Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Предельная теорема для логарифма порядка случайной A -подстановки, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 1, 126–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1089>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:29:11

Предельная теорема для логарифма порядка случайной A -подстановки

© 2010 г. А. Л. ЯКЫМИВ

Рассматривается случайная подстановка τ_n , равномерно распределенная на множестве всех подстановок степени n , длины циклов которых принадлежат фиксированному множеству A (так называемых A -подстановок). Предполагается, что множество A имеет асимптотическую плотность $\sigma > 0$, причем $|k: k \leq n, k \in A, m-k \in A|/n \rightarrow \sigma^2$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $m \in [n, Cn]$ для произвольной постоянной $C > 1$. Порядком подстановки называется минимальная степень, в которой она равна тождественной подстановке. Пусть Z_n — порядок случайной подстановки τ_n . В настоящей статье показано, что случайная величина $\ln Z_n$ асимптотически нормальна со средним $l(n) = \sum_{k \in A(n)} \ln(k)/k$ и дисперсией $\sigma \ln^3(n)/3$, где $A(n) = \{k: k \in A, k \leq n\}$. Полученный результат обобщает известную теорему П. Эрдеша и П. Турана, где рассматривается равномерное распределение на всей симметрической группе подстановок S_n (то есть, при A , совпадающим с множеством натуральных чисел).

Работа написана при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00563 и 10-01-00580).

1. Введение

Пусть A — произвольное непустое подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. A -подстановками называются подстановки, длины циклов которых принадлежат множеству A (см. книгу В. Н. Сачкова [41]). Пусть $T_n = T_n(A)$ есть множество A -подстановок степени n и τ_n — случайная подстановка, равномерно распределенная на T_n . Через ζ_{mn} обозначим число циклов подстановки τ_n , имеющих длину $m \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\zeta_{mn} = 0$ при $m \notin A$. Далее, пусть ζ_n — общее число циклов случайной подстановки τ_n , то есть,

$$\zeta_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \zeta_{mn}.$$

Расположим длины циклов случайной подстановки τ_n в возрастающем порядке:

$$l_n(1) \leq l_n(2) \leq \dots \leq l_n(\zeta_n).$$

Случайным A -подстановкам посвящено большое число работ (см. статьи Ю. В. Болотникова, В. Н. Сачкова и В. Е. Тараканова [5, 6], Э. А. Бендера [2], Л. М. Волюнец [7, 8, 9], А. А. Грушо [15], Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведева [16], А. В. Колчина [18], В. Ф. Колчина [21, 22], Э. Манставичюса [24], М. П. Минеева и А. И. Павлова [25, 26], А. И. Павлова [29]–[35], В. Н. Сачкова [37, 38, 40], А. Н. Тимашёва [44, 45], автора [47]–[51]).

Имеется 5 монографий, содержащих сведения об A -подстановках: В. Ф. Колчина [20, 23] (1984, 2000), В. Н. Сачкова [39, 41] (1977, 1978), автора [48] (2005). К настоящему моменту получены предельные теоремы (в слабом смысле) для случайных величин ζ_{mn} , ζ_n и $l_n(m)$, а также асимптотика числа элементов множества $T_n(A)$ при $n \rightarrow \infty$ в широком классе множеств A .

В предлагаемой статье исследуется асимптотическое поведение случайной величины Z_n , порядка случайной подстановки τ_n , при ранее не рассматривавшихся условиях на множество A . Эта задача вместе с другими задачами статистической теории групп впервые при $A = \mathbf{N}$ была исследована П. Эрдёшем и П. Тураном в 1965–1968 годах в [11]–[14], и ее решение включало весьма сложное доказательство асимптотической нормальности $\ln Z_n$. Результат П. Эрдёша и П. Турана передоказывался много раз (см., например, статьи М. Р. Беста [3], Ж. Д. Бовей [4], Ж. М. ДеЛаврентиса и Б. Г. Питтеля [17], В. Ф. Колчина [19], А. И. Павлова [27]). Доказательства упрощались шаг за шагом, но в итоге их все же нельзя было назвать простыми. Уточнение предельной теоремы Эрдёша–Турана получили в работе [1] А. Д. Барбур и С. Таваре. В [28] А. И. Павлов рассмотрел равномерное распределение на множестве $S_n^{(k)} = \{a = x^k \mid x \in S_n\}$ и доказал предельную теорему для логарифма порядка случайной подстановки из $S_n^{(k)}$ при фиксированном k . Скорость сходимости с точностью до $O((\ln \ln n)/\ln n)^{2/3}$ в этой предельной теореме совсем недавно, в 2004 г., получил В. Захаровас [52]. Пусть случайная подстановка μ_{nk} равномерно распределена на множестве подстановок из S_n , имеющих не более k циклов одинаковой длины. В [34] А. И. Павлов доказал также предельную теорему для логарифма порядка случайной подстановки μ_{nk} при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном k .

При перенесении упомянутого результата Эрдёша–Турана на A -подстановки мы существенно будем использовать идеи статьи Ж. М. ДеЛаврентиса и Б. Г. Питтеля [17] и книги автора [48].

2. Основной результат

Порядком подстановки называется минимальная степень, в которой она равна тождественной. Пусть

$$Y_n = \prod_{i=1}^n i^{\xi_{in}}$$

— произведение длин циклов случайной подстановки τ_n , а Z_n — ее порядок. Положим

$$\begin{aligned} d_{kn} &= \sum_{m=1}^n \chi\{k \mid m\} \zeta_{mn}, \\ d_{kn}^* &= \min(1, d_{kn}). \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно статье Ж. М. ДеЛаврентиса и Б. Г. Питтеля (см. [17], с. 289),

$$\begin{aligned} \ln Y_n &= \sum_p \sum_{s \geq 1} d_{p^s n} \ln p, \\ \ln Z_n &= \sum_p \sum_{s \geq 1} d_{p^s n}^* \ln p. \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sum_p$ означает сумму по простым числам. Мы будем предполагать, что для произвольной константы $1 < C < \infty$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |k: k \leq n, k \in A| &\rightarrow \sigma > 0, \\ \frac{1}{n} |k: k \leq n, k \in A, m - k \in A| &\rightarrow \sigma^2 \end{aligned} \quad (3)$$

равномерно по $m \in [n, Cn]$ (здесь и далее $|X|$ обозначает число элементов конечного множества X). Имеется широкий класс примеров множеств A , для которых выполнены соотношения (3). В частности, в книге [48] три раздела главы 3 специально посвящены разбору соответствующих примеров множеств A . Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены соотношения (3). Тогда при $n \rightarrow \infty$ распределение случайной величины

$$\frac{\ln Z_n - \sum_{i \in A(n)} \ln(i)/i}{\sqrt{(\sigma/3) \ln^3 n}}$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону. Здесь

$$A(n) = \{k: k \in A, k \leq n\}.$$

Следствие 1. Пусть множество A имеет асимптотическую плотность, равную 1. Тогда для него справедлива теорема 1 с $\sigma = 1$. В частности, отсюда при $A = \mathbf{N}$ следует известный результат Эрдёша–Турана [11]–[14].

Следствие 2. Пусть множество A случайно, случайные величины $\eta_1 = \chi\{1 \in A\}$, $\eta_2 = \chi\{2 \in A\}, \dots$ независимы в совокупности, и при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta_n = 1\} \rightarrow \sigma > 0.$$

Тогда для множества A соотношения (3) выполнены почти наверное (п.н.) (см. [48], раздел 3.6). Поэтому для произвольного фиксированного действительного x при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\ln Z_n - \sum_{i \in A(n)} \ln(i)/i}{\sqrt{(\sigma/3) \ln^3 n}} \leq x \middle| A \right\} \rightarrow \Phi(x) \quad \text{п.н.,}$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Зафиксируем $a \geq 0$. Положим

$$l(n) = \sum_{i \in A(n)} \frac{\ln^a i}{i}, \quad \xi_n = \sum_{i=1}^n \ln^a i \zeta_{i,n}. \quad (4)$$

Мы выведем теорему 1 из следующей теоремы и леммы.

Теорема 2. Пусть выполнены соотношения (3). Тогда при $n \rightarrow \infty$ распределение случайной величины

$$\frac{\xi_n - l(n)}{\sqrt{(\sigma/(1+2a)) \ln^{1+2a} n}}$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Положим

$$\Delta_n = \ln Y_n - \ln Z_n.$$

Ясно, что $\Delta_n \geq 0$.

Лемма 1. Пусть выполнены соотношения (3). Тогда для произвольного фиксированного $b > 2$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\Delta_n \geq \ln n (\ln \ln n)^b\} \rightarrow 0.$$

Теорема 2 обобщает теорему 3.3.2 из [48], а также известную предельную теорему Гончарова из [10]. Из теоремы 2 следует при $a = 1$, что, если выполнены соотношения (3), то распределение случайной величины

$$\frac{\ln Y_n - \sum_{i \in A(n)} \ln(i)/i}{\sqrt{(\sigma/3) \ln^3 n}}$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону. Поэтому из леммы 1 следует то же самое для случайной величины

$$\frac{\ln Z_n - \sum_{i \in A(n)} \ln(i)/i}{\sqrt{(\sigma/3) \ln^3 n}}.$$

Стало быть, для доказательства теоремы 1 достаточно доказать теорему 2 и лемму 1. Начнем с доказательства леммы 1. Эту лемму мы выведем из следующей леммы 2.

