Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Пирзада, Т. А. Чишти, Т. А. Наику, Последовательности очков в $[h-k]$ -двудольных гипертурнирах, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 1, 150–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1090>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 10:08:14

Последовательности очков в $[h-k]$ -двудольных гипертурнирах

© 2010 г. Ш. Пирзада, Т. А. Чишти, Т. А. Наику

Пусть m, n, h и k — целые числа, $m \geq h > 1$ и $n \geq k > 1$. Рассматривается $[h-k]$ -двудольный гипертурнир на $m + n$ вершинах, определяемый как тройка (U, V, E) , состоящая из двух множеств вершин U и V , $|U| = m$, $|V| = n$, и множества дуг E , а также из $(h + k)$ -наборов вершин с h вершинами из U и k вершинами из V , называемыми дугами, такими, что для любого h -подмножества U_1 множества U и k -подмножества V_1 множества V множество E содержит ровно один $(k + h)$ -набор из $(h + k)!$ наборов, h вершин которых принадлежат U_1 и k вершин принадлежат V_1 . В статье приведены необходимые и достаточные условия того, что пара неубывающих последовательностей неотрицательных целых чисел является парой последовательностей очков (за победы и поражения) в некотором $[h-k]$ -двудольном турнире.

1. Введение

Гиперграфы являются обобщением графов [3]. В то время как ребрами графов являются пары вершин графа, ребра гиперграфа — это подмножества вершин, состоящие по меньшей мере из двух вершин. Ребро, состоящее из k вершин, называется k -ребром, а k -гиперграф — это гиперграф, все ребра которого являются k -ребрами, k -гипертурнир — это полный k -гиперграф, каждое ребро которого обладает ориентацией, то есть вершины каждого ребра линейно упорядочены. Вместо очков вершин в турнире, в k -гипертурнире [7] рассматриваются очки за победы и очки за проигрыши вершин и в [6] доказывается результат, аналогичный теореме Ландау. Число очков за победу $s(v_i)$ или s_i вершины v_i — это число дуг, содержащих v_i , в которых v_i не является последним элементом. Число очков за поражение $r(v_i)$ или r_i вершины v_i — это число дуг, содержащих v_i , в которых вершина v_i является последним элементом. Последовательности очков за победу и за поражение формируются путем расположения соответствующих очков в неубывающем порядке.

Напомним, что для двух целых неотрицательных чисел p и q число сочетаний из p по q есть

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!}$$

при $\geq q$ и равно нулю при $p < q$.

Следующая характеристизация последовательностей побед и последовательностей поражений поражений в k -гипертурнирах приведена в [7].

Теорема 1. Пусть даны целые числа n и k такие, что $n \geq k > 1$. Неубывающая последовательность $R = [r_1, \dots, r_n]$ неотрицательных целых чисел является последовательностью очков за поражения в некотором k -гипертурнире тогда и только тогда, когда для любого j выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^j r_i \geq \binom{j}{k}$$

с равенством при $j = n$.

Теорема 2. Пусть даны целые числа n и k такие, что $n \geq k > 1$. Неубывающая последовательность $R = [s_1, \dots, s_n]$ неотрицательных целых чисел является последовательностью очков за победы некоторого k -гипертурнира тогда и только тогда, когда для любого j выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^j s_i \geq \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-j}{k} - \binom{n}{k}$$

с равенством при $j = n$.

В [1] доказана теорема Ландау с использованием теоремы Холла о системе различных представителей системы множеств. С использованием идей этой статьи в [5] приведено другое доказательство теорем 1 и 2.

Ряд других результатов об очках в k -гипертурнирах содержится в [4].

Двудольные гиперграфы являются обобщением двудольных графов. Если $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ и $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ — множества вершин долей двудольного гиперграфа, то ребро двудольного графа есть подмножество множества вершин, содержащее по меньшей мере по одной вершине множеств U и V . Если ребро содержит точно h вершин из U и точно k вершин из v , то оно называется $[h-k]$ -ребром. Если все ребра двудольного гиперграфа являются $[h-k]$ -ребрами, то такой гиперграф называется $[h-k]$ -двудольным гиперграфом. Полный $[h-k]$ -двудольный гиперграф, в котором каждое $[h-k]$ -ребро снабжено ориентировкой, то есть линейный порядок задан для вершин гиперребра, называется $[h-k]$ -двудольным гипертурниром.

