Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Кузьмин, О. В. Леонова, C -полиномы Тушара и им квазиортогональные, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 2, 153–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:07:21

C -полиномы Тушара и им квазиортогональные

© 2005 г. О. В. Кузьмин, О. В. Леонова

Рассматриваются C -полиномы Тушара, тесно связанные с цикловыми индикаторами симметрических групп, и вводятся новые, так называемые M -полиномы. Показано, что C - и M -полиномы составляют в совокупности квазиортогональную систему. Для изучаемых полиномов разбиений установлен ряд рекуррентных соотношений.

1. Введение

Понятие полинома разбиений, полинома, построенного по всем разбиениям его индекса, введено Беллом [1]. В связи с изучением некоторых циклических подстановок Тушар в [2] ввел ряд обобщений полиномов Белла. Для одного из таких обобщений $C_{n,k}(x, y)$, названного в [8] C -полиномами Тушара, в [3] получен ряд соотношений, которые использованы при нахождении некоторых вероятностей в задаче о случайных блужданиях.

В [4, 5] авторами данной публикации изучаются C -полиномы Тушара, при этом найдены некоторые свойства, перечислительные интерпретации и вероятностные приложения. В данной статье вводятся новые, так называемые M -полиномы, составляющие с C -полиномами Тушара квазиортогональную систему. Для M -полиномов $M_{n,k}(x, y)$ получено явное выражение и рекуррентные соотношения.

Во втором параграфе статьи приводятся необходимые определения и свойства цикловых индикаторов симметрических групп.

В третьем параграфе приводятся необходимые определения и свойства C -полиномов Тушара и M -полиномов.

В четвертом параграфе для C - и M -полиномов получены новые рекуррентные соотношения.

В пятом параграфе показано, что C - и M -полиномы составляют в совокупности квазиортогональную систему.

2. Цикловые индикаторы симметрической группы

Один из наиболее известных полиномов разбиений, цикловой индикатор симметрической группы $C_n(t) = C_n(t_1, \dots, t_n)$, имеет следующий явный вид (см., например, с. 83 в [6]):

$$C_n(t) = n! \sum_n \prod_{i=1}^n t_i^{k_i} [k_i! i^{k_i}]^{-1}, \quad (1)$$

где $t = (t_1, \dots, t_n)$ — формальные переменные, а суммирование ведется по всем разбиениям натурального n , то есть по всем таким наборам $(k_1, \dots, k_n)$ целых неотрицательных чисел, что

$$\sum_{i=1}^n i k_i = n.$$

Дополнительно полагают $C_0(t) = 1$.

Экспоненциальная производящая функция полиномов $C_n(t)$ имеет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \frac{u^n}{n!} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{u^n}{n} \right\}. \quad (2)$$

Цикловые индикаторы симметрической группы удовлетворяют ряду рекуррентных соотношений. Приведем два из них (см., например, с. 85 в [6]):

$$C_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^n (n)_k t_{k+1} C_{n-k}(t), \quad (3)$$

$$r \frac{\partial}{\partial t_r} C_n(t) = (n)_r C_{n-r}(t). \quad (4)$$

Известна следующая перечислительная интерпретация полиномов $C_n(t)$: $C_n(t)$ есть сумма весов всех подстановок степени n , содержащих k циклов, при условии, что вес цикла длины j равен $(j-1)! t_j$, а вес подстановки — произведению весов составляющих ее циклов.

3. C -полиномы Тушара и M -полиномы

3.1. C -полиномы Тушара

В [3] при помощи соотношения

$$C_{n,k}(x, y) = \binom{n}{k} C_k(x) C_{n-k}(y), \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \geq 1, \quad (5)$$

введены полиномы

$$C_{n,k}(x, y) = C_{n,k}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_{n-k}),$$

которые в [8] названы C -полиномами Тушара.

В [5] получен явный вид C -полиномов:

$$C_{n,k}(x, y) = n! \sum \prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i} (r_i! s_i! i^{r_i+s_i})^{-1}, \quad (6)$$

где суммирование ведется по всем таким наборам $(r_1, r_2, \dots; s_1, s_2, \dots)$ целых неотрицательных чисел, что

$$\sum_{i=1}^n i r_i = k, \quad \sum_{i=1}^n i s_i = n - k.$$

Из соотношений (3) и (4) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial y_i} C_{n,k}(x, y) = \binom{n}{i} (i-1)! C_{n-i,k}(x, y). \quad (7)$$

Аналогично из соотношений (3) и (5) следует, что

$$C_{n,k}(x, y) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{n!}{(n-i-1)!} y_{i+1} C_{n-i-1,k}(x, y). \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) получены в [5].