Лемма 2. Пусть выполнены соотношения (3). Тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k \leq n$

$$\mathbf{E}d_{kn} = O\left(\frac{\ln n}{k} + 1\right), \quad (5)$$

$$\mathbf{E}d_{kn}(d_{kn} - 1) = O\left(\frac{\ln^2 n}{k^2} + \frac{\ln n}{knp(n)}\right), \quad (6)$$

где

$$p(n) \equiv \frac{|T_n(A)|}{n!} = n^{\sigma-1} L(n) \neq 0 \quad (7)$$

при достаточно больших n (см. [48], теорема 3.3.1); здесь $|T_n(A)|$ есть число A -подстановок степени n , а функция $L(n)$ медленно меняется по Карамата на бесконечности [43].

3. Доказательства

Доказательство леммы 2. При $t \in [0, 1)$ положим

$$f(t) = \sum_{n \in A} \frac{t^n}{n}. \quad (8)$$

Согласно формуле (0.14) главы V книги В. Н. Сачкова [41], при $m \in A$ для произвольных $t \in [0, 1)$ и $s \geq 0$

$$F_m(t, s) = \sum_{n \geq 0} p(n) \mathbf{E} s^{\zeta_{mn}} = \exp(f(t) + (s-1)t^m/m), \quad (9)$$

где $p(0) = 1$. Далее будем считать, что $p(r) = 0$ при $r < 0$. Продифференцировав последнее равенство по s , получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial s} F_m(t, s) = F_m(t, s) \frac{t^m}{m}.$$

Поэтому из (8) и (9) следует, что

$$p(n) \mathbf{E} \zeta_{mn} = \text{coef}_{t^n} \frac{\partial}{\partial s} F_m(t, s)|_{s=0} = \text{coef}_{t^n} \exp(f(t)) \frac{t^m}{m} = \frac{p(n-m)}{m}, \quad (10)$$

так как

$$\exp(f(t)) = \sum_{n \geq 0} p(n) t^n$$

(см. соотношение (9) при $s = 0$). Из (10) следует, что при $p(n) \neq 0$

$$\mathbf{E} \zeta_{mn} = \frac{p(n-m)}{mp(n)}. \quad (11)$$

Продифференцировав (9) два раза по s , находим, что

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} F_m(t, s) = F_m(t, s) \frac{t^{2m}}{m^2}.$$

Отсюда получаем, что

$$p(n) \mathbf{E} \zeta_{mn} (\zeta_{mn} - 1) = \text{coef}_{t^n} \frac{\partial^2}{\partial s^2} F_m(t, s)|_{s=0} = \text{coef}_{t^n} \exp(f(t)) \frac{t^{2m}}{m^2} = \frac{p(n-2m)}{m^2},$$

откуда при $p(n) \neq 0$

$$\mathbf{E} \zeta_{mn} (\zeta_{mn} - 1) = \frac{p(n-2m)}{m^2 p(n)}. \quad (12)$$

Согласно формуле (0.14) главы V книги В. Н. Сачкова [41], при $m, k \in A$, $m \neq k$, для произвольных $t \in [0, 1)$ и $s, r \geq 0$

$$F_{mk}(t, s, r) \equiv \sum_{n \geq 0} zp(n) \mathbf{E} s^{\zeta_{mn}} r^{\zeta_{kn}} = \exp(f(t) + (s-1)t^m/m + (r-1)t^k/k). \quad (13)$$

Продифференцировав (13) по s и r , получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} F_{mk}(t, s, r) = F_{mk}(t, s, r) \frac{t^m}{m} \frac{t^k}{k},$$

откуда

$$p(n) \mathbf{E} \zeta_{mn} \zeta_{kn} = \text{coef}_{t^n} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} F_{mk}(t, s, r)|_{s,r=0} = \text{coef}_{t^n} \exp(f(t)) \frac{t^m}{m} \frac{t^k}{k} = \frac{p(n-m-k)}{mk},$$

или же, при $p(n) \neq 0$,

$$\mathbf{E}\zeta_{mn}\zeta_{kn} = \frac{p(n-m-k)}{mkp(n)}. \quad (14)$$

Суммируя (12) и (14), получим при $m, k \in A$, что

$$\mathbf{E}\zeta_{mn}(\zeta_{kn} - \delta_{km}) = \frac{p(n-m-k)}{mkp(n)}. \quad (15)$$

При достаточно больших n , согласно (7), $p(n) \neq 0$, поэтому мы далее будем рассматривать только n , обладающие этим свойством. В силу (1) и (11),

$$\mathbf{E}d_{kn} = \sum_{m=1}^n \chi\{k \mid m\} \frac{p(n-m)}{mp(n)} = \sum_{r=1}^{[n/k]} \frac{p(n-kr)}{krp(n)} = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{[n/k]} \frac{p(n-kr)}{rp(n)}. \quad (16)$$

Возьмем произвольное $\delta \in (0, 1)$. Так как $p(n)$ правильно меняется на бесконечности с параметром $\sigma - 1$ (см. соотношение (7)), справедливы равенства

$$\Sigma_1 \equiv \sum_{r=1}^{[n(1-\delta)/k]} \frac{p(n-kr)}{rp(n)} = O(1) \sum_{r=1}^{[n/k]} \frac{1}{r} = O(\ln(n/k)) = O(\ln n). \quad (17)$$

Здесь и ниже константы в O не зависят от $k \leq n$. Выберем любое $\varepsilon \in (0, \min(\sigma, 1 - \delta))$. Как показано в [48], с. 52, существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при

$$\varepsilon < \frac{kr}{n} \leq 1 - \frac{n_0}{n}$$

справедливо неравенство

$$\frac{p(n-kr)}{p(n)} \leq \left(1 - \frac{kr}{n}\right)^{\gamma-1}, \quad (18)$$

где $\gamma = \sigma - \delta > 0$. Поэтому при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\equiv \sum_{r=[(n-n_0)/k]+1}^{[(n-n_0)/k]} \frac{p(n-kr)}{rp(n)} \leq \sum_{r=[(n-n_0)/k]+1}^{[(n-n_0)/k]} \frac{(1-kr/n)^{\gamma-1}}{r} \\ &\leq \frac{k}{n(1-\delta)} \sum_{r=[(n-n_0)/k]+1}^{[(n-n_0)/k]} \left(1 - \frac{kr}{n}\right)^{\gamma-1} \leq \frac{k}{n(1-\delta)} \sum_{u=n_0}^{[\delta n]+1} \left(\frac{u}{n}\right)^{\gamma-1} \\ &= O\left(\frac{k}{n}\right) O(n^{1-\gamma}) O(n^\gamma) = O(k). \end{aligned} \quad (19)$$

Далее, так как $p(n-kr) \leq 1$ (см. (7)),

$$\begin{aligned} \sum_{r=[(n-n_0)/k]+1}^{[n/k]} \frac{p(n-kr)}{rp(n)} &\leq \frac{1}{p(n)} \sum_{r=[(n-n_0)/k]+1}^{[n/k]} \frac{1}{r} \leq \frac{n_0}{p(n)} \frac{1}{(n-n_0)/k+1} \\ &= \frac{1}{p(n)} O\left(\frac{k}{n}\right) = O(k) O\left(\frac{1}{np(n)}\right) = O(k)o(1), \end{aligned} \quad (20)$$

поскольку $np(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Из соотношений (16)–(20) следует, что

$$\mathbf{E}d_{kn} = \frac{1}{k} (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) = O\left(\frac{\ln n}{k} + 1 + o(1)\right) = O\left(\frac{\ln n}{k} + 1\right).$$

Неравенство (5) доказано. Докажем теперь неравенство (6). Согласно (11) и (15),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}d_{kn}(d_{kn} - 1) &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n \chi\{k \mid i\}\zeta_{in}\right)\left(\sum_{i=1}^n \chi\{k \mid i\}\zeta_{in} - 1\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{i,j=1}^n \chi\{k \mid i, k \mid j\}\zeta_{in}\zeta_{jn} - \sum_{i=1}^n \chi\{k \mid i\}\zeta_{in}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{i,j=1, i \neq j}^n \chi\{k \mid i, k \mid j\}\zeta_{in}\zeta_{jn} + \sum_{i=1}^n \chi\{k \mid i\}\zeta_{in}(\zeta_{in} - 1)\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{i,j=1}^n \chi\{k \mid i, k \mid j\}\zeta_{in}(\zeta_{jn} - 1)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \chi\{k \mid i, k \mid j\} \frac{p(n-i-j)}{p(n)ij}. \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно (7), для некоторых постоянных c_1 и c_2 , не зависящих от k и n ,

