $s(r + a) - sr \in I$.

Лемма 2. Если K — вполне характеристическая подгруппа группы G , то

$$S = \{f \in E(G) \mid f(x) \in K, x \in G\}$$

является идеалом $R = E(G)$.

Доказательство. Пусть K — вполне характеристическая подгруппа группы G . Покажем, что множество $f \in E(G)$, отправляющих любой элемент из G в K , составляет идеал S в R . В самом деле, если $f(x) \in K$, то, в силу нормальности характеристической подгруппы,

$$(-g + f + g)(x) = -g(x) + f(x) + g(x) \in K$$

для любого $g \in E(G)$. Замкнутость доказана. Поэтому S^+ — нормальная подгруппа R^+ .

Пусть $f \in S$, $r \in R$. Тогда

$$(fr)(x) = f(r(x)) \in K$$

для любого $x \in G$. Следовательно, $fr \in S$ для любого $f \in S$.

Покажем, что $f(r + s) - fr \in S$ для любых $r, f \in R, s \in S$. Действительно, если $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (например, это так, если f — эндоморфизм), то указанный элемент принадлежит S ввиду ее инвариантности как подгруппы аддитивной группы R^+ . В самом деле, если $x \in G$, то

$$f(r + s)(x) - fr(x) = f(r(x) + s(x)) - fr(x).$$

Если f — эндоморфизм, то результат содержится в K . Если же f — сумма или произведение двух элементов $E(G)$, то применим индукцию. Пусть $f = f' + f''$, где $f' \in \text{End}(G)$, а элемент f'' такой, что $f''(r + s)(x) - f''r(x) \in S$, тогда

$$(f' + f'')(r + s) - (f' + f'')r = f'(r + s) + f''(r + s) - f'r - f''s.$$

Используя нормальность подгруппы S^+ в R^+ , получаем по индукции справедливость соотношения $f(r + s) - fr \in S$. Аналогичным образом можно рассмотреть ситуацию, когда $f = f'f''$, где один из сомножителей является эндоморфизмом.

4. Основные результаты

Теорема 1. Почтикольцо $E(G)$ экстраспециальной 2-группы D_8 имеет порядок, равный 2^8 .

Доказательство. Здесь $G = D_8$, $|G| = 8$, определяющими в группе диэдра являются соотношения $a^4 = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$.

Идеал J , состоящий из отображений в $E(G)$, посылающих любой элемент D_8 в элементы $z = 2a$ или 0 , состоит из 0 и отображений, тождественно равных 0 на $G/Z(G)$. В силу леммы 1, знание этих отображений на элементах, являющихся представителями левых смежных классов по подгруппе $Z = G' = Z(G)$, и на z позволяет вычислить значение на любом элементе группы. Один из представителей является нулем группы, и значение любого эндоморфизма из $\text{End}(G)$ на этом элементе равно 0 . Остальные элементы из системы представителей (их всего три), вместе с элементом z , являющимся единственным ненулевым элементом из Z , определяют любое отображение из $E(G)$, лежащее в J . Более того, все такие отображения образуют линейное векторное пространство над полем $GF(2)$, ибо экспонента группы Z равна двум. Таким образом, число таких отображений не превосходит 2^4 .

Покажем, что имеется 4 линейно независимых над $GF(2)$ функций, лежащих в $E(G)$ и отображающих G в Z . Кроме того, покажем, что фактор-почтикольцо $E(G)/J$ тоже состоит из 2^4 элементов.

Группа G имеет эндоморфизмы $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \text{End}(G)$:

$$\begin{aligned} \eta_1(a) &= 0, & \eta_1(b) &= z, & \eta_1(a + b) &= z; \\ \eta_2(a) &= z, & \eta_2(b) &= 0, & \eta_2(a + b) &= z; \\ \eta_3(a) &= z, & \eta_3(b) &= z, & \eta_3(a + b) &= 0. \end{aligned}$$

При этом очевидно, что $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$. Кроме того, преобразования η_j оказываются нильпотентными индекса 2: $\eta_j^2 = 0$ для любого $j = 1, 2, 3$.

