Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, Асимптотические свойства многотипных критических ветвящихся процессов, эволюционирующих в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 2, 22–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1092>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:27:47

Асимптотические свойства многотипных критических ветвящихся процессов, эволюционирующих в случайной среде

© 2010 г. В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова

Для расширенного класса многотипных критических ветвящихся процессов, эволюционирующих в случайной среде, найдена асимптотика вероятности невырождения при условиях, которые являются более слабыми, чем даже известные к настоящему времени условия для случая процессов с одним типом частиц. Доказана функциональная предельная теорема для числа частиц в процессе в моменты времени nt , $0 \leq t \leq 1$, при условии невырождения процесса к моменту n .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00078) и программы «Математическая теория управления».

1. Введение и основные результаты

Смит и Вилкинсон [1] первыми предложили исследовать ветвящиеся процессы, эволюционирующие в случайной среде, или коротко, ветвящиеся процессы в случайной среде (ВПСС). В их работе среда порождалась последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Затем Атрейя и Карлин [2] проанализировали свойства ветвящихся процессов, находящихся под влиянием случайной среды более общего вида. С тех пор появилось большое количество работ, посвященных исследованию поведения ветвящихся процессов в случайной среде (см., например, [3–18]). Было установлено, что свойства надкритических ветвящихся процессов в случайной среде близки к свойствам классических надкритических ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона (см. [19]), в то время, как критические и докритические ветвящиеся процессы в случайной среде обладают рядом особенностей, не имеющих аналогов в поведении классических критических и докритических процессов Гальтона–Ватсона (см. [6, 8, 12, 14, 18]).

До появления статей [7] и [17] стандартным условием, накладываемым на ВПСС, было предположение о конечности второго момента $EX^2 < \infty$ приращения X сопровождающего случайного блуждания. Именно при этом условии (и соответственно, при его многомерном аналоге в многотипном случае) была найдена асимптотика вероятности невырождения критических однотипных ВПСС в [18] и [8], и критических многотипных ВПСС в [15] для среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Понятие критичности ВПСС было расширено в работах [7] и [17], что позволило ввести новую классификацию ВПСС и найти (в рамках так называемого annealed approach) асимптотику вероятности невырождения для гораздо более богатого класса критических однотипных ВПСС. Для процессов, входящих в

расширенный класс критических однотипных ВПСС, конечность второго момента случайной величины X не обязательна. Более того, даже существование $\mathbf{E}X$ не является необходимым требованием. Статьи [9–11], посвященные изучению однотипного случая (в рамках так называемого quenched approach), также продемонстрировали преимущества новой классификации ВПСС.

Настоящая работа посвящена изучению (в рамках annealed approach) таких многотипных критических ветвящихся процессов в случайной среде, сопровождающее случайное блуждание которых удовлетворяет условию Спитцера–Дони (см. ниже условие А3). В частности, мы обобщаем некоторые результаты статей [7] и [16].

Для описания исследуемой модели ВПСС нам потребуется ряд стандартных векторных обозначений.

Пусть $\mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, p$, — p -мерная вектор-строка, j -я компонента которой равняется 1, а все остальные компоненты нулю, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ — p -мерная нулевая вектор-строка.

Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)'$ положим

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^p |x_i|, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p x_i y_i.$$

Пусть $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\mathbf{N}_0^p$ — множество всех векторов $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)$ с неотрицательными целочисленными координатами. Далее, будем обозначать через $\mathbf{J}^p$ множество всех вектор-столбцов вида

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)', \quad 0 \leq s_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, p.$$

Для $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)' \in \mathbf{J}^p$ и $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{N}_0^p$ положим

$$\mathbf{s}^{\mathbf{z}} = \prod_{i=1}^p s_i^{z_i}.$$

Пусть $(\mathbb{F}, \mathcal{B}(\mathbb{F}))$ — пространство вероятностных мер Φ на $\mathbf{N}_0^p$ с σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{F})$ борелевских множеств, снабженное метрикой расстояния по вариации. Обозначим $(\mathbb{F}_p, \mathcal{B}(\mathbb{F}_p))$ прямое p -кратное произведение пространства $(\mathbb{F}, \mathcal{B}(\mathbb{F}))$ на себя.

Пусть $\mathbf{F} = (F^{(1)}, \dots, F^{(p)})'$ — случайная величина (векторнозначная случайная мера, то есть вектор, компонентами которого являются вероятностные меры), принимающая значения в $(\mathbb{F}_p, \mathcal{B}(\mathbb{F}_p))$, то есть $\mathbf{F}$ — измеримое отображение некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ в $(\mathbb{F}_p, \mathcal{B}(\mathbb{F}_p))$. Назовем случайной средой $\Pi = (\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots)$ бесконечную последовательность независимых одинаково распределенных вероятностных копий случайной величины $\mathbf{F}$, и будем говорить, что $\mathbf{F}$ порождает Π .

Ввиду взаимно однозначного соответствия между вероятностными мерами и производящими функциями, будем отождествлять $\mathbf{F} = (F^{(1)}, \dots, F^{(p)})'$, порождающую Π , со случайным p -мерным вектором-столбцом $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = (f^{(1)}(\mathbf{s}), \dots, f^{(p)}(\mathbf{s}))'$, компонентами которого служат p -мерные (случайные) производящие функции $f^{(i)}$, соответствующие $F^{(i)}$, $1 \leq i \leq p$:

$$f^{(i)}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p} F^{(i)}(\{\mathbf{z}\}) \mathbf{s}^{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{s} \in \mathbf{J}^p. \quad (1)$$

Аналогично будем отождествлять компоненту $\mathbf{F}_n = (F_n^{(1)}, \dots, F_n^{(p)})'$, $n \geq 0$, случайной среды $\Pi = (\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots)$ со случайной векторнозначной вероятностной производя-

шей функцией $\mathbf{f}_n(\mathbf{s}) = (f_n^{(1)}(\mathbf{s}), \dots, f_n^{(p)}(\mathbf{s}))'$, компонентами которой служат (случайные) многомерные вероятностные производящие функции $f_n^{(i)}(\mathbf{s})$, соответствующие $F_n^{(i)}$, $1 \leq i \leq p$:

$$f_n^{(i)}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p} F_n^{(i)}(\{\mathbf{z}\}) \mathbf{s}^{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{s} \in \mathbf{J}^p. \quad (2)$$

Ввиду этого соглашения мы можем формально переписать (1) и (2) в виде

$$\begin{aligned} f^{(i)}(\mathbf{s}) &= \mathbf{E}[\mathbf{s}^{\xi_i} \mid \mathbf{f}] = \mathbf{E}[s_1^{\xi_{i1}} \dots s_p^{\xi_{ip}} \mid \mathbf{f}], & \mathbf{s} \in \mathbf{J}^p, \\ f_n^{(i)}(\mathbf{s}) &= \mathbf{E}[\mathbf{s}^{\xi_i(n)} \mid \mathbf{f}_n] = \mathbf{E}[s_1^{\xi_{i1}(n)} \dots s_p^{\xi_{ip}(n)} \mid \mathbf{f}_n], & \mathbf{s} \in \mathbf{J}^p, \end{aligned}$$

где векторы $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{ip})$, $i = 1, \dots, p$, при $(F^{(1)}, \dots, F^{(p)}) = (\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(p)})$ распределены согласно мерам $\Phi^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$, и векторы $\xi_i(n) = (\xi_{i1}(n), \dots, \xi_{ip}(n))$, $i = 1, \dots, p$, при условии $(F_n^{(1)}, \dots, F_n^{(p)}) = (\Phi_n^{(1)}, \dots, \Phi_n^{(p)})$ распределены согласно мерам $\Phi_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$.