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \sum_{i,j=1, i+j \leq (1-\delta)n}^n \chi\{k \mid i, k \mid j\} \frac{p(n-i-j)}{p(n)ij} \leq c_1 \sum_{i,j=1}^n \frac{\chi\{k \mid i, k \mid j\}}{ij} \\ &= c_1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\chi\{k \mid i\}}{i}\right)^2 \leq c_2 \left(\frac{\ln n}{k}\right)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, согласно неравенству (18), где вместо r надо взять $r + s$, при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} S_2 &\equiv \sum_{i,j \in \mathbf{N}, n-n_0 \geq i+j > (1-\delta)n} \chi\{k \mid i, k \mid j\} \frac{p(n-i-j)}{p(n)ij} \\ &= \sum_{r,s \in \mathbf{N}, n-n_0 \geq k(r+s) > (1-\delta)n} \frac{p(n-k(r+s))}{p(n)k^2rs} \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{r,s \in \mathbf{N}, n-n_0 \geq k(r+s) > (1-\delta)n} \frac{(1-k(r+s)/n)^{\gamma-1}}{rs}. \end{aligned} \quad (23)$$

Введем переменную $m = r + s$. Согласно (23),

$$S_2 \leq \frac{1}{k^2} \sum_{m=[(1-\delta)n/k]+1}^{[(n-n_0)/k]} \left(1 - \frac{km}{n}\right)^{\gamma-1} \sum_{r,s \in \mathbf{N}, r+s=m} \frac{1}{rs}. \quad (24)$$

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{r,s \in \mathbb{N}, r+s=m} \frac{1}{rs} &\leq \sum_{r,s \in \mathbb{N}, r+s=m, r \leq [m/2]} \frac{1}{rs} + \sum_{r,s \in \mathbb{N}, r+s=m, s \leq [m/2]} \frac{1}{rs} \\ &= 2 \sum_{r,s \in \mathbb{N}, r+s=m, r \leq [m/2]} \frac{1}{rs} = 2 \sum_{r=1}^{[m/2]} \frac{1}{r(m-r)} \leq \frac{2}{[m/2]} \sum_{r=1}^{[m/2]} \frac{1}{r} \\ &= O\left(\frac{\ln m}{m}\right) = O\left(\frac{k \ln(n/k)}{n}\right) = O\left(\frac{k \ln n}{n}\right), \end{aligned} \quad (25)$$

причем константа в O не зависит от m из промежутка суммирования и $k \leq n$. Из (24) и (25) следует, что

$$S_2 = O\left(\frac{\ln n}{kn}\right) \sum_{m=[(1-\delta)n/k]+1}^{[(n-n_0)/k]} \left(1 - \frac{km}{n}\right)^{\gamma-1}. \quad (26)$$

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{m=[(1-\delta)n/k]+1}^{[(n-n_0)/k]} \left(1 - \frac{km}{n}\right)^{\gamma-1} &= \sum_{m=[(1-\delta)n/k]+1}^{[(n-n_0)/k]-1} \left(1 - \frac{km}{n}\right)^{\gamma-1} + \left(1 - \frac{k[(n-n_0)/k]}{n}\right)^{\gamma-1} \\ &\leq \sum_{m=[(1-\delta)n/k]+1}^{[(n-n_0)/k]-1} \int_m^{m+1} \left(1 - \frac{kx}{n}\right)^{\gamma-1} dx + \left(\frac{n_0}{n}\right)^{\gamma-1} \\ &\leq \int_{(1-\delta)n/k}^{n/k-1} \left(1 - \frac{kx}{n}\right)^{\gamma-1} dx + \left(\frac{n_0}{n}\right)^{\gamma-1} \\ &= \frac{1}{k} \int_k^{n\delta} \left(\frac{y}{n}\right)^{\gamma-1} dy + \left(\frac{n_0}{n}\right)^{\gamma-1} \\ &= \frac{n^{1-\gamma}}{k} \left(\int_k^{n\delta} y^{\gamma-1} dy + n_0^{\gamma-1} \right) \\ &= \frac{n^{1-\gamma}}{k} O(n^\gamma) = O\left(\frac{n}{k}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Из (26) и (27) следует, что

$$S_2 = O\left(\frac{\ln n}{kn}\right) O\left(\frac{n}{k}\right) = O\left(\frac{\ln n}{k^2}\right). \quad (28)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} S_3 &\equiv \sum_{i,j \in \mathbb{N}, n-n_0 < i+j \leq n} \chi\{k \mid i, k \mid j\} \frac{p(n-i-j)}{p(n)ij} = \sum_{r,s \in \mathbb{N}, n-n_0 < k(r+s) \leq n} \frac{p(n-k(r+s))}{p(n)k^2rs} \\ &\leq \frac{1}{k^2 p(n)} \sum_{r,s \in \mathbb{N}, n-n_0 < k(r+s) \leq n} \frac{1}{rs} = \frac{1}{k^2 p(n)} \sum_{m=[(n-n_0)/k]+1}^{[n/k]} \sum_{r,s \in \mathbb{N}, r+s=m} \frac{1}{rs}, \end{aligned} \quad (29)$$

так как $p(x) \leq 1$ (см. (7)). Как и в (25),

$$\sum_{r,s \in \mathbb{N}, r+s=m} \frac{1}{rs} = O\left(\frac{k \ln n}{n}\right). \quad (30)$$

Из (29) и (30) следует, что

$$S_3 = O\left(\frac{\ln n}{knp(n)}\right) \sum_{m=[(n-n_0)/k]+1}^{[n/k]} 1 = O\left(\frac{\ln n}{knp(n)}\right), \quad (31)$$

так как последняя сумма содержит не более n_0 слагаемых. В силу (21), (22), (23) и (29),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}d_{kn}(d_{kn} - 1) &= S_1 + S_2 + S_3 \\ &= O\left(\frac{\ln^2 n}{k^2} + \frac{\ln n}{k^2} + \frac{\ln n}{knp(n)}\right) = O\left(\frac{\ln^2 n}{k^2} + \frac{\ln n}{knp(n)}\right) \end{aligned}$$

согласно (22), (28) и (31). Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Из (1) и (2) следует, что

$$0 \leq \Delta_n \leq \sum_{k=1}^n (d_{kn} - d_{kn}^*) \ln k \equiv \sum_{k=1}^n \Delta_{kn} \ln k. \quad (32)$$

Из (1) и (2) выводим, что

$$\Delta_{kn} \leq d_{kn}, \quad \Delta_{kn} \leq d_{kn}(d_{kn} - 1). \quad (33)$$

Из (32) и (33) получаем, что

$$\mathbf{E}\Delta_n \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\Delta_{kn} \ln k \leq \sum_{k=1}^{[n]} \mathbf{E}d_{kn} \ln k + \sum_{k=[n]+1}^n \mathbf{E}d_{kn}(d_{kn} - 1) \ln k. \quad (34)$$

Согласно (5),

$$\sum_{k=1}^{[n]} \mathbf{E}d_{kn} \ln k = O\left(\ln n \sum_{k=1}^{[n]} \frac{\ln k}{k} + \sum_{k=1}^{[n]} \ln k\right) = O(\ln n (\ln \ln n)^2). \quad (35)$$

Далее, в силу (6) и (7),

$$\begin{aligned} \sum_{k=[n]+1}^n \mathbf{E}d_{kn}(d_{kn} - 1) \ln k &= O\left(\ln^2 n \sum_{k=[n]+1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} + \frac{\ln n}{np(n)} \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}\right) \\ &= O\left(\ln n \ln \ln n + \frac{\ln^3 n}{n^\sigma L(n)}\right) = O(\ln n \ln \ln n). \end{aligned}$$

Из (34), (35) и последнего соотношения следует, что

$$\mathbf{E}\Delta_n = O(\ln n (\ln \ln n)^2). \quad (36)$$

В силу (36) и неравенства Чебышева, при $b > 2$

$$\mathbf{P}\{\Delta_n \geq \ln n (\ln \ln n)^b\} \leq \frac{\mathbf{E}\Delta_n}{\ln n (\ln \ln n)^b} = O\left(\frac{1}{(\ln \ln n)^{b-2}}\right) = o(1) \quad (37)$$

при $n \rightarrow \infty$. Из (37) следует утверждение леммы 1.

Поскольку лемма 1 и лемма 2 доказаны, для доказательства теоремы 1 остается доказать теорему 2. Теорему 2, в свою очередь, мы выведем из следующих четырех лемм.