Эквивалентным является следующее определение. Для заданных целых чисел m , n , h и k таких, что $m \geq h > 1$ и $n \geq k > 1$, $[h-k]$ -двудольный гипертурнир порядка $m \times n$ состоит из множеств вершин U и V таких, что $|U| = m$ и $|V| = n$, и множества дуг E , то есть множества $(h+k)$ -наборов вершин с h вершинами из U и k вершин из V , называемых дугами, такими, что для любого h -подмножества множества U и k -подмножества множества V множество E содержит ровно один $(h+k)$ -набор из $(h+k)!$ возможных наборов, у которых ровно h элементов принадлежат U_1 и ровно k элементов принадлежат V_1 . Пусть $e = (u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_k)$ — дуга из H и $i < j$; введем обозначение $e(u_i, u_j) = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, v_1, \dots, v_k)$, то есть новая дуга получена из e перестановкой u_i и u_j в e . Аналогично можно получить новую дугу вида $e(v_i, v_j)$ и $e(u_i, v_j)$.

Для данной вершины $u_i \in U$ число очков за победу $d_H^+(u_i)$ (или просто $d_+(u_i)$) есть число $[h-k]$ -дуг, содержащих u_i не на последнем месте. Число очков за поражения $d_H^-(u_i)$ (или просто $d^-(u_i)$) есть число $[h-k]$ -дуг, содержащих u_i на последнем месте. Аналогично $d_H^+(v_j)$ и $d_H^-(v_j)$ суть соответственно число побед и число поражений соответственно в вершине v_j . Списки очков за поражения в $[h-k]$ -двудольном гипертурнире — это пара

неубывающих последовательностей неотрицательных целых чисел $A = [a_1, \dots, a_m]$ и $B = [b_1, \dots, b_n]$, где a_i — число поражений вершины $u_i \in U$ и $b_j \in V$ — число поражений вершины v_j . Аналогично, списки очков за победы образуются перечислением чисел выигрышей в порядке неубывания, мы обозначаем эти списки $C = [c_1, \dots, c_m]$ и $D = [d_1, \dots, d_n]$.

2. Основные результаты

Следующие две теоремы являются основными результатами статьи и характеризуют списки очков за поражения и списки очков за победы в $[h-k]$ -двудольных гипертурнирах.

Теорема 3. Пусть заданы целые числа m, n, h и k такие, что $m \geq h > 1$ и $n \geq k > 1$. Неубывающие последовательности $A = [a_i]_1^m$ и $B = [b_j]_1^n$ неотрицательных целых чисел являются списками очков за поражения тогда и только тогда, когда для любых p и q

$$\sum_{i=1}^p a_i + \sum_{j=1}^q b_j \geq \binom{p}{h} \binom{q}{k}, \quad (1)$$

при равенстве для $p = m$ и $q = n$.

Теорема 4. Пусть заданы целые числа m, n, h и k такие, что $m \geq h > 1$ и $n \geq k > 1$. Неубывающие последовательности $C = [c_i]_1^m$ и $D = [d_j]_1^n$ неотрицательных целых чисел являются списками очков за победы тогда и только тогда, когда для любых p и q

$$\sum_{i=1}^p c_i + \sum_{j=1}^q d_j \geq \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k} + q \binom{m}{h} \binom{n-1}{k-1} \binom{m-p}{h} \binom{n-q}{k} \binom{m}{h} \binom{n}{k} \quad (2)$$

при равенстве для $p = m$ и $q = n$.

Для доказательства этих теорем нам потребуются следующие три леммы. Заметим, что в $[h-k]$ -двудольном гипертурнире H имеется точно $\binom{m}{h} \binom{n}{k}$ дуг и в каждой дуге только одна вершина находится на последнем месте. Поэтому

$$\sum_{i=1}^m d_H^-(u_i) + \sum_{j=1}^n d_H^-(v_j) = \binom{m}{h} \binom{n}{k}.$$