Принимая во внимание описанное выше соответствие, мы часто в дальнейшем будем использовать запись $\Pi = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots)$ для обозначения среды $\Pi = (\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots)$.

Пусть $(\Phi_0, \Phi_1, \dots)$, где

$$\Phi_n = (\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}, \dots, \Phi_n^{(p)}) \in \mathbb{F}_p, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

— реализация случайной среды.

Последовательность случайных p -мерных векторов $\mathbf{Z}(n) = (Z^{(1)}(n), \dots, Z^{(p)}(n))$, $n = 0, 1, \dots$, с неотрицательными целочисленными координатами называется ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона с p типами частиц в случайной среде Π , если $\mathbf{Z}(0)$ не зависит от Π и для всех $n \geq 0$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{N}_0^p$ и $\Phi_0, \Phi_1, \dots \in \mathbb{F}_p$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}(n+1) \mid \mathbf{Z}(n) = (z_1, \dots, z_p), \Pi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots)) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{z_i} \xi_i^{(j)}(n)\right), \quad (3)$$

где случайные p -мерные векторы $\xi_i^{(1)}(n), \xi_i^{(2)}(n), \dots, \xi_i^{(z_i)}(n)$, $i = 1, \dots, p$, имеющие целочисленные неотрицательные координаты, независимы в совокупности, и, кроме того, для каждого $i = 1, \dots, p$ случайные векторы $\xi_i^{(1)}(n), \xi_i^{(2)}(n), \dots, \xi_i^{(z_i)}(n)$ распределены согласно вероятностной мере $\Phi_n^{(i)}$.

Соотношение (3) задает ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона в случайной среде, в котором величина $Z^{(i)}(n)$, $i = 1, \dots, p$, представляет собой число частиц типа i в n -м поколении, причем частицы в этом процессе эволюционируют следующим образом. Если состояние среды в момент времени n есть $(\Phi_n^{(1)}, \dots, \Phi_n^{(p)}) \in \mathbb{F}_p$, то каждая из $Z^{(i)}(n)$ частиц типа i , $i = 1, \dots, p$, существующих в этот момент времени в популяции, производит потомство согласно вероятностной мере $\Phi_n^{(i)}$ независимо от размножения других частиц. Таким образом, компонента $Z^{(i)}(n+1)$ вектора $\mathbf{Z}(n+1) = (Z^{(1)}(n+1), \dots, Z^{(p)}(n+1))$ равна числу частиц типа i среди всех непосредственных потомков частиц n -го поколения. Начальное распределение вектора $\mathbf{Z}(0)$ будет определено в дальнейшем.

Для $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, символы $\mathbf{E}_{\mathbf{z}}$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}$ будут использоваться для обозначения математического ожидания и, соответственно, вероятности, порождаемых рассматриваемым ветвящимся процессом в случайной среде, в котором $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}$. Например, $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_j}$ означает,

что процесс начался с одной частицы типа j . В последующем, чтобы избежать громоздких обозначений, мы будем опускать нижний индекс $\mathbf{z}$ вплоть до формулировки теоремы 3.

Символы $\mathbb{E}_f$ и $\mathbb{P}_f$ используются для обозначения играющих существенную роль в последующих рассуждениях условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной векторнозначной производящей вероятностной функции $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{s}) = (f^{(1)}(\mathbf{s}), \dots, f^{(p)}(\mathbf{s}))'$, $\mathbf{s} \in \mathbf{J}^p$, компонентами которой служат многомерные вероятностные производящие функции. Мы также будем использовать символы $\mathbb{E}_f$ и $\mathbb{P}_f$ для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной среде $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots)$.

Положим

$$m_{ij} = \mathbb{E}_f \xi_{ij}, \quad m_{ij}(n) = \mathbb{E}_f \xi_{ij}(n), \quad i, j = 1, \dots, p,$$

и введем соответствующие матрицы средних

$$\begin{aligned} M &= (m_{ij})_{i,j=1}^p = (\mathbb{E}_f \xi_{ij})_{i,j=1}^p, \\ M_n &= (m_{ij}(n))_{i,j=1}^p = (\mathbb{E}_f \xi_{ij}(n))_{i,j=1}^p, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Для строго положительных матриц средних M и M_n , $n \geq 0$, обозначим ρ и ρ_n их перроновы корни, то есть их максимальные по абсолютному значению собственные числа.

Перечислим теперь условия, накладываемые на многотипный ветвящийся процесс в случайной среде, которые в дальнейшем мы всегда будем предполагать выполненными.

Условие A1. Матрицы средних M и M_n , $n \geq 0$, положительны и с вероятностью 1 имеют общий неслучайный положительный правый собственный вектор

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)', \quad \|\mathbf{u}\| = 1,$$

такой, что

$$M\mathbf{u} = \rho\mathbf{u}, \quad M_n\mathbf{u} = \rho_n\mathbf{u}. \quad (4)$$

Условие A2. Выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\xi_i\| > 1) > 0) = 1.$$

Накладывая это ограничение, мы тем самым исключаем из анализа случай мер на пространстве вероятностных мер $(\mathbb{F}_p, \mathcal{B}(\mathbb{F}_p))$, для которых векторнозначная вероятностная производящая функция $\mathbf{f}(\mathbf{s})$ может с положительной вероятностью иметь компоненты вида

$$f^{(i)}(\mathbf{s}) = p_0 + p_{i1}s_1 + p_{i2}s_2 + \dots + p_{ip}s_p.$$

Это требование носит технический характер, и, по-видимому, может быть ослаблено. Роль этого условия станет ясной из последующих рассуждений.

Пусть

$$X = \log \rho, \quad X_n = \log \rho_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Положим

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Последовательность $S = (S_0, S_1, \dots)$ называется сопровождающим случайным блужданием, соответствующим ветвящемуся процессу $\{Z(n), n \geq 0\}$ в случайной среде П. Известно, что многие важные выводы о свойствах однотипных ветвящихся процессов в случайной среде могут быть сделаны на основе анализа свойств сопровождающих их случайных блужданий (см., например, [7, 17]).

В настоящей работе мы покажем, что аналогичное явление имеет место и для широкого класса многотипных ветвящихся процессов в случайной среде. С этой целью предположим, что сопровождающее случайное блуждание S удовлетворяет условию Спитцера–Дони (см. [22]).

Условие А3. Существует число $a \in (0, 1)$ такое, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S_n > 0) \rightarrow a. \quad (6)$$

Распространяя расширенную классификацию, введенную для однотипных ветвящихся процессов в случайной среде в [7], мы назовем ветвящийся процесс $\{Z(n), n \geq 0\}$ с p типами частиц и случайной средой П, удовлетворяющий условию А1, критическим, если соответствующее ему сопровождающее случайное блуждание является осциллирующим, то есть если $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ п.н. и $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ п.н. Известно [25], что случайные блуждания, удовлетворяющие условию А3, осциллируют.