3.2. М-полиномы

Введем новый класс полиномов разбиений, тесно связанных с цикловыми индикаторами симметрической группы и С-полиномами Тушара.

Полином

$$M_{n,k}(x, y) = M_{n,k}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{n-k})$$

определим соотношением

$$M_{n,k}(x, y) = \binom{n}{k} \frac{C_{n-k}(-y)}{C_n(x)}. \quad (9)$$

Такие полиномы будем называть М-полиномами.

Непосредственно из формул (9) и (1) следует явный вид М-полиномов:

$$M_{n,k}(x, y) = (k!)^{-1} \left(\sum_n \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} [k_i! i^{k_i}]^{-1} \right)^{-1} \sum_{n-k} \prod_{i=1}^{n-k} (-y_i)^{k_i} [k_i! i^{k_i}]^{-1}. \quad (10)$$

4. Рекуррентные соотношения

М-полиномы удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению.

Теорема 1. Для натуральных чисел i, k и $n, k \leq n$, справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial y_i} M_{n,k}(x, y) = -\binom{k+i}{i} (i-1)! M_{n,k+i}(x, y). \quad (11)$$

Доказательство. Из формулы (4) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial y_i} C_n(y) = \frac{1}{i} (n)_i C_{n-i}(y). \quad (12)$$

Продифференцировав соотношение (9) по y_i , с учетом (12) получим, что

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y_i} M_{n,k}(x, y) &= \binom{n}{k} [C_n(x)]^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} C_{n-k}(-y) \\
 &= -\binom{n}{k} [C_n(x)]^{-1} \frac{1}{i} (n-k)_i C_{n-k-i}(-y) \\
 &= -[C_n(x)]^{-1} \frac{n! (n-k)!}{k! (n-k)! (n-k-i)! i} C_{n-k-i}(-y) \\
 &= -[C_n(x)]^{-1} \frac{n! (k+i)! (i-1)!}{(k+i)! i (n-k-i)! (i-1)! k!} C_{n-k-i}(-y) \\
 &= -\frac{(k+i)!}{k! i!} [C_n(x)]^{-1} \frac{n! (i-1)!}{(k+i)! (n-k-i)!} C_{n-k-i}(-y) \\
 &= -\binom{k+i}{i} \binom{n}{n-k-i} (i-1)! [C_n(x)]^{-1} C_{n-k-i}(-y) \\
 &= -\binom{k+i}{i} (i-1)! M_{n,k+i}(x, y).
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Для M -полиномов справедливы соотношения

$$M_{n,k}(x, y) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{(k+i+1)!}{k!} (-y_{i+1}) M_{n,k+i+1}(x, y). \quad (13)$$

Доказательство. Подставив соотношение (3) в правую часть равенства (9), получим, что

$$\begin{aligned}
 M_{n,k}(x, y) &= \binom{n}{k} (C_n(x))^{-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} (n-k-1)_i (-y_{i+1}) C_{n-k-i-1}(-y) \\
 &= (C_n(x))^{-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{(n-k-1)!}{(n-k-i-1)!} (-y_{i+1}) C_{n-k-i-1}(-y) \\
 &= (C_n(x))^{-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{(n-k-1)!}{(n-k-i-1)!} \\
 &\quad \times \frac{(k+i+1)!}{(k+i+1)!} (-y_{i+1}) C_{n-k-i-1}(-y) \\
 &= (C_n(x))^{-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{n}{k+i+1} \frac{(k+i+1)!}{k! (n-k)} (-y_{i+1}) C_{n-k-i-1}(-y) \\
 &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{(k+i+1)!}{k!} (-y_{i+1}) M_{n,k+i+1}(x, y).
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть

$$\bar{D}_y = \sum_{i=1}^{n-k-1} i y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Теорема 3. Для натуральных k и n , $k \leq n$, справедливы соотношения

$$M_{n,k}(x, y) = \frac{k+1}{n-k} (\bar{D}_y M_{n,k+1}(x, y) - y_1 M_{n,k+1}(x, y)). \quad (14)$$