Лемма 3. Пусть для всех $u, v \in (0, 1)$ конечна функция

$$A(u, v) = \sum_{m, n \geq 0} m^{\alpha-1} a(m, n) u^m v^n,$$

где $\alpha > 0$, $a(m, n) \geq 0$, причем для произвольных $\lambda, \mu > 0$

$$A(e^{-\lambda/t}, e^{-\mu/t})/r(t) \rightarrow \lambda^{-\alpha} \mu^{-\beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \quad (38)$$

при $t \rightarrow \infty$, где $\beta > 0$, $r(t)$ — некоторая положительная функция переменной t , $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Если $a(m, n)$ монотонна по m и $m \asymp n$, $l \geq n$, $l - n = o(n)$,

$$a(m, n) - a(m, l) = o\left(\sum_{i=0}^l a(m, i)/n\right), \quad (39)$$

при $n \rightarrow \infty$, то для произвольных $x, y > 0$ при $t \rightarrow \infty$

$$a(tx, ty) \sim r(t) t^{-1-\alpha} y^{\beta-1};$$

при нецелых u, v полагаем $a(u, v) = a([u], [v])$.

Пусть $(U_k, k \in \mathbf{N})$ — последовательность σ -конечных мер на $\mathbf{R}^1$. Говорят (см. раздел VIII.6 в [46]), что последовательность $(U_k, k \in \mathbf{N})$ слабо сходится к σ -конечной мере U на $\mathbf{R}^1$ при $k \rightarrow \infty$ и пишут, что $U_k \Rightarrow U$, если для каждого ограниченного борелевского множества $A \subseteq \mathbf{R}^1$ такого, что $U(\partial A) = 0$, последовательность $U_k(A) \rightarrow U(A)$.

Лемма 4. Пусть для мер U и V существуют их производящие функции моментов

$$\begin{aligned} \tilde{U}(z) &= \int_{\mathbf{R}^1} e^{zx} U(dx) < \infty, \\ \tilde{V}(z) &= \int_{\mathbf{R}^1} e^{zx} V(dx) < \infty \end{aligned}$$

при $z \in (a, b)$ для некоторых a, b , $-\infty < a < b < \infty$, причем $\tilde{U}(z) = \tilde{V}(z)$ для всех $z \in (a, b)$. Тогда $U = V$.

Справедлива следующая модификация известной теоремы Куртисса [41].

Лемма 5. Пусть для последовательности $(U_k, k \in \mathbf{N})$ при некоторых a, b таких, что $-\infty < a < b < \infty$, существуют производящие функции моментов

$$\tilde{U}_k(z) = \int_{\mathbf{R}^1} e^{zx} U_k(dx) < \infty$$

для всех $z \in (a, b)$.

(1) Если для всех $z \in (a, b)$ при $k \rightarrow \infty$

$$\tilde{U}_k(z) \rightarrow \omega(z) < \infty, \quad (40)$$

то $\omega(z)$ является производящей функцией моментов некоторой меры U на $\mathbf{R}^1$, и $U_k \Rightarrow U$ при $k \rightarrow \infty$.

(2) Обратно, если $U_k \Rightarrow U$ при $k \rightarrow \infty$ и $\tilde{U}_k(a)$, $\tilde{U}_k(b)$ ограничены, то выполнено соотношение (40) и для меры U существует при $z \in (a, b)$ производящая функция моментов $\tilde{U}(z)$ и $\tilde{U}(z) = \omega(z)$ при $z \in (a, b)$.

В отличие от теоремы Куртисса, в лемме 4 интервал (a, b) не обязательно содержит точку ноль, что окажется существенным далее. Если меры U_k являются вероятностными, то для того, чтобы предельная мера U была вероятностной, достаточно, чтобы функция $\omega(z)$ имела аналитическое продолжение в некоторую окрестность нуля комплексной плоскости и $\omega(0) = 1$. Отметим также, что для существования производящей функции моментов меры U в форме, определенной в лемме 4, на некотором интервале (a, b) , не содержащем нуля, вовсе не нужно существования каких-либо моментов этой меры. Однако в названии этого преобразования мы отдаем должное традициям (см., например, [41, 42, 46]).

Лемма 6. Пусть выполнено (3) и $a > -1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i \in A, i \leq n} \frac{\ln^a i}{i} = (1 + o(1)) \frac{\sigma}{1+a} \ln^{(1+a)} n. \quad (41)$$

При $a = 0$ утверждение леммы 6 сводится к тому, что из существования асимптотической плотности множества A следует существование логарифмической плотности этого множества и их равенство. Это утверждение общеизвестно (см., например, раздел 3.1 в книге А. Г. Постникова [36]).

Лемма 3 есть не что иное, как тауберова теорема 1.5.7 из [48]. Лемма 4 доказывается аналогично теореме 1.3.1 из [48]. Докажем сначала лемму 5, а затем лемму 6.

Доказательство леммы 5. Начнем с доказательства части 2. Выберем такую последовательность $t_k \uparrow \infty$, чтобы $U(\partial A_k) = 0$, где

$$A_k = \{x: x \in \mathbf{R}^1, |x| \leq t_k\}.$$

Пусть $U_k^{(m)}$ и $U^{(m)}$ — сужения мер U_k и U , соответственно, на A_m . В силу определения слабой сходимости мер, для каждого $m \in \mathbf{N}$ последовательность $U_k^{(m)} \Rightarrow U^{(m)}$ при $k \rightarrow \infty$, следовательно (см. раздел VIII.6 в [46]),

$$\int_{A_m} e^{zx} U_k(dx) \rightarrow \int_{A_m} e^{zx} U(dx) \quad (42)$$

для всех $m \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \mathbf{R}^1$. Поэтому при $z \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^1} e^{zx} U(dx) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A_m} e^{zx} U(dx) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_m} e^{zx} U_k(dx) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\tilde{U}_k(a) + \tilde{U}_k(b)), \end{aligned} \quad (43)$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{A_m} e^{zx} U_k(dx) &\leq \int_{\mathbf{R}^1} e^{zx} U_k(dx) = \int_{(-\infty, 0)} e^{zx} U_k(dx) + \int_{[0, \infty)} e^{zx} U_k(dx) \\ &\leq \int_{(-\infty, 0)} e^{ax} U_k(dx) + \int_{[0, \infty)} e^{bx} U_k(dx) \leq \tilde{U}_k(a) + \tilde{U}_k(b). \end{aligned}$$

Для произвольных $k, m \in \mathbf{N}$, $z \in \mathbf{R}^1$, при $B_m = (-\infty, -t_k) \cup (t_k, \infty)$

$$\begin{aligned} |\tilde{U}_k(z) - \tilde{U}(z)| &\leq \int_{(-\infty, -t_m)} e^{zx} U_k(dx) + \int_{(t_m, \infty)} e^{zx} U_k(dx) + \int_{B_m} e^{zx} U(dx) \\ &\quad + \left| \int_{A_m} e^{zx} U_k(dx) - \int_{A_m} e^{zx} U(dx) \right|. \quad (44) \end{aligned}$$

Заметим, что при $h = b - z > 0$ и $z \in (a, b)$

$$\int_{(t_m, \infty)} e^{zx} U_k(dx) = \int_{(t_m, \infty)} e^{-hx+bx} U_k(dx) \leq e^{-ht_m} \tilde{U}_k(b) \rightarrow 0 \quad (45)$$

при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in \mathbf{N}$. Кроме того, при $s = z - a > 0$ и $z \in (a, b)$

$$\int_{(-\infty, -t_m)} e^{zx} U_k(dx) = \int_{(-\infty, -t_m)} e^{sx+ax} U_k(dx) \leq e^{-stm} \tilde{U}_k(a) \rightarrow 0 \quad (46)$$

при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in \mathbf{N}$. Зафиксируем $z \in (a, b)$ и $\varepsilon > 0$. Выберем такое $m \in \mathbf{N}$, чтобы для произвольных $k \in \mathbf{N}$ выполнялись неравенства

$$\int_{B_m} e^{zx} U(dx) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \int_{(-\infty, -t_m)} e^{zx} U_k(dx) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \int_{(t_m, \infty)} e^{zx} U_k(dx) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Это можно сделать в силу соотношений (43), (45) и (46). Для полученного m , согласно (42), выберем такое k_0 , чтобы при $k \geq k_0$ было выполнено неравенство

$$\left| \int_{A_m} e^{zx} U_k(dx) - \int_{A_m} e^{zx} U(dx) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поэтому из последних четырех неравенств и соотношения (44) следует, что при $k \geq k_0$

$$|\tilde{U}_k(z) - \tilde{U}(z)| < \varepsilon,$$

что доказывает часть 2 леммы 5.