Кроме того, имеются эндоморфизмы ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 , действующие следующим образом на группе G :

$$\begin{aligned}\psi_1(a) &= b, & \psi_1(b) &= 0, & \psi_1(a+b) &= b; \\ \psi_2(a) &= a+b, & \psi_2(b) &= 0, & \psi_2(a+b) &= a+b; \\ \psi_3(a) &= 0, & \psi_3(b) &= b, & \psi_3(a+b) &= b.\end{aligned}$$

Обозначим через i тождественный автоморфизм группы G , а через θ линейную комбинацию $i + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$.

Получаем таблицу значений

	a	b	$a+b$	z
$2i$	z	0	0	0
η_3	z	z	0	0
η_1	0	z	z	0
θ	0	0	0	z

Таким образом, имеем линейно независимую систему элементов почтикольца, содержащихся в J : $\{\eta_1, \eta_3, 2i, \theta\}$, то есть $(J, +)$ — элементарная абелева группа порядка 2^4 .

Элементы ψ_1, ψ_2, ψ_3 , определенные выше, вместе с автоморфизмом i , будут являться элементами, индуцирующими на G/Z линейно независимую систему преобразований.

Значит, $|E(G)| = 2^4 2^4 = 2^8$. Следует заметить, что это согласуется с результатом И. В. Филимонова, который при помощи компьютера показал, что $|E(D_8)| = 256$.

Примечательно, что такую же размерность имеет почтикольцо, порожденное эндоморфизмами группы Q_8 , экстраспециальной 2-группы типа $+$.

Теорема 2. Почтикольцо $E(G)$ экстраспециальной 2-группы Q_8 имеет порядок, равный 2^8 .

Доказательство. Здесь $G = Q_8$, $|G| = 8$, определяющими в группе кватернионов являются соотношения $a^4 = 1$; $b^4 = 1$; $a^2 = b^2$; $aba = b$.

Доказательство проводим аналогично случаю $-$. Идеал J , состоящий из отображений в $E(G)$, посылающих любой элемент $G = Q_8$ в элементы $2a = z$ или 0 , состоит из 0 и отображений, тождественно равных 0 на $G/Z(G)$. В силу леммы 1, знание этих отображений на элементах, являющихся представителями левых смежных классов по подгруппе $Z = G' = Z(G)$, и на z позволяет вычислить значение на любом элементе группы. Один из представителей является нулем группы, и значение любого эндоморфизма из $\text{End}(G)$ на этом элементе равно 0 . Остальные элементы из системы представителей (их всего три), вместе с элементом z , являющимся единственным ненулевым элементом из Z , определяют любое отображение из $E(G)$, лежащее в J . Более того, все такие отображения образуют линейное векторное пространство над полем $GF(2)$, ибо экспонента группы Z равна двум. Таким образом, число таких отображений не превосходит 2^4 .

Покажем, что имеется 4 линейно независимых над $GF(2)$ функций, лежащих в $E(G)$ и отображающих G в Z . Кроме того, покажем, что фактор-почтикольцо $E(G)/J$ тоже состоит из 2^4 элементов.

Группа G имеет эндоморфизмы $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \text{End}(G)$:

$$\begin{aligned}\eta_1(a) &= 0, & \eta_1(b) &= z, & \eta_1(a+b) &= z; \\ \eta_2(a) &= z, & \eta_2(b) &= 0, & \eta_2(a+b) &= z; \\ \eta_3(a) &= z, & \eta_3(b) &= z, & \eta_3(a+b) &= 0.\end{aligned}$$

При этом очевидно, что $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$.