Лемма 1. Если H — $[h-k]$ -двудольный гипертурнир порядка $m \times n$ и списками побед $A = [c_i]_1^m$ и $B = [d_j]_1^n$, то

$$\sum_{i=1}^m c_i + \sum_{j=1}^n d_j = (h+k-1) \binom{m}{h} \binom{n}{k}.$$

Доказательство. Ясно, что $m \geq h$ и $n \geq k$. Если a_i — очко за поражение при $u_i \in U$ и b_j — очко за поражение при $v_j \in V$, то

$$\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j = \binom{m}{h} \binom{n}{k}.$$

Имеется $\binom{m-1}{h-1}\binom{n}{k}$ дуг, содержащих вершину $u_i \in U$, и $\binom{m}{h}\binom{n-1}{k-1}$ дуг, содержащих вершину $v_j \in V$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p c_i + \sum_{j=1}^q d_j &= \sum_{i=1}^m \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k} + \sum_{j=1}^n \binom{m}{h} \binom{n-1}{k-1} - \binom{m}{h} \binom{n}{k} \\ &= m \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k} + n \binom{m}{h} \binom{n-1}{k-1} - \binom{m}{h} \binom{n}{k} \\ &= (h+k-1) \binom{m}{h} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Лемма 2. Если $A = [a_1, \dots, a_m]$ и $B = [b_1, \dots, b_n]$ — списки поражений в $[k-h]$ -двудольном гипертурнире H and $a_i < a_j$, то

$$H' = [a_1, \dots, a_{i+1}, 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_m]$$

и B — списки очков за поражения в некотором $[h-k]$ -двудольном гипертурнире H .

Доказательство. Пусть A и B — список очков за поражения $[k-h]$ -двудольного гипертурнира H с множествами вершин $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ и $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, так что $d^-(u_i) = a_i$ и $d^-(v_j) = b_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Если существует $[k-h]$ -дуга e , содержащая обе вершины u_i и u_j , причем u_j — последний элемент в e , то положим $e' = (u_i, u_j)$ и $H' = (H - e) \cup e'$. Ясно, что A' и B являются списками очков за поражения H' .

Лемма 3. Пусть $A = [a_1, \dots, a_m]$ и $B = [b_1, \dots, b_n]$ — неубывающие последовательности неотрицательных целых чисел, удовлетворяющие условию (1). Если

$$a_m < \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k},$$

то существует такое r , $1 \leq r \leq m-1$, что $A' = [a_1, \dots, a_r - 1, \dots, a_m + 1]$ не убывает и A' и B удовлетворяют (1).

Доказательство. Пусть r — максимальное целое число такое, что

$$a_{r-1} < a_r = a_{r+1} = \dots = a_{m-1}$$

и $a_0 = 0$, если $r = 1$.

Для того, чтобы доказать, что A' и B удовлетворяют (1), нужно доказать, что для любого p , $r \leq p \leq m-1$,

$$\sum_{i=1}^p a_i + \sum_{j=1}^q b_j > \binom{p}{h} \binom{q}{k}. \quad (3)$$

Так как

$$a_m < \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k},$$

легко видеть, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{j=1}^n b_j &= \binom{m}{h} \binom{n}{k} - a_m > \binom{m}{h} \binom{n}{k} \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k} \\ &= \left(\binom{m}{h} - \binom{m-1}{h-1} \right) \binom{n}{k} \\ &= \binom{m-1}{h} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что (3) справедливо при $r = m - 1$.

Предположим, что $f \leq m - 2$, тогда (3) справедливо при $p = m - 1$.