В предположениях части 1 леммы 5, для каждого $t > 0$ и $z \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k(z) &= \int_{(-\infty, 0)} e^{zx} U_k(dx) + \int_{[0, \infty)} e^{zx} U_k(dx) \\ &\leq \int_{(-\infty, 0)} e^{ax} U_k(dx) + \int_{[0, \infty)} e^{bx} U_k(dx) \leq \tilde{U}_k(a) + \tilde{U}_k(b) \end{aligned}$$

и

$$\tilde{U}_k(z) \geq \int_{[-t, t]} e^{zx} U_k(dx) \geq e^{-zt} U_k([-t, t]),$$

откуда следует, что для произвольного фиксированного $t > 0$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} U_k([-t, t]) < \infty.$$

Поэтому последовательность мер $(U_k, k \in \mathbb{N})$ предкомпактна в определенной выше слабой топологии (см. теорему 2 раздела VIII.6 в [46]). Если подпоследовательность $U_{k(j)} \Rightarrow U$ при $j \rightarrow \infty$ для некоторой меры U , то, согласно только что доказанной части 2 леммы 5, $\tilde{U}_{k(j)}(z) \rightarrow \tilde{U}(z)$ для всех $z \in (a, b)$ при $j \rightarrow \infty$, следовательно, $\tilde{U}(z) = \omega(z)$, и, согласно лемме 4, у последовательности U_k имеется только одна предельная точка U в смысле слабой сходимости, причем $\tilde{U}(z) = \omega(z)$ для всех $z \in (a, b)$. Таким образом, $U_k \Rightarrow U$ при $k \rightarrow \infty$. Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6. Положим

$$a_i = \frac{\ln^a i}{i}, \quad b_i = \chi\{i \in A\}, \quad B_i = \sum_{j=1}^i b_j = \sum_{j=1}^j \chi\{j \in A\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Применяя к левой части (41) преобразование Абеля, получим, что

$$\sum_{i \in A, i \leq n} \frac{\ln^a i}{i} = \frac{\ln^a n}{n} \sum_{i=1}^n \chi\{i \in A\} + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i. \quad (47)$$

Справедливы равенства

$$a_i - a_{i+1} = \frac{(i+1) \ln^a i - i \ln^a(i+1)}{i(i+1)} = \frac{i(\ln^a i - \ln^a(i+1)) + \ln^a i}{i(i+1)}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \ln^a i - \ln^a(i+1) &= \ln^a i - \left(\ln i + \ln \left(1 + \frac{1}{i} \right) \right)^a \\ &= \ln^a i \left(1 - \left(1 + \frac{\ln(1+1/i)}{\ln i} \right)^a \right) = \ln^a i O \left(\frac{1}{i \ln i} \right) \end{aligned}$$

при $i \rightarrow \infty$. Стало быть, при $i \rightarrow \infty$

$$a_i - a_{i+1} = \frac{i \ln^a i O(1/(i \ln i)) + \ln^a i}{i(i+1)} = \frac{O(\ln^{(a-1)} i) + \ln^a i}{i(i+1)} = (1 + o(1)) \frac{\ln^a i}{i^2}. \quad (48)$$

Из (47) и (48), учитывая, что по условию леммы 6 при $i \rightarrow \infty$

$$B_i = (1 + o(1)) \sigma i,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A, i \leq n} \frac{\ln^a i}{i} &= \ln^a n (\sigma + o(1)) + (\sigma + o(1)) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln^a i}{i} \\ &= (1 + o(1)) \sigma \int_1^n \frac{\ln^a x}{x} dx = (1 + o(1)) \frac{\sigma}{1+a} \ln^{(a+1)} n. \end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

Положим при $b = 1/2 + a$, $z \leq 0$, $t \geq 2$ и $m \geq 2$, $m, n \in \mathbb{N}$

$$r(t) = t^{1+\alpha} p(t) \exp \left(z \frac{l(t)}{\ln^b t} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1+2a} \right), \quad (49)$$

$$a(m, n) = p(n) \mathbf{E} \exp \left(\frac{z \xi_n}{\ln^b m} \right) \quad (50)$$

(функции $p(n)$ и $l(n)$ определены, соответственно, в соотношениях (7) и (4), функция $r(t)$ при нецелых t доопределяется своими значениями в $[t]$, а постоянная $\alpha \geq 1$). Заметим, что для доказательства теоремы 2 нам достаточно проверить выполнение условий леммы 3 с определенными равенствами (49) и (50) двойной последовательностью $a(m, n)$ и функцией $r(t)$. Действительно, если условия леммы 3 будут проверены, то из этой леммы будет следовать, что

$$p(n) \mathbf{E} \exp \left(\frac{z \xi_n}{\ln^b n} \right) = a(n, n) \sim n^{-1-\alpha} r(n) = p(n) \exp \left(z \frac{l(n)}{\ln^b n} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1+2a} \right)$$

при $n \rightarrow \infty$, откуда получаем, что

$$\mathbf{E} \exp \left(\frac{z \xi_n}{\ln^b n} \right) \sim \exp \left(z \frac{l(n)}{\ln^b n} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1+2a} \right)$$

при $n \rightarrow \infty$, или же

$$\mathbf{E} \exp \left(\frac{z(\xi_n - l(n))}{\ln^b n} \right) \rightarrow \exp \left(\frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1+2a} \right)$$

для произвольного $z \leq 0$. Из последнего соотношения и леммы 5 следует справедливость теоремы 2. Поэтому далее мы будем проверять выполнение условий (38) и (39) леммы 3 для определенных выше двойной последовательности $a(m, n)$ и функции $r(t)$.

Согласно формуле (0.14) главы V книги В. Н. Сачкова [41], для произвольных $t \in [0, 1]$ и $s_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n \geq 0} t^n p(n) \mathbf{E} \prod_{i=1}^n s_i^{\xi_{in}} = \exp \left(f(t) + \sum_{i \in A} (s_i - 1) \frac{t^i}{i} \right) = \exp \left(\sum_{i \in A} \frac{t^i s_i}{i} \right).$$

Для произвольного действительного λ , полагая в последнем соотношении

$$s_i = \exp(\lambda \ln^a i), \quad i \in \mathbb{N},$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} t^n p(n) \mathbf{E} \prod_{i=1}^n \exp(\lambda \ln^a i \xi_{in}) &= \sum_{n \geq 0} t^n p(n) \mathbf{E} \exp \left(\lambda \sum_{i=1}^n \ln^a i \xi_{in} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} t^n p(n) \mathbf{E} \exp(\lambda \xi_n) = \exp \left(f(t) + \sum_{i \in A} (\exp(\lambda \ln^a i) - 1) \frac{t^i}{i} \right). \end{aligned}$$

Полагая в полученном равенстве $\lambda = z / \ln^b m$, для производящей функции по n чисел $a(m, n)$ из (50) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a(m, n) v^n &= \exp \left(f(v) + \sum_{i \in A} \left(\exp \left(\frac{z \ln^a i}{\ln^b m} \right) - 1 \right) \frac{v^i}{i} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} a(m, n) v^n = \exp \left(f(v) + \sum_{i \in A} \left((h(i, m) - 1) \frac{v^i}{i} \right) \right), \end{aligned}$$

где

$$h(i, m) = \exp \left(\frac{z \ln^a i}{\ln^b m} \right). \quad (51)$$

Поэтому для производящей функции $A(u, v)$ чисел $m^{\alpha-1} a(m, n)$ справедливо равенство:

$$\begin{aligned} A(u, v) &\equiv \sum_{m, n \geq 0} m^{\alpha-1} a(m, n) u^m v^n \\ &= \exp(f(v)) \sum_{m=0}^{\infty} m^{\alpha-1} u^m \exp \left(\sum_{i \in A} \left((h(i, m) - 1) \frac{v^i}{i} \right) \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Так как

$$\sum_{n \geq 0} p(n) v^n = \exp(f(v)),$$

для произвольных фиксированных неотрицательных λ и μ при $u = \exp(-\lambda/t)$, $v = \exp(-\mu/t)$ и $t \rightarrow \infty$, в силу абелевой теоремы Карамата для степенных рядов и соотношений (7) и (52), справедлива асимптотика

$$A(u, v) \sim \Gamma(\sigma) p(t) t \mu^{-\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} m^{\alpha-1} u^m \exp \left(\sum_{i \in A} \left((h(i, m) - 1) \frac{v^i}{i} \right) \right). \quad (53)$$

При $m, t \rightarrow \infty$ исследуем сумму

$$\Sigma = \sum_{i \in A} \left((h(i, m) - 1) \frac{v^i}{i} \right) \quad (54)$$

с точностью до $o(1)$. Если

$$\frac{\ln^a i}{\ln^b m} \rightarrow 0,$$

то, согласно (51),

$$h(i, m) - 1 = \exp \left(\frac{z \ln^a i}{\ln^b m} \right) - 1 = \frac{z \ln^a i}{\ln^b m} + \frac{z^2}{2} \frac{\ln^{2a} i}{\ln^{(1+2a)} m} + O \left(\left(\frac{\ln^a i}{\ln^b m} \right)^3 \right). \quad (55)$$

Представим Σ в виде

$$\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad (56)$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{i \in A(t)} \left((h(i, m) - 1) \frac{1}{i} \right), \quad (57)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{i \in A(t)} \left((h(i, m) - 1) \frac{1 - v^i}{i} \right), \quad (58)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{i \in A, i > t} \left((h(i, m) - 1) \frac{v^i}{i} \right) \quad (59)$$