Кроме того, G имеет автоморфизм φ , действующий на элементах G следующим образом:

$$\varphi(a) = b, \quad \varphi(b) = a + b, \quad \varphi(a + b) = a.$$

Положим $\theta = i + \varphi + \varphi^2$, где i — тождественный автоморфизм. Тогда получим следующую систему элементов почтикольца, содержащихся в J : $\{2\varphi + \eta_1, 2\varphi + \eta_2, 2\varphi + \eta_3, \theta\}$. Линейная независимость указанных элементов J следует из таблицы

	a	b	$a + b$	z
$2\varphi + \eta_1$	z	0	0	0
$2\varphi + \eta_2$	0	z	0	0
$2\varphi + \eta_3$	0	0	z	0
θ	z	z	z	z

Таким образом, $(J, +)$ — элементарная абелева группа порядка 2^4 . Каждый эндоморфизм группы G индуцирует линейное преобразование на факторгруппе $G/Z(G)$, изоморфной четверной группе Клейна. При этом возможно любое из 2^4 таких линейных преобразований. Поэтому общее число элементов в $E(G)$ оказывается равным 2^8 .

Отметим, что в статье [7] утверждается, что почтикольцо $E(G)$ группы кватернионов порядка 8 состоит из 2^5 элементов. Из теоремы 2 следует, что это утверждение ошибочно.

Перейдем к случаю $n = 2$.

Теорема 3. Почтикольцо $E(G)$ экстраспециальной 2-группы $D_8 * Q_8$ имеет порядок, равный 2^{32} .

Доказательство. Пусть G — экстраспециальная 2-группа ширины 2 типа —. Тогда она будет являться центральным произведением группы кватернионов и группы диэдра. Далее, D_8 и Q_8 имеют одинаковые порядки, равные 8, и состоят из элементов вида $a^s b^t$, где $0 \leq s \leq 3, 0 \leq t \leq 1$.

Определяющие соотношения в группах кватернионов и диэдра приведены в предыдущих теоремах. При рассмотрении этого случая будет удобно пользоваться следующей таблицей порядков элементов групп D_8 и Q_8 :

	D_8	Q_8
e	1	1
a	4	4
b	2	4
a^2	2	2
a^3	4	4
ab	2	4
a^2b	2	4
a^3b	2	4

Склеивать группы будем по центрам — циклическим подгруппам второго порядка:

$$\begin{aligned} Z(D_8) &\cong Z(Q_8) \cong \langle a^2 \rangle; & G &= D_8 * Q_8; \\ |G| &= (8 \cdot 8)/2 = 32, & |Z(G)| &= |G'| = 2; \\ |G/Z(G)| &= 32/2 = 2^4 = 16. \end{aligned}$$

Таблица 1.

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	z
φ_1	z	z	z	z	z	z	z	z	0	0	0	0	0	0	0	0
φ_2	0	z	z	z	z	z	z	z	z	0	0	0	0	0	0	0
φ_3	0	0	z	z	z	z	z	z	z	z	0	0	0	0	0	0
φ_4	0	0	0	z	z	z	z	z	z	z	z	0	0	0	0	0
φ_5	0	0	0	0	z	z	z	z	z	z	z	z	0	0	0	0
φ_6	0	0	0	0	0	z	z	z	z	z	z	z	z	0	0	0
φ_7	0	0	0	0	0	0	z	z	z	z	z	z	z	z	0	0
φ_8	0	0	0	0	0	0	0	z	z	z	z	z	z	z	z	0
φ_9	z	0	0	0	0	0	0	0	z	z	z	z	z	z	z	0
φ_{10}	z	z	0	0	0	0	0	0	0	z	z	z	z	z	z	0
φ_{11}	z	z	z	0	0	0	0	0	0	0	z	z	z	z	z	0
φ_{12}	z	z	z	z	0	0	0	0	0	0	0	z	z	z	z	0
φ_{13}	z	z	z	z	z	0	0	0	0	0	0	0	z	z	z	0
φ_{14}	z	z	z	z	z	z	0	0	0	0	0	0	0	z	z	0
φ_{15}	z	z	z	z	z	z	z	0	0	0	0	0	0	0	z	0
κ	0	0	z	z	z	z	0	z	0	z	0	z	z	z	0	0
ζ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z