Пусть $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots$ — строгие убывающие лестничные моменты случайного блуждания S . Положим

$$V(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\gamma_i} \geq -x), \quad x \geq 0;$$

$$V(x) = 0, \quad x < 0.$$

Так как S является осциллирующим, справедливо (см. [21]) соотношение

$$\mathbf{E}V(x + X) = V(x), \quad x \geq 0. \quad (7)$$

Для $\beta > 0$ положим

$$\Delta_{ij}(\beta) = \mathbf{E}_f |\xi_{ij} - m_{ij}|^\beta, \quad \Delta_{ij}(k; \beta) = \mathbf{E}_f |\xi_{ij}(k-1) - m_{ij}(k-1)|^\beta,$$

$$\Delta_\beta = \max_{i,j} \Delta_{ij}(\beta), \quad \Delta_\beta(k) = \max_{i,j} \Delta_{ij}(k; \beta) \quad (8)$$

и введем случайные величины

$$\zeta_\beta = e^{-\beta X} \Delta_\beta, \quad \zeta_\beta(k) = e^{-\beta X_k} \Delta_\beta(k), \quad k \geq 1. \quad (9)$$

Условие А4. Существуют числа $\beta \in (1, 2]$ и $\varepsilon > 0$ такие, что с вероятностью 1

$$\Delta_\beta(k) < \infty, \quad k \geq 1, \quad (10)$$

и

$$\mathbf{E}[\log^+ \zeta_\beta]^{1/a+\varepsilon} < \infty, \quad \mathbf{E}[V(X)(\log^+ \zeta_\beta)^{1+\varepsilon}] < \infty, \quad (11)$$

где величина a та же, что и в условии А3.

Введем случайные величины

$$Q^{(i)}(n) = \mathbb{P}_i(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i), \quad \mathbf{Q}(n) = (Q^{(1)}(n), \dots, Q^{(p)}(n)),$$

и пусть

$$q_i(n) = \mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i)$$

— вероятность невырождения ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона в случайной среде с p типами частиц, начавшегося в момент времени $n = 0$ с одной частицы типа i .

Заметим, что если условия A1 и A3 выполнены, то

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}(n), \mathbf{u}) &\leq \min_{0 \leq k \leq n-1} \|M_0 \cdots M_k \mathbf{u}\| \\ &= \|\mathbf{u}\| \min_{0 \leq k \leq n-1} \prod_{j=0}^k \rho_j \leq \exp\left\{ \min_{0 \leq k \leq n} S_k \right\} \rightarrow 0, \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \end{aligned} \quad (12)$$

при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, $Q^{(i)}(n) \rightarrow 0$ $\mathbf{P}$ -п.н. при $n \rightarrow \infty$ для всех $1 \leq i \leq p$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия A1–A4. Тогда при $n \rightarrow \infty$,

$$q_i(n) \sim c_i n^{-(1-a)} l(n), \quad i = 1, \dots, p, \quad (13)$$

где $c_i > 0$, $i = 1, \dots, p$, а $l(n)$ — функция, медленно меняющаяся на бесконечности.

Для фиксированного начального значения $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, и целых чисел $0 \leq r \leq n$ определим процесс $W_{r,n,\mathbf{z}} = \{W_{r,n,\mathbf{z}}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ соотношением

$$W_{r,n,\mathbf{z}}(t) = \frac{(\mathbf{Z}(r + [(n-r)t]), \mathbf{u})}{\exp\{S_{r+[(n-r)t]}\}}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть числа x .

Теорема 2. Пусть выполнены условия A1–A3, и, кроме того, условие A4 с $\beta = 2$. Пусть $r_1, r_2, \dots$ — последовательность натуральных чисел такая, что $r_n \leq n$ и $r_n \rightarrow \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}(W_{r,n} \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}) \implies \mathcal{L}(W_{\mathbf{z}}(t), 0 \leq t \leq 1),$$

где предельный процесс является случайным процессом с п.н. постоянными траекториями, то есть

$$\mathbf{P}(W_{\mathbf{z}}(t) = W_{\mathbf{z}} \text{ при всех } t \in [0, 1]) = 1.$$

Более того,

$$\mathbf{P}(0 < W_{\mathbf{z}} < \infty) = 1.$$

Здесь символ $\implies$ обозначает сходимость в топологии Скорохода в пространстве $D[0, 1]$ функций, определенных на $[0, 1]$, непрерывных справа и имеющих левосторонние пределы.

Результаты настоящей работы обобщают и расширяют соответствующие утверждения, установленные в статьях [7] и [16]. Так, теорема 1 является обобщением теоремы 3 из

[16]. Отметим, что ввиду условия (10) асимптотическое соотношение (13) выполняется, если, например,

$$\sum_{i,j} \mathbb{E}_f (\xi_{ij} - m_{ij})^2 = \infty$$

с вероятностью 1. Таким образом, даже в случае $p = 1$ условия, налагаемые в теореме 1, являются более слабыми, чем соответствующие условия из следствия 1.2 в [7]. Упомянутое следствие является на сегодняшний день наиболее сильным результатом, описывающим асимптотическое поведение вероятности невырождения однотипных ветвящихся процессов в случайной среде, и оно доказано в предположении конечности вторых моментов распределений численности потомства частиц.

Теорема 2 является обобщением теоремы 1.3 из [7] в двух направлениях. Во-первых, она доказана для процессов с несколькими типами частиц, и, во-вторых, даже для процессов с одним типом частиц условия теоремы 2 слабее условий, накладываемых на характеристики ветвящегося процесса в [7].

2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем, наряду с мерой $\mathbf{P}$, нам понадобится также связанная с ней мера $\mathbf{P}^+$. Для описания интересующей нас меры обозначим Σ_n множество, состоящее из всех возможных наборов $(\mathbf{Z}(0), \dots, \mathbf{Z}(n), \mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{n-1})$, при этом $\Sigma = \Sigma_\infty$. Введем σ -алгебры $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$, полагая

$$\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathbf{Z}(0)), \quad \mathcal{F}_n = \sigma(\mathbf{Z}(0), \dots, \mathbf{Z}(n), \mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{n-1}), \quad n \geq 1.$$

Заметим, что σ -алгебра $\mathcal{F}_0$ является тривиальной, если начальное значение $\mathbf{Z}(0)$ не случайно.

Пусть

$$\mathcal{F} = \overline{\bigvee_n \mathcal{F}_n},$$

где $\overline{\bigvee_n \mathcal{F}_n}$ обозначает дополнение $\bigvee_n \mathcal{F}_n$ до σ -алгебры. В последующем тройка $(\Sigma, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ будет служить нам в качестве основного вероятностного пространства.

Обозначим $I\{C\}$ индикатор события C , и пусть $L_n = \min(S_0, \dots, S_n)$.