(напомним, что $A(t) = A \cap [1, t]$). Пусть t и m стремятся к бесконечности так, что

$$\frac{\ln^a t}{\ln^b m} \rightarrow 0. \quad (60)$$

Тогда из (55), (57) и (60) следует, что

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{i \in A(t)} \left((h(i, m) - 1) \frac{1}{i} \right) \\ &= \frac{z}{\ln^b m} \sum_{i \in A(t)} \frac{\ln^a i}{i} + \frac{z^2}{2} \frac{1}{\ln^{(1+2a)} m} \sum_{i \in A(t)} \frac{\ln^{2a} i}{i} + O(1) \frac{1}{\ln^{(3/2+3a)} m} \sum_{i \in A(t)} \frac{\ln^{3a} i}{i}. \end{aligned}$$

В силу леммы 6, отсюда получаем, что если выполнено (60), то

$$\Sigma_1 = \frac{zl(t)}{\ln^b m} + (1 + o(1)) \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1 + 2a} \frac{\ln^{(1+2a)} t}{\ln^{(1+2a)} m} + O(1) \frac{\ln^{(1+3a)} t}{\ln^{(3/2+3a)} m}. \quad (61)$$

Из (61) следует, что если при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\ln^{(1/3+a)} t}{\ln^{(1/2+a)} m} = o(1), \quad (62)$$

то

$$\Sigma_1 = \frac{zl(t)}{\ln^b m} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1 + 2a} \frac{\ln^{(1+2a)} t}{\ln^{(1+2a)} m} + o(1). \quad (63)$$

В частности, если $\ln m \sim \ln t$, то

$$\Sigma_1 = \frac{zl(t)}{\ln^b m} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1 + 2a} + o(1). \quad (64)$$

Пусть $\theta = 2 + a$. Положим

$$g(x) = \frac{x}{\ln^\theta x}, \quad x > 1.$$

Существует $x_0 > 1$ такое, что при $x \geq x_0$ функция $g(x)$ монотонно возрастает. Согласно свойству 5° раздела 1.5 из [43], обратная функция $g^{-1}(x)$, определенная при $x \geq g(x_0)$, имеет вид

$$g^{-1}(x) = xL_1(x),$$

где $L_1(x)$ — некоторая медленно меняющаяся на бесконечности по Карамата функция. Тогда при $t \geq g(x_0)$

$$g(tL_1(t)) = t; \quad \frac{tL_1(t)}{\ln^\theta(tL_1(t))} = t;$$

$$L_1(t) = (\ln t + \ln L_1(t))^\theta = \ln^\theta t \left(1 + O\left(\frac{\ln L_1(t)}{\ln t}\right) \right) = (1 + o(1)) \ln^\theta t \quad (65)$$

при $t \rightarrow \infty$, так как

$$\ln L_1(t) = o(\ln t)$$

для произвольной медленно меняющейся функции $L_1(t)$ (см. [43]). Из (59) следует, что

$$\Sigma_3 = \sum_{i \in A, i \in (t, g^{-1}(t)]} (h(i, m) - 1) \frac{v^i}{i} + \sum_{i \in A, i > g^{-1}(t)} (h(i, m) - 1) \frac{v^i}{i} = \Sigma'_3 + \Sigma''_3. \quad (66)$$

Согласно (66), если выполнено (62), то

$$\begin{aligned} \Sigma'_3 &\leq \sum_{i \in (t, g^{-1}(t)] \cap \mathbb{N}} \left(\exp\left(\frac{z \ln^a i}{\ln^b m}\right) - 1 \right) \frac{v^i}{i} \leq \left(\exp\left(\frac{z \ln^a(g^{-1}(t))}{\ln^b m}\right) - 1 \right) \sum_{i \in (t, g^{-1}(t)] \cap \mathbb{N}} \frac{1}{i} \\ &= (\ln(t \ln^\theta t) - \ln t + O(1)) O\left(\frac{\ln^a(tL_1(t))}{\ln^b m}\right) = O(\ln \ln t) \frac{\ln^a t}{\ln^b m} \left(1 + O\left(\frac{\ln L_1(t)}{\ln t}\right) \right)^a \\ &= O(\ln \ln t) \frac{\ln^a t}{\ln^b m} = o(1). \end{aligned} \quad (67)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Sigma''_3 &\leq \sum_{i=[g^{-1}(t)]+1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{z \ln^a i}{\ln^b m}\right) - 1 \right) \frac{\exp(-\mu i/t)}{i} \leq \sum_{i=[g^{-1}(t)]+1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu \ln^\theta i + z \ln^a i)}{i} \\ &\leq \sum_{i=[g^{-1}(t)]+1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu/2 \ln^\theta i)}{i} = o(1) \end{aligned} \quad (68)$$

при $t \rightarrow \infty$, так как $\theta = 2 + a > 1$ (последние два неравенства выполнены при достаточно больших t). Из (66), (67) и (68) следует, что, если выполнено (62), то

$$\Sigma_3 = o(1). \quad (69)$$

Заметим также, что если выполнено (62), то

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{i \in A(t)} \left((h(i, m) - 1) \frac{1 - v^i}{i} \right) = O(1) \sum_{i=1}^{[t]} \frac{i}{ti} \frac{\ln^a i}{\ln^b m} = \frac{O(1)}{t \ln^b m} \sum_{i=1}^{[t]} \ln^a i \\ &= \frac{O(1)}{t \ln^b m} t \ln^a t = o(1). \end{aligned} \quad (70)$$

Из (56)–(59), (63), (69) и (70) следует, что если имеет место (62), то

$$\Sigma = \frac{zl(t)}{\ln^b m} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1 + 2a} \frac{\ln^{(1+2a)} t}{\ln^{(1+2a)} m} + o(1). \quad (71)$$

Если в соотношении (62) символ o заменить на символ O , то (71) останется справедливым с заменой символа o на символ O . Это доказывается точно так же, мы будем пользоваться этим далее. Неравенство

$$\frac{\ln^{(1/3+a)} t}{\ln^{(1/2+a)} m} \leq 1 \quad (72)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$m \geq \exp(\ln^{(1-\varepsilon)} t), \quad (73)$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{3(1+2a)}. \quad (74)$$

Представим сумму

$$I \equiv \sum_{m \geq 0} m^{\alpha-1} u^m \exp(\Sigma) \quad (75)$$

в виде суммы пяти слагаемых

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad (76)$$

в которых суммирование ведется по $m \in [0, \exp(\ln^{(1-\varepsilon)} t)) \cap \mathbb{N}$, $m \in [\exp(\ln^{(1-\varepsilon)} t), \sqrt{t}) \cap \mathbb{N}$, $m \in [\sqrt{t}, t/\ln t) \cap \mathbb{N}$, $m \in [t/\ln t, t \ln t) \cap \mathbb{N}$ и $m \in [t \ln t, \infty) \cap \mathbb{N}$ соответственно. Заметим, что функция $\exp(zl(t)/\ln^b t)$ медленно меняется на бесконечности. В самом деле, при $t \rightarrow \infty$ и фиксированном $\lambda > 1$

$$\begin{aligned} l(\lambda t) - l(t) &= \sum_{i \in (t, t\lambda] \cap A} \frac{\ln^a i}{i} = O(\ln^{(a+1)}(t\lambda) - \ln^{(a+1)} t) \\ &= O(1) \ln^{(a+1)} t \left(\left(\frac{\ln t + \ln \lambda}{\ln t} \right)^{a+1} - 1 \right) = \frac{O(1) \ln^{(a+1)} t}{\ln t} = O(\ln^a t). \end{aligned}$$

Далее, поскольку $b = a + 1/2$, справедлива оценка

$$\ln^b t \lambda - \ln^b t = O(\ln^{(a-1/2)} t).$$

Поэтому при $t \rightarrow \infty$, в силу леммы 5,

$$\begin{aligned} \frac{l(t\lambda)}{\ln^b(t\lambda)} &= \frac{l(t) + O(\ln^a t)}{\ln^b t + O(\ln^{(a-1/2)} t)} = \frac{l(t)}{\ln^b t} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln t}\right) \right) + O\left(\frac{\ln^a t}{\ln^{(1/2+a)} t}\right) \\ &= \frac{l(t)}{\ln^b t} + O(1) \frac{l(t)}{\ln^{(3/2+a)} t} + O(\ln^{-1/2} t) \\ &= \frac{l(t)}{\ln^b t} + O(1) \frac{\ln^{1+a}(t)}{\ln^{(3/2+a)} t} + O(\ln^{-1/2} t) \\ &= \frac{l(t)}{\ln^b t} + O(\ln^{-1/2} t) = \frac{l(t)}{\ln^b t} + o(1). \end{aligned}$$