Представители смежных классов G по Z в аддитивной записи выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (0, a_2), & (a_1, b_2) &= \alpha_6, & (b_1, a_2 + b_2) &= \alpha_{11}, \\
\alpha_2 &= (0, b_2), & (a_1, a_2 + b_2) &= \alpha_7, & (a_1 + b_1, 0) &= \alpha_{12}, \\
\alpha_3 &= (0, a_2 + b_2), & (b_1, 0) &= \alpha_8, & (a_1 + b_1, a_2) &= \alpha_{13}, \\
\alpha_4 &= (a_1, 0), & (b_1, a_2) &= \alpha_9, & (a_1 + b_1, b_2) &= \alpha_{14}, \\
\alpha_5 &= (a_1, a_2), & (b_1, b_2) &= \alpha_{10}, & (a_1 + b_1, a_2 + b_2) &= \alpha_{15}.
\end{aligned}$$

Далее будет показано, что имеется 2^{2n} линейно независимых над $GF(2)$ функций-эндоморфизмов, лежащих в $E(G)$ и отображающих G в Z .

Элемент z содержится в ядре любого такого эндоморфизма. Образ его — циклическая подгруппа второго порядка, а ядро — абелева подгруппа группы G индекса 2. Число таких подгрупп в G равно

$$\frac{p^{2n} - 1}{p - 1} = \frac{2^{2 \cdot 2} - 1}{2 - 1} = 2^4 - 1 = 15.$$

Следовательно, имеется 15 ненулевых эндоморфизмов $\varphi_1, \dots, \varphi_{15}$ таких что

$$|\text{Ker}(\varphi_i)| = 8, \quad \varphi_i(\alpha_j) \text{ равно } z \text{ или } 0, \quad \varphi_i^2(\alpha_j) = 0, \quad \sum_{i=1}^{15} \varphi_i = 0.$$

Действие их представлено в табл. 1.

Каждый эндоморфизм группы G индуцирует линейное преобразование на элементарной абелевой фактор-группе $G/Z(G)$. Будем считать ее линейным векторным пространством по сложению над $GF(2)$, оснащенным билинейной формой

$$xZ + yZ = (x + y)Z.$$

Как симметрическую билинейную форму над $GF(2)$ будем трактовать операцию взятия коммутатора:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x, y) &= [x, y], \quad \mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha \mathcal{A}(x, y), \quad \mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y), \\ \mathcal{A}(x + y, z) &= \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z), \quad \mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z), \\ \mathcal{A}(x, x) &= 0 \text{ since } [x, x] = xx^{-1}xx^{-1} = 1, \quad \mathcal{A}(x, y) = [x, y] = [y, x] = \mathcal{A}(y, x).\end{aligned}$$

Получаем пространство четной размерности над полем характеристики 2.

Убедимся далее, что в определенном нами линейном пространстве сохраняется квадратичная форма.

Для этого более удобно воспользоваться копредставлением диэдральной группы, поэтому пусть теперь d_1, d_2 — ее инволютивные образующие, $d_1 = a_1 b_1, d_2 = b_1$, тогда

$$\begin{aligned}[d_1, d_2] &= 1, & [a_2, b_2] &= 1, \\ [d_1, a_2] &= [d_1, b_2] = 0, & [d_2, a_2] &= [d_2, b_2] = 0.\end{aligned}$$

Любой элемент g из G представим в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$g = x_1 d_1 + x_2 d_2 + x_3 a_2 + x_4 b_2.$$

Зададим на линейном пространстве квадратичную форму

$$Q(g) = x_1 x_2 + x_3^2 + x_3 x_4 + x_4^2.$$

Очевидно, что элемент g можно представить в виде суммы двух компонент $a \in \langle d_1, d_2 \rangle$ и $b \in \langle a_2, b_2 \rangle$. Тогда $x_1 x_2$ — это вклад элемента a в квадратичную форму, а $x_3^2 + x_3 x_4 + x_4^2$ — вклад b .