Следуя лемме 2.4 из [7], несложно показать, что последовательность $V(S_n)I\{L_n \geq 0\}$, $n = 0, 1, \dots$, является мартингалом относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$. Следовательно,

$$\mathbb{E}[V(S_{n+1})I\{L_{n+1} \geq 0\} \mid \mathcal{F}_n] = V(S_n)I\{L_n \geq 0\}, \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \quad (14)$$

Определим вероятностные меры $\mathbf{P}_n^+$ на σ -алгебрах $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ соотношением

$$d\mathbf{P}_n^+ = V(S_n)I\{L_n \geq 0\}d\mathbf{P}.$$

Ввиду (14), сужение $\mathbf{P}_{n+1}^+|_{\mathcal{F}_n}$ меры $\mathbf{P}_{n+1}^+$ на $\mathcal{F}_n$ есть $\mathbf{P}_n^+$. Следовательно, существует вероятностная мера $\mathbf{P}^+$ на $\mathcal{F}$ такая, что

$$\mathbf{P}^+|_{\mathcal{F}_n} = \mathbf{P}_n^+, \quad n \geq 0. \quad (15)$$

В частности, для любой $\mathcal{F}_n$ -измеримой неотрицательной случайной величины Y_n

$$\mathbf{E}^+ Y_n = \mathbf{E}[Y_n V(S_n); L_n \geq 0], \quad (16)$$

где $\mathbf{E}^+$ – математическое ожидание, порожаемое мерой $\mathbf{P}^+$.

Используя обозначения (9), введем случайные величины

$$\varphi_\beta(k) = \zeta_\beta(k+1)e^{-(\beta-1)S_k} = e^{-\beta X_{k+1}} \Delta_\beta(k+1)e^{-(\beta-1)S_k}.$$

Лемма 1. При выполнении условий A1, A3 и A4

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_\beta(k) < \infty \quad \mathbf{P}^+ \text{-п.н.} \quad (17)$$

Доказательство. Известно ([7], с. 661), что если выполнено условие A3, то для любого $\delta > 0$ найдется число $c > 0$ такое, что

$$S_k \geq ck^{a-\delta} \quad \mathbf{P}^+ \text{-п.н.}$$

Таким образом,

$$e^{-(\beta-1)S_k} = O(e^{-k^{a-\delta}}) \quad \mathbf{P}^+ \text{-п.н.} \quad (18)$$

для любого $\delta > 0$.

Далее, в [7] (см. с. 663) было показано, что если выполнены условия A3 и (11), то при достаточно малом $\delta_1 > 0$

$$\zeta_\beta(k) = O(e^{-k^{a-\delta_1}}), \quad \mathbf{P}^+ \text{-п.н.} \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует (17). Лемма доказана.

Напомним, что согласно определению

$$e^{S_0} = 1, \quad e^{S_n} = \prod_{i=0}^{n-1} \rho_i, \quad n \geq 1.$$

Имея это в виду, положим

$$W_n = e^{-S_n}(\mathbf{Z}(n), \mathbf{u}), \quad n \geq 0.$$

Лемма 2. Если условие A1 выполнено, то при фиксированной среде $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots$ последовательность $\{W_n, n \geq 0\}$ является мартингалом относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[W_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}_{\mathbf{f}} \left[e^{-S_n} \sum_{i=1}^p Z_i(n) u_i | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{f}} \left[e^{-S_n} \sum_{i=1}^p u_i \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{Z_j(n-1)} \xi_{ji}^{(r)}(n-1) | \mathcal{F}_{n-1} \right], \end{aligned}$$

где $\xi_{ji}^{(r)}(n-1)$ — число частиц типа i среди непосредственных потомков r -й частицы типа j , живущей в поколении $n-1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbf{f}}[W_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= e^{-S_n} \sum_{i=1}^p u_i \sum_{j=1}^p Z_j(n-1) m_{ji}(n-1) \\ &= e^{-S_n} \sum_{j=1}^p Z_j(n-1) \sum_{i=1}^p m_{ji}(n-1) u_i \\ &= e^{-S_n} \rho_{n-1} \sum_{j=1}^p Z_j(n-1) u_j = W_{n-1}.\end{aligned}$$

В частности,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{f}}[W_n] = \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[W_0], \quad n = 0, 1, \dots$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 2 статьи [13].

Лемма 3. Пусть $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ — мартингал, $Y_0 = 0$, и $T_k = Y_k - Y_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Если $\mathbf{E}|T_k|^\beta < \infty$, $k = 1, 2, \dots, n$, при некотором $\beta \in (1, 2]$, то

$$\mathbf{E}|Y_n|^\beta \leq 4 \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|T_k|^\beta.$$

Теперь у нас есть все необходимое для доказательства следующей важной леммы.

Лемма 4. При выполнении условий A1, A3 и A4

$$\mathbb{P}_{\mathbf{f}}(W_n > 0 \text{ при всех } n \mid \mathbf{Z}(0)) > 0, \quad \mathbf{P}^{+}\text{-п.н.}, \quad (20)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}^{+}(W_n > 0 \text{ при всех } n \mid \mathbf{Z}(0)) > 0. \quad (21)$$

Доказательство. Ясно, что

$$W_n = (W_n - W_{n-1}) + (W_{n-1} - W_{n-2}) + \dots + (W_1 - W_0) + W_0,$$

где $W_0 = (\mathbf{Z}(0), \mathbf{u})$ — начальное значение, а

$$W_k - W_{k-1} = e^{-S_k} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{Z_j(t-1)} u_i (\xi_{ji}^{(r)}(k-1) - m_{ji}(k-1)).$$

Возьмем $\beta \in (1, 2]$, для которого выполнено условие (10), и оценим условное математическое ожидание $\mathbb{E}_{\mathbf{f}}|W_k - W_{k-1}|^\beta$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Так как условные математические ожидания случайных величин $u_i (\xi_{ji}^{(r)}(k-1) - m_{ji}(k-1))$, $r = 1, \dots, Z_j(t-1)$,

$j, i \in \{1, \dots, p\}$, относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{k-1}$ независимы и $\Delta_{ji}(k; \beta) < \infty$ (см. (8)), то согласно неравенству фон Бара–Эссеена [20]

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[|W_k - W_{k-1}|^\beta \mid \mathcal{F}_{k-1}] &\leq 2e^{-\beta S_k} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p Z_j(t-1) u_i^\beta \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[\xi_{ji}^{(r)}(k-1) - m_{ji}(k-1)]^\beta \\ &= 2e^{-\beta S_k} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p Z_j(t-1) u_i^\beta \Delta_{ji}(k; \beta) \\ &\leq 2e^{-\beta S_k} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p Z_j(t-1) u_i \Delta_{ji}(t; \beta). \end{aligned}$$

Следовательно, при $u_* = \min_i u_i$ и $u^* = \max_i u_i$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[|W_k - W_{k-1}|^\beta] &= \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[\mathbb{E}_{\mathbf{f}}[|W_k - W_{k-1}|^\beta \mid \mathcal{F}_{k-1}]] \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbf{f}} \left[2e^{-\beta S_k} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p Z_j(k-1) u_i \Delta_{ji}(k; \beta) \right] \\ &\leq 2e^{-\beta S_k} \Delta_\beta(k) \mathbb{E}_{\mathbf{f}} \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p Z_j(k-1) \frac{u_i}{u_j} u_j \right] \\ &\leq \frac{2pu^*}{u_*} e^{-\beta S_k} \Delta_\beta(k) \mathbb{E}_{\mathbf{f}} \sum_{j=1}^p Z_j(k-1) u_j \\ &= \frac{2pu^*}{u_*} e^{-\beta X_k} \Delta_\beta(k) e^{-(\beta-1)S_{k-1}} \mathbb{E}_{\mathbf{f}} W_{k-1} = \frac{2pu^*}{u_*} \varphi_\beta(k-1) \mathbb{E}_{\mathbf{f}} W_0. \end{aligned}$$