Наибольший вклад в сумму I дает сумма I_4 . Оценим ее. Прежде всего заметим, что при $t \rightarrow \infty$ и $m \in [t/\ln t, t \ln t) \cap \mathbb{N}$

$$\ln m = \ln t \left(1 + \frac{O(\ln \ln t)}{\ln t} \right).$$

Поэтому при $t \rightarrow \infty$ и $m \in [t/\ln t, t \ln t) \cap \mathbb{N}$, в силу леммы 6,

$$\begin{aligned} \frac{l(t)}{\ln^b m} &= \frac{l(t)}{\ln^b t} \left(1 + \frac{O(\ln \ln t)}{\ln t} \right) = \frac{l(t)}{\ln^b t} + O(1) \frac{l(t) \ln \ln t}{\ln^{(3/2+a)} t} \\ &= \frac{l(t)}{\ln^b t} + O(1) \frac{\ln^{(1+a)} t \ln \ln t}{\ln^{(3/2+a)} t} = \frac{l(t)}{\ln^b t} + o(1). \end{aligned} \quad (77)$$

Из (71) и (77) следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} I_4 &= \sum_{m \in [t/\ln t, t \ln t) \cap \mathbb{N}} m^{\alpha-1} u^m \exp(\Sigma) \\ &\sim \exp \left(\frac{zl(t)}{\ln^b t} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1+2a} \right) \sum_{m \in [t/\ln t, t \ln t) \cap \mathbb{N}} m^{\alpha-1} u^m \\ &\sim \exp \left(\frac{zl(t)}{\ln^b t} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1+2a} \right) \Gamma(\alpha) \lambda^{-\alpha} t^\alpha \end{aligned} \quad (78)$$

(напомним, что $u = \exp(-\lambda/t)$). Далее,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{m \in [0, \exp(\ln^{(1-\varepsilon)} t)) \cap \mathbb{N}} m^{\alpha-1} u^m \exp(\Sigma) \\ &\leq \sum_{m \in [0, \exp(\ln^{(1-\varepsilon)} t)) \cap \mathbb{N}} m^{\alpha-1} \sim \exp(\alpha \ln^{(1-\varepsilon)} t). \end{aligned} \quad (79)$$

Согласно (72), (73) и (74), при $m \geq \exp(\ln^{(1-\varepsilon)} t)$

$$\left(\frac{\ln t}{\ln m} \right)^{1+2a} \leq \left(\frac{\ln t}{\ln^{(1-\varepsilon)} t} \right)^{1+2a} = (\ln^\varepsilon t)^{1+2a} = \ln^{1/3} t.$$

Поэтому из (71) следует, что

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{m \in [\exp(\ln^{(1-\varepsilon)} t), \sqrt{t}) \cap \mathbb{N}} m^{\alpha-1} u^m \exp(\Sigma) = O(1) \sum_{m \in [\exp(\ln^{(1-\varepsilon)} t), \sqrt{t}) \cap \mathbb{N}} m^{\alpha-1} L_2(t) \\ &= O(1) t^{\alpha/2} L_2(t) = o(1) t^\alpha \exp \left(z \frac{l(t)}{\ln^b t} \right), \end{aligned} \quad (80)$$

где функция

$$L_2(t) = \exp \left(\frac{zl(t)}{\ln^b t} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1+2a} \ln^{1/3} t \right)$$

медленно меняется на бесконечности. Далее, при $t \rightarrow \infty$, согласно (71),

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{m \in [\sqrt{t}, t/\ln t) \cap \mathbb{N}} m^{\alpha-1} u^m \exp(\Sigma) = O(1) \exp \left(\frac{zl(t)}{\ln^b t} \right) \sum_{m \in [0, t/\ln t) \cap \mathbb{N}} m^{\alpha-1} \\ &= o(1) t^\alpha \exp \left(\frac{zl(t)}{\ln^b t} \right). \end{aligned} \quad (81)$$

Поскольку при $m \geq t$

$$\frac{l(t)}{\ln^b t} \leq \frac{l(t)}{\ln^b m} \leq \frac{l(m)}{\ln^b m},$$

в силу (71)

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{m \in [t \ln t, \infty) \cap \mathbb{N}} m^{\alpha-1} u^m \exp(\Sigma) = O(1) \exp\left(\frac{zl(t)}{\ln^b t}\right) \sum_{m \in [t \ln t, \infty) \cap \mathbb{N}} m^{\alpha-1} u^m \\ &= \exp\left(\frac{zl(t)}{\ln^b t}\right) o(t^\alpha). \end{aligned} \quad (82)$$

Из (75), (76), (78)–(82) получаем, что при $t \rightarrow \infty$

$$I \equiv \sum_{m \geq 0} m^{\alpha-1} u^m \exp(\Sigma) \sim \exp\left(\frac{zl(t)}{\ln^b t} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1+2a}\right) \Gamma(\alpha) \lambda^{-\alpha} t^\alpha. \quad (83)$$

Из (53), (54) и (83) следует, что

$$\begin{aligned} A(u, v) &\sim \Gamma(\sigma) p(t) t \mu^{-\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} m^{\alpha-1} u^m \exp(\Sigma) \\ &\sim \Gamma(\sigma) p(t) t \mu^{-\sigma} \exp\left(\frac{zl(t)}{\ln^b t} + \frac{z^2}{2} \frac{\sigma}{1+2a}\right) \Gamma(\alpha) \lambda^{-\alpha} t^\alpha \\ &= \Gamma(\sigma) \mu^{-\sigma} \Gamma(\alpha) \lambda^{-\alpha} r(t) \end{aligned}$$

согласно (49). Соотношение (38) леммы 3 проверено. Проверим выполнение условия (39) леммы 3. Из (38) и соотношения (1.6.41) книги [48] (где доказывается эта лемма) следует, что для произвольного фиксированного $x > 0$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{a([xn], j)}{R(n)} = \frac{1}{\beta},$$

где

$$R(n) = n^{-\alpha} r(n).$$

Поскольку последний предел не зависит от $x > 0$, то в силу монотонности $a(m, j)$ по m и очевидных оценок отсюда следует, что на самом деле при $n \rightarrow \infty$ и $m \asymp n$

$$\sum_{j=0}^n \frac{a(m, j)}{R(n)} \rightarrow \frac{1}{\beta} \quad (84)$$

(в нашем случае $\beta = \sigma$). Из (84) получаем, что при $n \rightarrow \infty$ и $k = o(n)$

$$\sum_{j=0}^{n+k} \frac{a(m, j)}{R(n)} = \sum_{j=0}^{n+k} \frac{a(m, j)}{R(n+k)} \frac{R(n+k)}{R(n)} = \left(\frac{1}{\beta} + o(1)\right) (1 + o(1)) = \frac{1}{\beta} + o(1), \quad (85)$$

так как функция $R(n)$ правильно меняется на бесконечности [43]. Из (84) и (85) следует, что при $n \rightarrow \infty$ и $k = o(n)$

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} a(m, j) = o(R(n)) = o\left(\sum_{j=0}^{n+k} a(m, j)\right). \quad (86)$$

Зафиксируем натуральное m . Согласно (52),

$$F(v) \equiv \sum_{n \geq 0} a(m, n) v^n = \exp \left(f(v) + \sum_{i \in A} \left((h(i, m) - 1) \frac{v^i}{i} \right) \right), \quad (87)$$

где функция $h(i, m)$ определена равенством (51), а функция $f(v)$ определена равенством (8). Положим $a_n = a(m, n)$, $\Delta_n = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 0$, где $a_{-1} = 0$. Из (87) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n v^n = (1 - v) \exp \left(f(v) + \sum_{i \in A} \left((h(i, m) - 1) \frac{v^i}{i} \right) \right). \quad (88)$$

Продифференцировав (88) по v , получим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n v^{n-1} = -F(v) + \sum_{n \in A} v^{n-1} (1 - v) F(v) + \sum_{n \in A} v^{n-1} (h(n, m) - 1) (1 - v) F(v), \quad (89)$$

и, умножая на v обе части (89), получим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n v^n = -v F(v) + \sum_{n \in A} v^n (1 - v) F(v) + \sum_{n \in A} v^n (h(n, m) - 1) (1 - v) F(v). \quad (90)$$

Приравнявая коэффициенты при v^n в левой и правой части (90), получаем, что

$$n \Delta_n = -a_{n-1} + \sum_{i \in A(n)} \Delta_{n-i} + \sum_{i=1}^n (h(i, m) - h(i+1, m)) a_{n-i}, \quad (91)$$

и для

$$M(n) = \{j: 0 \leq j < n, n - j \in A\}$$

получаем, что

$$a_n - a_{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i \in M(n)} \Delta_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h(i, m) - h(i+1, m)) a_{n-i}. \quad (92)$$

Из (92) следует, что для каждого целого $k \geq 0$

$$\begin{aligned} a_{n+k} - a_{n-1} &= -\sum_{i=0}^k \frac{a_{n+i-1}}{n+i} + \sum_{i=0}^k \frac{1}{n+i} \sum_{j \in M(n+i)} \Delta_j \\ &\quad + \sum_{i=0}^k \frac{1}{n+i} \sum_{j=1}^{n+i} (h(j, m) - h(j+1, m)) a_{n+i-j} \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (93)$$