Если $Q(a) = 1$, а это возможно только когда $x_1 = x_2 = 1$, то $Q(g) = Q(a + b) = 0$ при любом $b \neq 0$. Если же $b = 0$, то $Q(g) = 1$.

В случае, когда $Q(a) = 0$ (варианты: $x_1 = x_2 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = 0$ и $x_1 = 0, x_2 = 1$), для сохранения квадратичной формой нулевого значения необходимо, чтобы b было равно 0.

Получаем пять ненулевых элементов, на которых квадратичная форма обращается в 0:

$$\begin{aligned}(1, 0, 0, 0) &= d_1, & (0, 1, 0, 0) &= d_2, & (1, 1, 1, 0) &= d_1 + d_2 + a_2, \\ (1, 1, 0, 1) &= d_1 + d_2 + b_2, & (1, 1, 1, 1) &= d_1 + d_2 + a_2 + b_2.\end{aligned}$$

Заметим, что эти элементы в группе G имеют порядок, равный 2. Построим автоморфизм θ , циклически сдвигающий найденные инволютивные элементы:

$$\begin{aligned}\theta(d_1) &= d_2, & \theta(d_2) &= d_1 + d_2 + a_2, & \theta(d_1 + d_2 + a_2) &= d_1 + d_2 + b_2, \\ \theta(d_1 + d_2 + b_2) &= d_1 + d_2 + a_2 + b_2, & \theta(d_1 + d_2 + a_2 + b_2) &= d_1.\end{aligned}$$

Этот автоморфизм, имеющий порядок, равный 5, будет сохранять заданную квадратичную форму.

В выбранном базисе его матрица имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица билинейной формы, составленная из скалярных произведений соответствующих базисных элементов, выглядит так:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что соотношение $A\Phi A^{-1} = \Phi$ выполнено, а значит, автоморфизм сохраняет билинейную форму.

Пусть ζ — эндоморфизм такой, что

$$\zeta = 1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \theta^4,$$

$\kappa = 2\gamma + \delta$ — тоже эндоморфизм, где

$$\begin{aligned} \gamma(a_i) &= b_i, & \gamma(b_i) &= a_i + b_i, & \gamma(a_i + b_i) &= a_i, \\ \delta(a_i) &= \delta(b_i) = z, & \delta(a_i + b_i) &= 0, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Таким образом, система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{14}, \kappa, \zeta\}$ предоставляет 2^{2n} , в нашем случае 16, ненулевых элементов, образующих линейно независимую систему преобразований, тождественно равных 0 на $G/Z(G)$. Поэтому порядок почтикольца может быть подсчитан как

$$|E(G)| = |I||E(G)/I| = 2^{16} \cdot 2^{16} = 2^{32}.$$

В общем случае, почтикольцо экстраспециальной группы можно рассматривать как расширение подпочтикольца I , состоящего из отображений, переводящих каждый элемент группы G в элемент из подгруппы $Z(G)$ при помощи полного матричного кольца $M_{2n}(GF(2))$.

Теорема 4. Почтикольцо $E(G)$ экстраспециальной 2-группы G порядка 2^{2n+1} имеет порядок, делящий $2^{2^{2n}+4n^2}$.

Доказательство. Пусть G — экстраспециальная группа, указанного порядка.

Идеал J , состоящий из отображений в $E(G)$, посылающих любой элемент G в элементы центра, состоит из 0 и отображений, тождественно равных 0 на $G/Z(G)$. В силу леммы 1, знание этих отображений на элементах, являющихся представителями левых смежных классов по подгруппе $Z = G' = Z(G)$, и на z позволяет вычислить значение на любом элементе группы.

Один из представителей является нулем группы, и значение любого эндоморфизма из $\text{End}(G)$ на этом элементе равно 0. Остальные элементы из системы представителей, вместе с элементом z , являющимся единственным ненулевым элементом из Z , определяют любое отображение из $E(G)$, лежащее в J , то есть имеется 2^{2n} эндоморфизмов, тождественно равных 0 на $G/Z(G)$, определенных соотношениями $\varphi_i(x) = 0$ для $x \in K$, где K — подгруппа индекса два из G и $\varphi_i(x) = z$ для $x \notin K$. При этом очевидно, что $(\varphi_j)^2 = 0$ для всех j . Все эти эндоморфизмы нильпотентны индекса 2 и по сложению образуют элементарную абелеву группу порядка 2^{2n} , а также идеал J почтикольца $E(G)$.