Так как при фиксированной среде последовательность $\{W_n, n \geq 0\}$ является мартингалом относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$, применяя лемму 3 с $T_k = W_k - W_{k-1}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{f}} W_n^\beta &= \mathbb{E}_{\mathbf{f}} \left(\sum_{k=1}^n T_k + W_0 \right)^\beta \leq \mathbb{E}_{\mathbf{f}} \left(\left| \sum_{k=1}^n T_k \right| + W_0 \right)^\beta \leq 2^\beta \left(\mathbb{E}_{\mathbf{f}} \left| \sum_{k=1}^n T_k \right|^\beta + \mathbb{E}_{\mathbf{f}} W_0^\beta \right) \\ &\leq 4 \cdot 2^\beta \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_{\mathbf{f}} |T_k|^\beta + 2^\beta \mathbb{E}_{\mathbf{f}} W_0^\beta \leq 2^{\beta+3} \frac{pu^* \mathbb{E}_{\mathbf{f}} W_0}{u_*} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_\beta(k) + 2^\beta \mathbb{E}_{\mathbf{f}} W_0^\beta. \end{aligned} \tag{22}$$

Неравенство Гёльдера для неотрицательной случайной величины η и чисел $\beta > 1$ и $\gamma^{-1} = (1 - \beta^{-1})^{-1}$ приводит к оценке

$$\mathbf{E} \eta = \mathbf{E} \eta I\{\eta > 0\} \leq (\mathbf{E} \eta^\beta)^{1/\beta} (\mathbf{E} I\{\eta > 0\})^{1/\gamma} = (\mathbf{E} \eta^\beta)^{1/\beta} \mathbf{P}^{1/\gamma}(\eta > 0).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(\eta > 0) \geq \frac{(\mathbf{E} \eta)^\gamma}{(\mathbf{E} \eta^\beta)^{\gamma/\beta}}. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}_f(W_n > 0 \mid \mathbf{Z}(0)) \geq \frac{(\mathbb{E}_f W_n)^\gamma}{(\mathbb{E}_f W_n^\beta)^{\gamma/\beta}} \geq \frac{(\mathbb{E}_f W_0)^\gamma}{\left(2^{\beta+3} \frac{pu^*}{u_*} \mathbb{E}_f W_0 \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_\beta(k) + 2^\beta \mathbb{E}_f W_0^\beta\right)^{\gamma/\beta}}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}_f(W_n > 0 \mid \mathbf{Z}(0)) \geq \frac{1}{\left(a_0 \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_\beta(k) + b_0\right)^{\gamma/\beta}}, \quad \mathbf{P}^+ \text{-п.н.}, \quad (24)$$

где

$$a_0 = \frac{2^{\beta+3} pu^*}{u_* (\mathbb{E}_f W_0)^{\beta-1}}, \quad b_0 = \frac{2^\beta \mathbb{E}_f W_0^\beta}{(\mathbb{E}_f W_0)^\beta}.$$

Учитывая монотонность знаменателя дроби, стоящей в правой части (24), заключаем, что

$$\mathbb{P}_f(W_n > 0 \mid \mathbf{Z}(0)) \geq \frac{1}{\left(a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_\beta(k) + b_0\right)^{\gamma/\beta}}, \quad \mathbf{P}^+ \text{-п.н.}$$

Отсюда, применяя лемму 1, получаем

$$\mathbb{P}_f(W_n > 0 \text{ при всех } n \mid \mathbf{Z}(0)) > 0, \quad \mathbf{P}^+ \text{-п.н.} \quad (25)$$

Усредняя это соотношение по мере $\mathbf{P}^+$, мы видим, что

$$\mathbf{P}^+(W_n > 0 \text{ при всех } n \mid \mathbf{Z}(0)) > 0.$$

Лемма доказана.

Нам также понадобится еще одно понятие, введенное Танни (см. [3], с. 484).

Определение 1. Многотипный ветвящийся процесс в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, называется строго регулярным относительно меры $\mathbf{P}$, если существует натуральное число k такое, что

$$\mathbf{P}\left(\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}(k)\| > 1 \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) > 0\right) > 0.$$

Пусть

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, \\ v(l) &= \min\{m > v(l-1) : S_{m+i} \geq S_m \text{ для всех } i \geq 0\}, \quad l \geq 1, \end{aligned}$$

— моменты, являющиеся точками минимумов для следующих за ними частей траектории сопровождающего случайного блуждания $\{S_n, n \geq 0\}$, и пусть

$$\mathbf{Z}^*(l) = \mathbf{Z}(v(l)), \quad l = 0, 1, \dots$$

Следующее наблюдение весьма важно для дальнейших рассуждений.

Лемма 5. Относительно меры $\mathbf{P}^+$ процесс $\mathbf{Z}^*(l)$, $l = 0, 1, \dots$, является многотипным ветвящимся процессом в случайной среде, имеющей независимые одинаково распределенные компоненты.

Доказательство этого утверждения сводится к практически дословному повторению доказательства леммы 2.6 работы [7].

Лемма 6. Если процесс $\mathbf{Z}(n)$, $n = 0, 1, \dots$, удовлетворяет условиям A1, A2 и A3, то процесс $\mathbf{Z}^*(l)$, $l = 0, 1, \dots$, является строго регулярным относительно меры $\mathbf{P}^+$.

Доказательство. Нам нужно указать натуральное число l такое, что

$$\mathbf{P}^+(\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}^*(l)\| > 1 \mid \mathbf{Z}^*(0) = \mathbf{e}_i) > 0) > 0.$$

Покажем, что в наших условиях это неравенство выполняется уже при $l = 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^+(\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}^*(1)\| > 1 \mid \mathbf{Z}^*(0) = \mathbf{e}_i) > 0) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}^+(\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}^*(1)\| > 1 \mid \mathbf{Z}^*(0) = \mathbf{e}_i) > 0; v(1) = j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}^+(\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}(j)\| > 1 \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) > 0; v(1) = j). \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} A_j &= \{S_j - S_k < 0, k = 1, 2, \dots, j-1\}, \\ B_j &= \{S_{j+i} \geq S_j, i = 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

и замечая (см. доказательство леммы 2.6 в [7]), что при выполнении условия A3

$$\mathbf{P}^+(S_{j+i} \geq S_j, i = 1, 2, \dots \mid S_j = x) = \frac{1}{V(x)},$$

и что наборы $(v(1), \mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{v(1)})$ и $(\mathbf{f}_{v(1)+1}, \mathbf{f}_{v(1)+2}, \dots)$ являются независимыми по отношению к мере $\mathbf{P}^+$, мы получаем, опираясь на разложение Танака для случайных блужданий (см. [24]) и используя условия A1 и A2, цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^+(\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}(j)\| > 1 \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) > 0; v(1) = j) \\ &= \mathbf{P}^+(\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}(j)\| > 1 \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) > 0; A_j B_j) \\ &= \mathbf{E}^+[\mathbf{E}^+[I\{\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}(j)\| > 1 \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) > 0; A_j\} I\{B_j\} \mid S_j]] \\ &= \mathbf{E}^+ \left[I\{\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}(j)\| > 1 \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) > 0; A_j\} \frac{1}{V(S_j)} \right] \\ &= \mathbf{E}[I\{\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}(j)\| > 1 \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) > 0\} I\{A_j\} I\{L_j \geq 0\}] \\ &= \mathbf{E}[I\{A_j\} I\{L_j \geq 0\}] = \mathbf{E} \left[I\{A_j\} V(S_j) I\{L_j \geq 0\} \frac{1}{V(S_j)} \right] = \mathbf{P}^+(v(1) = j). \end{aligned}$$

Итак, при выполнении наших условий

$$\mathbf{P}^+(\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}^*(1)\| > 1 \mid \mathbf{Z}^*(0) = \mathbf{e}_i) > 0) = \mathbf{P}^+(v(1) < \infty) = 1.$$

Лемма доказана.