Доказательство. Из соотношения (13) с учетом формулы (11) получаем, что

$$\begin{aligned} M_{n,k}(x, y) &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{(k+i+1)!}{k!} (-y_{i+1}) M_{n,k+i+1}(x, y) \\ &= \frac{1}{n-k} \left(\sum_{i=1}^{n-k-1} (-y_{i+1}) \frac{(k+i+1)!}{k!} M_{n,k+i+1}(x, y) - (k+1) y_1 M_{n,k+1}(x, y) \right) \\ &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k-1} (-y_{i+1}) \frac{(k+i+1)!}{k!} \frac{i!(k+1)!}{(k+i+1)!(i-1)!} \frac{\partial}{\partial y_i} M_{n,k+1}(x, y) \\ &\quad - \frac{k+1}{n-k} y_1 M_{n,k+1}(x, y) \\ &= \frac{k+1}{n-k} \left(\sum_{i=1}^{n-k-1} i y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} M_{n,k+1}(x, y) - y_1 M_{n,k+1}(x, y) \right) \\ &= \frac{k+1}{n-k} (\bar{D}_y M_{n,k+1}(x, y) - y_1 M_{n,k+1}(x, y)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеет место и для C -полиномов.

Теорема 4. Для натуральных k и n , $k \leq n$, справедливы соотношения

$$C_{n,k}(x, y) = \frac{n}{n-k} (\bar{D}_y C_{n-1,k}(x, y) + y_1 C_{n-1,k}(x, y)). \quad (15)$$

Доказательство. Из соотношения (8) с учетом формулы (7) получаем, что

$$\begin{aligned} C_{n,k}(x, y) &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{n!}{(n-i-1)!} y_{i+1} C_{n-i-1,k}(x, y) \\ &= \frac{1}{n-k} \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{n!}{(n-i-1)!} y_{i+1} C_{n-i-1,k}(x, y) + n y_1 C_{n-1,k}(x, y) \right) \\ &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k-1} (-y_{i+1}) \frac{n!}{(n-i-1)!} \frac{i!(n-i-1)!}{(n-1)!(i-1)!} \frac{\partial}{\partial y_i} C_{n-1,k}(x, y) \\ &\quad - \frac{n}{n-k} y_1 C_{n-1,k}(x, y) \\ &= \frac{n}{n-k} \left(\sum_{i=1}^{n-k-1} i y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} C_{n-1,k}(x, y) - y_1 C_{n-1,k}(x, y) \right) \\ &= \frac{n}{n-k} (\bar{D}_y C_{n-1,k}(x, y) - y_1 C_{n-1,k}(x, y)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

5. Квазиортогональность

Теорема 5. Для натуральных чисел k и n справедливы соотношения

$$\sum_{i=k}^n C_{n,i}(x, y) M_{i,k}(x, y) = \delta_{n,k},$$

$$\sum_{i=k}^n M_{n,i}(x, y) C_{i,k}(x, y) = \delta_{n,k},$$

где $\delta_{n,k}$ — символ Кронекера.

Доказательство. Из свойств производящего определителя [7] следует, что M -полиномы составляют с C -полиномами Тушара квазиортогональную систему, если имеет место равенство

$$M_{n,k}(x, y) = (-1)^{n-k} \left(\prod_{i=k}^n C_{ii} \right)^{-1} \times \begin{vmatrix} C_{k+1,k} & C_{k+1,k+1} & 0 & \dots & 0 \\ C_{k+2,k} & C_{k+2,k+1} & C_{k+2,k+2} & \dots & 0 \\ C_{k+3,k} & C_{k+3,k+1} & C_{k+3,k+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n,k} & C_{n,k+1} & C_{n,k+2} & \dots & C_{n,n-1} \end{vmatrix}, \quad (16)$$

где $C_{n,k} = C_{n,k}(x, y)$.

Опираясь на определяющее соотношение (9), формулу (3) и свойства определителей, находим, что правая часть этого равенства может быть представлена в виде

$$M_{n,k}(x, y) = (-1)^{n-k} \left(\prod_{i=k}^n C_i(x) \right)^{-1} \begin{vmatrix} A_{k+1}(x, y) \\ A_{k+2}(x, y) \\ A_{k+3}(x, y) \\ \dots \\ A_n(x, y) \end{vmatrix},$$

где при $m = 1, \dots, n - k - 1$

$$A_{k+m}(x, y) = \left(\binom{k+m}{k} C_k(x) C_m(y), \binom{k+m}{k+1} C_{k+1}(x) C_{m-1}(y), \dots, \right. \\ \left. \binom{k+m}{k+m} C_{k+m}(x) C_0(y), 0, \dots, 0 \right),$$