Каждый эндоморфизм группы G индуцирует линейное преобразование на факторгруппе $G/Z(G)$, изоморфной элементарной абелевой 2-группе порядка 2^{2n} . Так как группа автоморфизмов экстраспециальной 2-группы порядка 2^{2n+1} изоморфна $O_{2n}^{\pm}(2)$ и по

следствию 1 из [9], с. 143, неприводима при $n > 1$, линейная оболочка этих автоморфизмов в ограничении на $G/Z(G)$ изоморфна полному матричному кольцу $M_{2n}(2)$, а значит, на фактор-группе может быть реализовано любое из $2^{(2n)^2}$ линейных преобразований.

Другими словами, каждому отображению $f \in E(G)$ ставим в соответствие его ограничение $f' \in E(G/Z(G))$. В случае, когда два различных преобразования в $E(G)$ индуцируют одно и то же линейное преобразование $G/Z(G)$, их разность есть преобразование из $E(G)$, переводящее любой элемент из G в $Z(G)$. Поэтому общее число преобразований равно $|J||E(G/Z(G))|$.

Таким образом, общее число элементов почтикольца равно $2^{2^{2n}+4n^2}$.

Нас интересует случай группы типа $-$, являющейся центральным произведением группы диэдра и некоторого числа групп кватернионов. Дело в том, что в этом случае система из 2^{2n} эндоморфизмов идеала, описанных выше, оказывается зависимой. Максимальная линейно независимая подсистема, которую можно из них выделить, имеет ранг, равный $2^{2n} - 2$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Почтикольцо $E(G)$ экстраспециальной 2-группы G порядка 2^{2n+1} типа $-$ имеет порядок, делящийся на $2^{2^{2n}+4n^2-2}$.

Однако, как показано выше, для случаев $n = 1$ и $n = 2$ верхняя оценка все-таки достигается, то есть указан способ построения пары дополнительных эндоморфизмов, которые, вкупе с $2^{2n} - 2$ найденными, образуют полную линейно независимую систему из 2^{2n} функций, лежащих в $E(G)$ и отображающих G в Z . Это позволяет предполагать, что подобная пара найдется и для групп типа $-$ большей ширины. Вопрос, верно ли, что $|E(G)| = 2^{2^{2n}+4n^2}$ для экстраспециальной 2-группы G в общем случае, остается открытым.

Список литературы

1. Pilz G., *Near-rings. The theory and its applications*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
2. Meldrum J. D. P., *Near-rings and their links with groups*. Pitman, London, 1985.
3. Lidl R., Pilz G., *Applied abstract algebra*. Springer, New York, 1984.
4. Лидл Р., Пильц Г., *Прикладная абстрактная алгебра*. Изд-во Уральского университета, Екатеринбург, 1996.
5. Сидельников В. М., Об одной конечной матричной группе и кодах на евклидовой сфере. *Проблемы передачи информации* (1997) **33**, №1, 35–54.
6. Сидельников В. М., Квантовые коды и абелевы подгруппы экстраспециальной группы. *Проблемы передачи информации* (2002) **38**, №3, 34–44.
7. Gorenstein D., *Finite simple groups. An introduction to their classification*. Plenum, New York, 1982.
8. Malone J. J., Generalised quaternion groups and distributively generated near-rings. *Proc. Edinb. Math. Soc., II Ser.* (1973) **18**, 235–238.
9. Дьедонне Ж., *Геометрия классических групп*. Мир, Москва, 1974.
10. Супруненко Д. А., *Группы матриц*. Наука, Москва, 1972.

Статья поступила 28.07.2009.