Начиная с формулируемой ниже теоремы 3 и вплоть до конца статьи, мы почти всюду (там, где это имеет существенное значение) будем явным образом обозначать зависимость рассматриваемых случайных величин и мер относительно начального значения $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Так, например, в этом случае мы будем использовать обозначение $W_{n,\mathbf{z}}$ для W_n , а также $\mathbf{E}_{\mathbf{z}}$ ($\mathbf{E}_{\mathbf{z}}^+$) и $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}$ ($\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+$), соответственно, для математических ожиданий и вероятностей, порождаемых ветвящимся процессом в случайной среде, имеющим начальное значение $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия A1–A3 и, кроме того, условие A4 с $\beta = 2$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$W_{n,\mathbf{z}} \rightarrow W_{\mathbf{z}}^+, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+ \text{-п.н.}, \quad (26)$$

где случайная величина $W_{\mathbf{z}}^+$ такова, что

$$\{W_{\mathbf{z}}^+ > 0\} = \{\|\mathbf{Z}(n)\| > 0 \text{ for all } n\}, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+ \text{-п.н.}$$

Доказательство. Так как $W_{n,\mathbf{z}}$ является неотрицательным мартингалом, имеет место сходимость (26). Заметим, что

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+(W_{\mathbf{z}}^+ = 0) \geq \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+(\|\mathbf{Z}(n)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty), \quad (27)$$

поскольку

$$\{\|\mathbf{Z}(n)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}\} \subset \{W_{\mathbf{z}}^+ = 0\}.$$

Для доказательства неравенства, противоположного (27), нам потребуются более delicate рассуждения.

Напомним сначала, что $\mathbf{Z}^*(l)$, $l = 0, 1, \dots$, является строго регулярным многотипным ветвящимся процессом в случайной среде, имеющей независимые одинаково распределенные компоненты. Кроме того, ввиду (25)

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+(\mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}^*(l)\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty) < 1) = 1. \quad (28)$$

Отсюда, согласно теореме 9.3 из [3], следует, что

$$\mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}^*(l)\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty) + \mathbb{P}_f(\|\mathbf{Z}^*(l)\| \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty) = 1, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+ \text{-п.н.} \quad (29)$$

Далее, для фиксированного вектора $\mathbf{e}_j$, фиксированной среды $\mathbf{f}$ и $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ положим

$$g_{n,k,j}(\lambda) = \mathbb{E}_f[e^{-\lambda e^{S_k} W_n} \mid \mathbf{Z}(k) = \mathbf{e}_j], \quad \lambda \geq 0. \quad (30)$$

Заметим, что

$$\mathbb{E}_f[e^{S_k} W_n \mid \mathbf{Z}(k) = \mathbf{e}_j] = -g'_{n,k,j}(0) = u_j. \quad (31)$$

Так как функция $-\ln\{e^{-\lambda} + (1 - e^{-\lambda})e^{-\mu}\}$ вполне монотонна по $\mu \geq 0$ при каждом фиксированном $\lambda \geq 0$, и композиция вполне монотонных функций вполне монотонна (см. [25], гл. XIII, §4), функция

$$h(\mu) = h_{n,k,j}(\mu) = g_{n,k,j}(-\ln\{e^{-\lambda} + (1 - e^{-\lambda})e^{-\mu}\}), \quad \mu \geq 0, \quad (32)$$

вполне монотонна. Кроме того, $h(0) = 1$. Следовательно, $h(\mu)$ является преобразованием Лапласа некоторого вероятностного распределения. Обозначим $\mathcal{X}_n$ случайную величину, для которой

$$\mathbb{E}_{\mathbf{f}} e^{-\mu \mathcal{X}_n} = h(\mu), \quad \mu \geq 0.$$

Соотношение (23) при $\beta = \gamma = 2$ дает неравенство

$$\mathbb{P}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X}_n > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}_{\mathbf{f}} \mathcal{X}_n)^2}{\mathbb{E}_{\mathbf{f}} \mathcal{X}_n^2}. \quad (33)$$

Из (31), (30) и (32) следует, что

$$\mathbb{E}_{\mathbf{f}} \mathcal{X}_n = -h'(0) = -g'_{n,k,j}(0)(1 - e^{-\lambda}) = u_j(1 - e^{-\lambda}), \quad (34)$$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{f}} \mathcal{X}_n^2 = h''(0) = \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[e^{2S_k} W_n^2 \mid \mathbf{Z}(k) = \mathbf{e}_j](1 - e^{-\lambda})^2 + u_j(1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda}. \quad (35)$$

Учитывая равенства

$$\mathbb{P}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X}_n > 0) = 1 - \lim_{\mu \rightarrow \infty} h(\mu) = 1 - g_{n,k,j}(\lambda)$$

и используя соотношения (33), (34) и (35), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X}_n > 0) &= 1 - g_{n,k,j}(\lambda) \\ &\geq \left(\frac{\mathbb{E}_{\mathbf{f}}[e^{2S_k} W_n^2 \mid \mathbf{Z}(k) = \mathbf{e}_j]}{u_j^2} + \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})u_j} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Опираясь на рассуждения, проводившиеся при доказательстве (22), получаем для $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ неравенство

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[e^{2S_k} W_n^2] &= \mathbb{E}_{\mathbf{f}} \left[e^{2S_k} \left(\sum_{i=k+1}^n T_i + W_k \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{2^5 p u^* \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[e^{S_k} W_k]}{u_*} \sum_{i=k}^{n-1} \zeta_2(i+1) e^{-(S_i - S_k)} + 2^2 \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[e^{2S_k} W_k^2]. \end{aligned} \quad (37)$$

Объединяя соотношения (22), (23) при $\beta = \gamma = 2$, (33), (36) и (37), заключаем, что $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+$ -п.н.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[e^{-\lambda e^{S_k} W_n} \mid \mathbf{Z}(k) = \mathbf{e}_j] \\ \leq 1 - \left(32 \frac{p u^* u_j}{u_*} \sum_{i=k}^{n-1} \zeta_2(i+1) e^{-(S_i - S_k)} + 4u_j^2 + \frac{4e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})u_j} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (38)$$

Переходя к пределу в соотношении (38) сначала при $n \rightarrow \infty$, а затем при $\lambda \rightarrow \infty$, получаем, что для любого фиксированного k и любого $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, \dots, p$,

$$\mathbb{P}_{\mathbf{f}}(W_z^+ = 0 \mid \mathbf{Z}(k) = \mathbf{e}_j) \leq 1 - \frac{1}{a \sum_{i=k}^{\infty} \zeta_2(i+1)e^{-(S_i - S_k)} + b}, \quad \mathbf{P}_z^+ \text{-п.н.},$$