а при $m = n - k$

$$A_n(x, y) = \left(\binom{n}{k} C_k(x) C_{n-k}(y), \binom{n}{k+1} C_{k+1}(x) C_{n-k-1}(y), \dots, \right. \\ \left. \binom{n}{n-1} C_{n-1}(x) C_1(y) \right).$$

Продолжая преобразования, получаем, что правая часть равна

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{n-k} (C_n(x))^{-1} \begin{vmatrix} \binom{k+1}{k} C_1(y) & \binom{k+1}{k+1} C_0(y) & 0 & \dots & 0 \\ \binom{k+2}{k} C_2(y) & \binom{k+2}{k+1} C_1(y) & \binom{k+2}{k+2} C_0(y) & \dots & 0 \\ \binom{k+3}{k} C_3(y) & \binom{k+3}{k+1} C_2(y) & \binom{k+3}{k+2} C_1(y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n}{k} C_{n-k}(y) & \binom{n}{k+1} C_{n-k-1}(y) & \binom{n}{k+2} C_{n-k-2}(y) & \dots & \binom{n}{n-1} C_1(y) \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n-k} (C_n(x))^{-1} \begin{vmatrix} \frac{(k+1)!}{k!1!} C_1(y) & \frac{(k+1)!}{(k+1)!0!} C_0(y) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(k+2)!}{k!2!} C_2(y) & \frac{(k+2)!}{(k+1)!1!} C_1(y) & \frac{(k+2)!}{(k+2)!0!} C_0(y) & \dots & 0 \\ \frac{(k+3)!}{k!3!} C_3(y) & \frac{(k+3)!}{(k+1)!2!} C_2(y) & \frac{(k+3)!}{(k+2)!1!} C_1(y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n! C_{n-k}(y)}{k!(n-k)!} & \frac{n! C_{n-k-1}(y)}{(k+1)!(n-k-1)!} & \frac{n! C_{n-k-2}(y)}{(k+2)!(n-k-2)!} & \dots & \frac{n! C_1(y)}{(n-1)!1!} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n-k} (C_n(x))^{-1} \frac{n!}{k!} \begin{vmatrix} \frac{C_1(y)}{1!} & \frac{C_0(y)}{0!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{C_2(y)}{2!} & \frac{C_1(y)}{1!} & \frac{C_0(y)}{0!} & \dots & 0 \\ \frac{C_3(y)}{3!} & \frac{C_2(y)}{2!} & \frac{C_1(y)}{1!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{C_{n-k}(y)}{(n-k)!} & \frac{C_{n-k-1}(y)}{(n-k-1)!} & \frac{C_{n-k-2}(y)}{(n-k-2)!} & \dots & \frac{C_1(y)}{1!} \end{vmatrix} \\
 &= (C_n(x))^{-1} \frac{n!}{k!} \frac{C_{n-k}(-y)}{(n-k)!} = \binom{n}{k} (C_n(x))^{-1} C_{n-k}(-y) = M_{n,k}(x, y).
 \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (16) верно. Теорема доказана.

Содержание теоремы 5 эквивалентно утверждению, что бесконечные нижние треугольные матрицы $\|C_{n,k}(x, y)\|$ и $\|M_{n,k}(x, y)\|$ — двусторонние взаимно обратные.

Список литературы

1. Bell E. T., Partition polynomials. *Ann. Math.* (1927) **29**, 38–46.
2. Touchard J., Sur les cycles des substitutions. *Acta Math.* (1939) **70**, 243–279.
3. Charalambides C. A., Chrysaphinou O., Partition polynomials in fluctuation theory. *Math. Nachr.* (1982) **106**, 89–100.
4. Кузьмин О. В., Леонова О. В., Полиномы Тушара и их приложения. *Дискретная математика* (2000) **12**, №3, 60–71.
5. Кузьмин О. В., Леонова О. В., О полиномах разбиений. *Дискретная математика* (2001) **13**, №2, 144–158.
6. Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ. ИЛ, Москва, 1963.
7. Жуков В. Д., Производящий определитель. В кн.: *Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа*. Красноярский ун-т, Красноярск, 1976, с. 47–58.
8. Кузьмин О. В., *Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения*. Наука, Новосибирск, 2000.
9. Кузьмин О. В., Леонова О. В., Об асимптотической сопряженности полиномов Тушара. *Дискретная математика* (2002) **14**, №1, 151–157.

Статья поступила 23.02.2005.