Если существует p_0 , $r \leq p_0 \leq m - 2$, такое, что

$$\sum_{i=1}^{p_0} a_i + \sum_{j=1}^q b_j = \binom{p_0}{h} \binom{q}{k}.$$

то положим p_0 , равным его наибольшему возможному значению. Так как

$$\sum_{i=1}^{p_0+1} a_i + \sum_{j=1}^q b_j > \binom{p_0+1}{h} \binom{q}{k},$$

находим, что

$$\begin{aligned} a_{p_0} &= a_{p_0+1} = \left(\sum_{i=1}^{p_0+1} a_i + \sum_{j=1}^q b_j \right) \left(\sum_{i=1}^{p_0} a_i + \sum_{j=1}^q b_j \right) \\ &> \binom{p_0+1}{h} \binom{q}{k} \binom{p_0}{h} \binom{q}{k} = \binom{p_0}{h-1} \binom{q}{k}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p_0-1} a_i + \sum_{j=1}^q b_j &= \sum_{i=1}^{p_0} a_i + \sum_{j=1}^q b_j - a_{p_0} < \binom{p_0}{h} \binom{q}{k} - \binom{p_0}{h-1} \binom{q}{k} \\ &< \left(\binom{p_0-1}{h} + \binom{p_0-1}{h-1} \right) \binom{q}{k} \binom{q}{k} \binom{p_0}{h-1} \binom{q}{k} \\ &< \left(\binom{p_0-1}{h} + \binom{p_0-1}{h-2} \right) \binom{q}{k} < \binom{p_0-1}{h} \binom{q}{k}, \end{aligned}$$

что противоречит гипотезе о множествах A и B . Отсюда следует справедливость неравенства (3).

Доказательство теоремы 3. Докажем необходимость. Пусть A и B — списки очков за поражения в $[h-k]$ -двуольном гипертурнире $H(U, V)$. Для любых p и q при $h \leq p \leq m$ и $k \leq q \leq n$ пусть $U_1 = \{u_1, \dots, u_p\}$ и $V_1 = \{v_1, \dots, v_q\}$ — множества вершин таких, что $d^-(u_i) = a_i$ для любого i , $1 \leq i \leq p$ и $d^-(v_j) = b_j$ для любого j , $1 \leq j \leq q$. Пусть H_1 — $[h-k]$ -двуольный подгипертурнир, образованный U_1 и V_1 . Тогда

$$\sum_{i=1}^p a_i + \sum_{j=1}^q b_j \geq \sum_{i=1}^p d_{H_1}^-(u_i) + \sum_{j=1}^q d_{H_1}^-(v_j) = \binom{p}{h} \binom{q}{k}.$$

Докажем достаточность. Проведем индукцию по m при фиксированном n . При $m = h$ результат очевиден. Пусть $m > h$ и аналогично $n > k$. Тогда

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{j=1}^n b_j \right) \\ &\geq \binom{m}{h} \binom{n}{k} - \binom{m-1}{h} \binom{n}{k} = \left(\binom{m}{h} - \binom{m-1}{h} \right) \binom{n}{k} = \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие два случая.

В первом случае

$$a_m = \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{j=1}^n b_j &= \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - a_m = \binom{m}{h} \binom{n}{k} - \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k} \\ &= \left(\binom{m}{h} - \binom{m-1}{h-1} \right) \binom{n}{k} = \binom{m-1}{h} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

По предположению индукции $[a_1, \dots, a_{m-1}]$ и B являются списками очков за поражения в $[h-k]$ -двудольном гипертурнире $H^/(U^/, V)$ порядка $(m-1) \times n$. Построим теперь $[h-k]$ -двудольный гипертурнир H порядка $m \times n$ следующим образом. В $H^/$ пусть $U^/ = \{u_1, \dots, u_{m-1}\}$ и $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Добавим новую вершину u_m , для каждого $(h+k)$ -набора, содержащего u_m , поставим u_m на последнее место. Обозначим E_1 множество всех $\binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k}$ этих $(h+k)$ -наборов. Пусть $E(H) = E(H^/) \cup E_1$. Ясно, что A и B являются списками очков за поражения гипертурнира H .

Во втором случае

$$a_m < \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k}.$$

Применим последовательно лемму 3 к A , оставляя B неизменным до тех пор пока не получим новый неубывающий список $A' = [a'_1, \dots, a'_m]$, в котором теперь

$$a'_m = \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k}.$$

Как и в предыдущем случае, A' и B являются списками очков за поражения в $[h-k]$ -двудольном гипертурнире. Теперь будем применять последовательно лемму 2 к A' и B до тех пор, пока не получим начальную пару неубывающих списков A и B . Тогда согласно лемме 2 A и B являются списками очков за поражения в $[h-k]$ -двудольном гипертурнире.

Замечание 1. Если $h = 1, k = 1$, то мы находимся в условиях, определяющих последовательности списков в двудольном турнире, и согласно теореме 3 справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^p a_i + \sum_{j=1}^q b_j \geq \binom{p}{1} \binom{q}{1} = pq,$$

что дает характеризацию списков очков, предложенную в статье [2].