где

$$a = 32 \frac{p(u^*)^2}{u_*}, \quad b = 4(u^*)^2.$$

Следовательно, для $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_p)$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{f}}(W_z^+ = 0 \mid \mathbf{Z}(k) = \mathbf{i}) \leq \left(1 - \frac{1}{a \sum_{i=k}^{\infty} \zeta_2(i+1)e^{-(S_i - S_k)} + b}\right)^{\|\mathbf{i}\|}, \quad \mathbf{P}_z^+ \text{-п.н.}$$

В частности, $\mathbf{P}_z^+$ -п.н.

$$\mathbb{P}_{\mathbf{f}}(W_z^+ = 0 \mid \mathbf{Z}^*(l) = \mathbf{i}) \leq \left(1 - \frac{1}{a \sum_{i=v(l)}^{\infty} \zeta_2(i+1)e^{-(S_i - S_{v(l)})} + b}\right)^{\|\mathbf{i}\|}. \quad (39)$$

Заметим, что согласно лемме 2.6 в [7] распределение величины, стоящей в правой части (39), не зависит от l . Следовательно, для всех $t \geq 0$ $\mathbf{P}_z^+$ -п.н. справедлива оценка

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbf{f}}(W_z^+ = 0) &= \mathbb{E}_{\mathbf{f}}[\mathbb{P}_{\mathbf{f}}(W_z^+ = 0 \mid \mathbf{Z}^*(l))] \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbf{f}} \left[\left(1 - \frac{1}{a \sum_{i=v(l)}^{\infty} \zeta_2(i+1)e^{-(S_i - S_{v(l)})} + b}\right)^{\|\mathbf{Z}^*(l)\|} \right] \\ &\leq \mathbb{P}_{\mathbf{f}}(\|\mathbf{Z}^*(l)\| \leq t) + \left(1 - \frac{1}{a \sum_{i=v(l)}^{\infty} \zeta_2(i+1)e^{-(S_i - S_{v(l)})} + b}\right)^t. \end{aligned} \quad (40)$$

Усредняя (40) по мере $\mathbf{P}_z^+$, переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$ и используя (29), получаем, что

$$\mathbf{P}_z^+(W_z^+ = 0) \leq \mathbf{P}_z^+(\|\mathbf{Z}^*(l)\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty) + \mathbf{E}_z^+ \left[1 - \frac{1}{a \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{\beta}(i) + b} \right]^t.$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, получаем соотношение

$$\mathbf{P}_z^+(W_z^+ = 0) - \mathbf{P}_z^+(\|\mathbf{Z}^*(l)\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty) \leq \mathbf{P}_z^+ \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{\beta}(i) = \infty \right) = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}_z^+(W_z^+ = 0) = \mathbf{P}_z^+(\|\mathbf{Z}^*(l)\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty) = \mathbf{P}_z^+(\|\mathbf{Z}(n)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty).$$

Теорема 3 доказана.

3. Доказательства теорем 1 и 2

Для $0 \leq k \leq n$ положим

$$L_{k,n} = \min_{0 \leq j \leq n-k} (S_{k+j} - S_k), \quad L_n = L_{0,n} = \min(S_0, \dots, S_n), \quad (41)$$

и пусть

$$\tau_n = \min\{0 \leq i \leq n: S_i = L_n\} \quad (42)$$

— самая левая точка, в которой случайное блуждание $S_0, \dots, S_n$ на интервале $[0, n]$ достигает минимума.

Следующие два результата служат основой при доказательстве теорем 1 и 2.

Лемма 7. *Предположим, что выполнено условие А3. Пусть $k \in \mathbf{N}_0$, а Y_k — ограниченная действительная $\mathcal{F}_k$ -измеримая случайная величина. Тогда для любого $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, при $n \rightarrow \infty$,*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{z}}[Y_k \mid L_n \geq 0] \rightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{z}}^+ Y_k.$$

Более того, если Y_n , $n \in \mathbf{N}_0$, — последовательность равномерно ограниченных действительных $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ -согласованных случайных величин, сходящаяся $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^p$ -н.н. к некоторой случайной величине Y_∞ , то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{z}}[Y_n \mid L_n \geq 0] \rightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{z}}^+ Y_\infty.$$

Лемма 8. *Предположим, что выполнено условие А3. Пусть $V_1, V_2, \dots$ — последовательность равномерно ограниченных действительных случайных величин таких, что для каждого $k \geq 0$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$,*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{z}}[V_n; \mathbf{Z}(k) \neq \mathbf{0}, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathcal{F}_k] = \mathbf{P}(L_n \geq 0)(V_{k,\infty} + o(1)), \quad \mathbf{P}_{\mathbf{z}}\text{-н.н.}$$

при $n \rightarrow \infty$ для некоторой последовательности случайных величин $V_{1,\infty} = V_{1,\infty}(\mathbf{z})$, $V_{2,\infty} = V_{2,\infty}(\mathbf{z}), \dots$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{z}}[V_n; \mathbf{Z}(\tau_n) \neq \mathbf{0}] = \mathbf{P}(L_n \geq 0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{z}}[V_{k,\infty}; \tau_k = k] + o(1) \right), \quad (43)$$

где ряд в правой части является абсолютно сходящимся.

Для случая $p = 1$ леммы 7 и 8 были установлены в статье [7]. Анализ аргументов, приведенных при доказательстве этих лемм в указанной работе, показывает, что те же самые рассуждения справедливы и для любого $p \geq 1$.

Теперь, опираясь на теорему 3 и леммы 7–8, можно убедиться в справедливости утверждений теорем 1 и 2, следуя канве доказательств теорем 1.1 и 1.3 работы [7]. Мы приведем здесь соответствующие аргументы только для полноты изложения.

Доказательство теоремы 1. Для $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, и $n \in \mathbf{N}_0$ введем функцию

$$\psi(\mathbf{z}, n) = \mathbf{P}_{\mathbf{z}}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, L_n \geq 0).$$

Полагая

$$\begin{aligned} Y_n &= I\{\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\}, \\ Y_\infty &= I\{\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \text{ при всех } n \geq 0\} \end{aligned} \quad (44)$$

в лемме 7, мы видим, что при $n \rightarrow \infty$ для $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$

$$\psi(\mathbf{z}, n) \sim \mathbf{P}(L_n \geq 0) \mathbf{E}_z^+[Y_\infty]. \quad (45)$$

Известно [23], что при $n \rightarrow \infty$ при выполнении условия A3

$$\mathbf{P}(L_n \geq 0) \sim n^{-(1-a)} l(n), \quad (46)$$

где $l(n)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Положим

$$V_n = I\{\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\}.$$

Ясно, что при $0 \leq k \leq n$

$$\mathbf{E}_z[V_n, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathcal{F}_k] = \psi(\mathbf{Z}(k), n - k), \quad \mathbf{P}_z\text{-п.н.}, \quad (47)$$

где величина $L_{k,n}$ определена в (41). Из (45) и (47) следует, что случайные величины V_n , $n \geq 0$, и

$$V_{k,\infty} = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}(k)}^+(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, n = 0, 1, 2, \dots) = \mathbf{E}_{\mathbf{Z}(k)}^+[Y_\infty], \quad k \geq 0,$$