Полагая

$$S_n = \sum_{j=0}^n a_j,$$

получим, согласно (86), что при $n \rightarrow \infty$ и $m \asymp n$

$$J_1 = O(1) \frac{1}{n} \sum_{j=n-1}^{n+k-1} a_j = o(S_n). \quad (94)$$

Продифференцировав $h(x, m)$ по x , получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}(h(x, m)) = \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{z \ln^a x}{\ln^b m}\right) = \frac{z}{\ln^b m} h(x, m) \frac{a}{x} \ln^{(a-1)} x.$$

Поэтому для некоторого $\theta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h(j, m) - h(j+1, m) &= \frac{z}{\ln^b m} h(j + \theta, m) \frac{a}{j + \theta} \ln^{(a-1)}(j + \theta) \\ &= O\left(\frac{1}{\ln^b m}\right) \frac{\ln^{(a-1)} j}{j} \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $j \leq Ct$ для произвольного фиксированного $C > 0$. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$, $k = o(n)$ и $m \asymp n$

$$\begin{aligned} J_3 &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{n+i} \sum_{j=1}^{n+i} (h(j, m) - h(j+1, m)) a_{n+i-j} = O\left(\frac{1}{n \ln^b m}\right) \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^{n+i} \frac{\ln^{(a-1)} j}{j} a_{n+i-j} \\ &= O\left(\frac{1}{n \ln^b m}\right) \sum_{j=1}^{n+k} \frac{\ln^{(a-1)} j}{j} \sum_{i=0}^k a_{n+i-j} = O\left(\frac{S_n}{n \ln^b m}\right) \ln^a n \\ &= O\left(\frac{S_n}{n \ln^{1/2} m}\right) = o\left(\frac{S_n}{n}\right), \end{aligned} \quad (95)$$

так как $b = 1/2 + a$ и $\ln n \sim \ln m$ при $m \asymp n$. Дословно повторяя для суммы J_2 рассуждения с суммой (3.2.22) книги [48], убеждаемся в том, что

$$J_2 = o\left(\frac{S_n}{n}\right). \quad (96)$$

Из (93), (94), (95) и (96) следует (39). Условия леммы 3 проверены. Доказательство теоремы 2 завершено.

Список литературы

1. Barbour A. D., Tavaré S., A rate for the Erdős–Turán law. *Comb. Probab. Comput.* (1994) **3**, 167–176.
2. Bender E. A., Asymptotic methods in enumeration. *SIAM Rev.* (1974) **16**, 485–515.
3. Best M. R., The distribution of some variables on symmetric group. *Proc. Nederl. Akad. Wet., Ser. A* (1970) **73**, 385–402.
4. Bovey J. D., An approximate probability distribution for the order of elements of the symmetric group. *Bull. London Math. Soc.* (1980) **12**, 41–46.
5. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е., Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок. *Матем. сб.* (1976) **99**, 121–133.

6. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е., О некоторых классах случайных величин на циклах случайных подстановок. *Матем. сб.* (1979) **108**, 91–104.
7. Волинец Л. М., Число решений уравнения в симметрической группе. В сб.: *Вероятностные процессы и их приложения*. МИЭМ, Москва, 1985, с. 104–109.
8. Волинец Л. М., Число решений уравнения $x^s = e$ в симметрической группе. *Матем. заметки* (1986) **40**, 586–589.
9. Волинец Л. М., Пример нестандартной асимптотики числа подстановок с ограничениями на длины циклов. В сб.: *Вероятностные процессы и их приложения*. МИЭМ, Москва, 1989, с. 85–90.
10. Гончаров В. Л., Из области комбинаторики. *Известия АН СССР, сер. матем.* (1944) **8**, 3–48.
11. Erdős P., Turán P., On some problems of a statistical group-theory. I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* (1965) **4**, 175–186.
12. Erdős P., Turán P., On some problems of a statistical group-theory. II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (1967) **18**, 151–163.
13. Erdős P., Turán P., On some problems of a statistical group-theory. III. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (1967) **18**, 309–320.
14. Erdős P., Turán P., On some problems of a statistical group-theory. IV. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (1968) **19**, 413–435.
15. Grusho A. A., Properties of random permutations with constraints on the maximum cycle length. In: *Probabilistic methods in discrete mathematics* (Kolchin V. F. et al., eds.). TVP, Moscow, 1993, pp. 60–63.
16. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., О случайных подстановках. *Труды по дискретной математике* (2002) **5**, 73–92.
17. DeLaurentis J. M., Pittel B. G., Random permutations and Brownian motion. *Pacific J. Math.* (1985) **119**, 287–301.
18. Колчин А. В., Уравнения, содержащие неизвестную подстановку. *Дискретная математика* (1994) **12**, №1, 100–115..
19. Колчин В. Ф., Новое доказательство асимптотической логнормальности порядка случайной подстановки. В сб.: *Комбинаторный и асимптотический анализ*. Красноярский гос. унив., Красноярск, 1977, с. 82–93.
20. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
21. Колчин В. Ф., О числе циклов подстановок с ограничениями на длины циклов. *Дискретная математика* (1989) **1**, №2, 97–109.
22. Kolchin V. F., The number of permutations with cycle lengths from a fixed set. In: *Random graphs*, **2** (Frieze A. et al., eds.). Wiley, Chichester, 1992, pp. 139–149.
23. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
24. Manstavičius E., On random permutations without cycles of some lengths. *Period. Math. Hung.* (2001) **42**, 37–44.
25. Минеев М. П., Павлов А. И., О числе подстановок специального вида. *Матем. сб.* (1976) **99**, 468–476.
26. Минеев М. П., Павлов А. И., Об уравнении в подстановках. *Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР* (1976) **142**, 182–194.
27. Павлов А. И., О теореме Эрдёша и Турана. *Проблемы кибернетики* (1980) **64**, 57–66.
28. Павлов А. И., О предельном распределении числа циклов и логарифма порядка одного класса подстановок. *Матем. сб.* (1981) **114** (156), 611–642.

29. Павлов А. И., О числе циклов и цикловой структуре подстановок некоторых классов. *Матем. сб.* (1984) **124**, 536–556.
30. Павлов А. И., О некоторых классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. *Матем. сб.* (1986) **129**, 252–263.
31. Павлов А. И., О подстановках с длинами циклов из заданного множества. *Теория вероятностей и ее применения* (1986) **31**, 618–619.
32. Павлов А. И., О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества. *Дискретная математика* (1991) **3**, №3, 109–123.
33. Павлов А. И., Асимптотика числа подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. *Докл. РАН* (1994) **335**, 556–559.
34. Павлов А. И., О теореме Эрдёша–Турана о логарифме порядка случайной подстановки. *Докл. РАН* (1996) **350**, 170–173.
35. Павлов А. И., О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. *Матем. заметки* (1997) **62**, 881–891.
36. Постников А. Г., *Введение в аналитическую теорию чисел*. Наука, Москва, 1971.
37. Сачков В. Н., Отображения конечного множества с ограничениями на контур и высоту. *Теория вероятностей и ее применения* (1972) **17**, 679–694.
38. Сачков В. Н., Случайные отображения ограниченной высоты. *Теория вероятностей и ее применения* (1973) **18**, 122–132.
39. Сачков В. Н., *Комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1977.
40. Сачков В. Н., Асимптотические формулы и предельные распределения для комбинаторных конфигураций, порождаемых многочленами. *Дискретная математика* (2007) **19**, №3, 3–14.
41. Сачков В. Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.
42. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. МЦНМО, Москва, 2004.
43. Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*. Наука, Москва, 1985.
44. Тимашёв А. Н., Предельные теоремы в схемах размещений частиц по различным ячейкам с ограничениями на заполнения ячеек. *Теория вероятностей и ее применения* (2004) **49**, 712–725.
45. Тимашёв А. Н., Случайные подстановки с длинами циклов из заданного конечного множества. *Дискретная математика* (2008) **20**, №1, 25–37.
46. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, 2. Мир, Москва, 1984.
47. Якимив А. Л., Распределение длины m -го максимального цикла случайной A -подстановки. *Дискретная математика* (2005) **17**, №4, 40–58.
48. Якимив А. Л., *Вероятностные приложения тауберовых теорем*. Физматлит, Москва, 2005.
49. Якимив А. Л., Предельная теорема для общего числа циклов случайной A -подстановки. *Теория вероятностей и ее применения* (2007) **52**, 69–83.
50. Якимив А. Л., Случайные A -подстановки: сходимость к пуассоновскому процессу. *Матем. заметки* (2007) **81**, 939–947.
51. Якимив А. Л., Предельная теорема для средних членов вариационного ряда длин циклов случайной A -подстановки. *Теория вероятностей и ее применения* (2009) **54**, 63–79.
52. Захаровас В., Распределение логарифма порядка случайной подстановки. *Liet. Mat. Rink.* (2004) **44**, 372–406.