Доказательство теоремы 4. Пусть $[c_1, \dots, c_m]$ и $[d_1, \dots, d_n]$ — списки очков за победы в $[h-k]$ -двудольном гипертурнире $H(U, V)$, где $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ и $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $d_H^+(u_i) = c_i$, $i = 1, \dots, m$, $d_H^+(v_j) = d_j$, $j = 1, \dots, n$. Ясно, что

$$d_H^+(v_j) + d_H^-(v_j) = \binom{m}{h} \binom{n}{k},$$

$$d_H^+(u_i) + d_H^-(v_j) = \binom{m}{h} \binom{n-1}{k}.$$

Пусть $a_{m+1-i} = d^-(u_i)$ и $b_{n+1-j} = d^-(v_j)$. Тогда $[a_1, \dots, a_m]$, $[b_1, \dots, b_n]$ — списки очков за поражения в H . Обратно, если $[a_1, \dots, a_m]$ и $[b_1, \dots, b_n]$ — списки очков за поражения в H , то $[c_1, \dots, c_m]$ и $[d_1, \dots, d_n]$ — списки очков за победы в H . Поэтому достаточно показать, что условия (1) и (2) эквивалентны, если

$$c_i + a_{m+1-i} = \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k}, \quad d_j + b_{n+1-j} = \binom{m}{h} \binom{n-1}{k}$$

Предположим вначале, что выполняется (2). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p a_i + \sum_{j=1}^q b_j &= \sum_{i=1}^p \left(\binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k} - c_{m+1-i} \right) + \sum_{j=1}^q \left(\binom{m}{h} \binom{n-1}{k-1} - d_{n+1-j} \right) \\ &= p \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k} + q \binom{m}{h} \binom{n-1}{k-1} \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^m c_i + \sum_{j=1}^n d_j - \sum_{i=1}^{m-p} c_i - \sum_{j=1}^{n-q} d_j \right) \\ &\geq p \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k} + q \binom{m}{h} \binom{n-1}{k-1} - (h+k-1) \binom{m}{h} \binom{n}{k} \\ &\quad + (m-p) \binom{m-1}{h-1} \binom{n}{k} + (n-q) \binom{m}{h} \binom{n-1}{k-1} \\ &\quad + \binom{m-(m-p)}{h} \binom{n-(n-q)}{k} - \binom{m}{h} \binom{n}{k} = \binom{p}{h} \binom{q}{k}, \end{aligned}$$

причем, при $p = m$ и $q = n$ выполняется равенство. Таким образом, (1) справедливо.

Теперь, в случае, когда справедливо (1), так же, как в предыдущем случае, доказываем что верно (2). Это завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. Пусть даны целые числа m, n, h, k такие, что $n \geq h > 1$ и $n \geq k > 1$. Неубывающие последовательности $A = [a_i]_1^m$ и $B = [b_j]_1^n$ неотрицательных целых чисел являются списками очков за поражения в $[k-h]$ -двудольном гипертурнире тогда и только тогда, когда для любых p и q

$$\sum_{i=1}^p a_i + \sum_{j=1}^q b_j \geq \binom{m}{h} \binom{n}{k} - \binom{m-p}{h} \binom{n-q}{k}.$$

Это утверждение следует из теоремы 3.

Список литературы

1. Bang C. M., Sharp H., Score vectors of tournaments. *J. Combin. Theory* (1979) **B26**, 81–84.
2. Beineke L. W., Moon J. W., On bipartite tournaments and scores. In: *Proc. 4th Intern. Graph Theory Conf.*, Kalamazoo, 1980, pp. 55–71.
3. Berge C., *Graphs and hypergraphs*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
4. Koh Y., Ree S., Score sequences of hypertournament matrices. *J. Korea Soc. Math. Educ., Ser. B: Pure Appl. Math.* (2001) **8**, 185–191.
5. Koh Y., Ree S., On k -hypertournament matrices. *Linear Algebra Appl.* (2003) **373**, 183–195.
6. Landau H. G., On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score structure. *Bull. Math. Biophys.* (1953) **15**, 143–148.
7. Zhou G., Yao T., Zhang K., On score sequences of k -hypertournaments. *European J. Combin.* (2000) **21**, 993–1000.

Статья поступила 6.05.2006.