удовлетворяют условиям леммы 8. Значит, при $n \rightarrow \infty$

$$q_i(n) = \mathbf{P}_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) \sim \theta_i \mathbf{P}\{L_n \geq 0\}, \quad (48)$$

где

$$\theta_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{e}_i}[\mathbf{E}_{\mathbf{Z}(k)}^+[Y_\infty]; \tau_k = k] < \infty, \quad (49)$$

величина τ_k определена в (42). Заметим, что $\theta_i > 0$, так как в силу леммы 4

$$\mathbf{P}_z^+(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \text{ при всех } n \geq 0) > 0$$

для любого $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть ϕ — ограниченная непрерывная функция на пространстве $D[0, 1]$ функций, определенных на $[0, 1]$, непрерывных справа и имеющих левосторонние пределы. Для $s \in \mathbf{R}$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, положим

$$W^s(t) = W_z^s(t) = e^{-s} W_z^+, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где случайная величина W_z^+ взята из теоремы 3. Согласно теореме 3, для $r_n \leq n$, фиксированных $s \in \mathbf{R}$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, процесс $e^{-s} W_{r_n, n, \mathbf{z}}$ сходится к W_z^s в равномерной метрике при $r_n \rightarrow \infty$. Следовательно, в метрике Скорохода на пространстве $D[0, 1]$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимоть

$$\begin{aligned} Y_n &= \phi(e^{-s} W_{r_n, n, \mathbf{z}}) I\{\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}\} \\ &\rightarrow Y_\infty = \phi(W_z^s) I\{W_z^+ > 0\}, \quad \mathbf{P}_z^+\text{-п.н.} \end{aligned}$$

Для $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, и $r \leq n$ введем функцию

$$\psi(\mathbf{z}, s, r, n) = \mathbf{E}_z^+[\phi(e^{-s} W_{r,n,\mathbf{z}}); \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, L_n > 0].$$

Применяя лемму 7, получаем равенство

$$\psi(\mathbf{z}, s, r_n, n) = \mathbf{P}(L_n > 0)(\mathbf{E}_z^+[\phi(W_z^s); W_z^+ > 0] + o(1)).$$

Ясно, что для $k \leq r \leq n$

$$\mathbf{E}_z^+[\phi(W_{r,n,\mathbf{z}}); \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathcal{F}_k] = \psi(\mathbf{Z}(k), S_k, r - k, n - k), \quad \mathbf{P}_z^+ \text{-п.н.}$$

Следовательно, мы можем применить лемму 8 к случайным величинам

$$\begin{aligned} V_n &= \phi(W_{r_n,n,\mathbf{z}})I\{\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}\}, \\ V_{k,\infty} &= \mathbf{E}_{\mathbf{Z}(k)}^+[\phi(W^{S_k}); W^+ > 0]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь теоремой 1, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}_z^+[\phi(W_{r_n,n,\mathbf{z}}) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}] \rightarrow \int \phi(\omega) \lambda_z(d\omega).$$

Здесь λ_z — мера на пространстве функций $D[0, 1]$, определяемая соотношением

$$\lambda_z(d\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_z[\lambda_{\mathbf{Z}(k), S_k}(d\omega); \mathbf{Z}(k) \neq \mathbf{0}, \tau_k = k]}{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_z[\mathbf{P}_{\mathbf{Z}(k)}^+[Y_\infty]; \tau_k = k]},$$

где

$$\lambda_{z,s}(d\omega) = \mathbf{P}_z^+[W_z^s \in d\omega, W_z^+ > 0],$$

а величина Y_∞ введена в (44). В силу теоремы 3, мера $\lambda_{z,s}$ имеет массу $\mathbf{P}_z^+(W_n > 0, n = 0, 1, \dots)$. Таким образом, λ_z является вероятностной мерой. Из теоремы 3 вытекает, что мера $\lambda_{z,s}$ целиком сосредоточена на множестве строго положительных постоянных функций. Этот же факт справедлив и для меры λ_z . Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Smith W. L., Wilkinson W., On branching processes in random environment. *Ann. Math. Statist.* (1969) **40**, №3, 814–827.
2. Athreya K. B., Karlin S., On branching processes with random environments: I, II. *Ann. Math. Statist.* (1971) **42**, №5–6, 1499–1520, 1843–1858.
3. Tanny D., On multitype branching processes in a random environment. *Adv. Appl. Probab.* (1981) **13**, №3, 464–497.
4. Weissener E. W., Multitype branching processes in random environments. *J. Appl. Probab.* (1971) **8**, №1, 17–31.
5. Kaplan N., Some results about multidimensional branching processes with random environments. *Ann. Probab.* (1974) **2**, №3, 441–455.
6. Афанасьев В. И., Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1993) **5**, №1, 45–58.

7. Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A., Criticality for branching processes in random environment. *Ann. Probab.* (2005) **33**, №2, 645–673.
8. Geiger J., Kersting G., The survival probability of a critical branching process in random environment. *Теория вероятностей и ее применения* (2000) **45**, №3, 607–615.
9. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде, I: предельные теоремы. *Теория вероятностей и ее применения* (2003) **48**, №2, 274–300.
10. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде, II: конечномерные распределения. *Теория вероятностей и ее применения* (2004) **49**, №2, 231–268.
11. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций. *Теория вероятностей и ее применения* (2006) **51**, №1, 22–46.
12. Vatutin V. A., Kyprianou A. E., Branching processes in random environment die slowly. In: *Proc. DMTCS, AI*, 2008, pp. 375–396.
13. Ватутин В. А., Топчий В. А., Максимум критических процессов Гальтона–Ватсона и непрерывные слева случайные блуждания. *Теория вероятностей и ее применения* (1997) **42**, №1, 21–34.
14. Ватутин В. А., Вахтель В. И., Внезапное вырождение критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (2009) **54**, №3, 417–438.
15. Дьяконова Е. Е., Об асимптотике вероятности невырождения многомерного ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1999) **11**, №1, 113–128.
16. Дьяконова Е. Е., Критические многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде. *Дискретная математика* (2007) **19**, №4, 23–41.
17. Dyakonova E. E., Geiger J., Vatutin V. A., On the survival probability and a functional limit theorem for branching processes in random environment. *Markov Process. Related Fields* (2004) **10**, №2, 289–306.
18. Козлов М. В., Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №4, 813–825.
19. Athreya K. B., Ney P. E., *Branching Processes*. Springer, Berlin, 1972.
20. von Bahr B., Esseen C.-G., Inequalities for the r th moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$. *Ann. Math. Statist.* (1965) **3**, 299–303.
21. Bertoin J., Doney R. A., On conditioning a random walk to stay nonnegative. *Ann. Probab.* (1994) **22**, 2152–2167.
22. Doney R. A., Spitzer’s condition and ladder variables in random walks. *Theory Probab. Related Fields* (1995) **101**, 577–580.
23. Рогозин Б. А., Распределение первого лестничного момента и высоты и флуктуации случайного блуждания. *Теория вероятностей и ее применения* (1971) **16**, №4, 593–613.
24. Tanaka H., Time reversal of random walks in one dimension. *Tokyo J. Math.* (1989) **12**, 159–174.
25. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, 2. Мир, Москва, 1984.

Статья поступила 24.08.2009.