Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Чупрунов, Б. И. Хамдеев, О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, если число ошибок случайно, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 2, 41–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1093>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:41:33

О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, если число ошибок случайно

© 2010 г. А. Н. Чупрунов, Б. И. Хамдеев

Рассматривается вероятность $\mathbf{P}(A)$ события A , состоящего в том, что при кодировании кодом типа Хэмминга n сообщений, каждое из которых состоит из N блоков, все ошибки будут устранены. При этом предполагается, что i -е сообщение имеет $m_i = m_i(\omega_1)$ ошибок, $\omega_1 \in \Omega_1$, где m_i — независимые одинаково распределенные случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbf{P}_1)$. Вероятность $\mathbf{P}(A)$ определяется в терминах обобщенной схемы размещения. Показано, что если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha = n/N \rightarrow \alpha_0 < \infty$, то вероятности $\mathbf{P}(A)$ сходятся для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$ к одному и тому же пределу, и найдено значение этого предела.

1. Введение

Рассматривается код, который позволяет исправить не больше одной ошибки типа замещения. Частным случаем такого кода является код Хэмминга (см., например, [1]). Работа посвящена изучению вероятности события A , состоящего в том, что в n сообщениях, каждое из которых состоит из N блоков, причем каждый блок кодируется нашим помехоустойчивым кодированием, все ошибки будут исправлены.

Пусть случайная величина ξ_{ij} есть число ошибок в j -м блоке i -го сообщения, случайная величина m_i — число ошибок в i -м сообщении. Будем предполагать, что ξ_{ij} — независимые неотрицательные целочисленные случайные величины, распределенные так же, как случайная величина ξ , m_i — независимые неотрицательные целочисленные случайные величины, распределенные так же, как случайная величина m . Случайные величины ξ_{ij} определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, случайные величины m_i определены на вероятностном пространстве $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbf{P}_1)$. Тогда зависящее от случайного параметра $\omega_1 \in \Omega_1$ событие

$$A = A(\omega_1) = \bigcap_{i=1}^n A_i(\omega_1),$$

где событие

$$A_i = A_i(\omega_1) = \{\xi_{i1} \leq 1, \xi_{i2} \leq 1, \dots, \xi_{iN} \leq 1 \mid \xi_{i1} + \dots + \xi_{iN} = m_i(\omega_1)\}$$

состоит в том, что в i -м сообщении каждый блок имеет не более одной ошибки при условии, что число ошибок в i -м сообщении равно $m_i(\omega_1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(A(\omega_1)) \\ &= (\mathbf{P}\{\xi_1 \leq 1, \xi_2 \leq 1, \dots, \xi_N \leq 1 \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = m_i(\omega_1)\})^n, \end{aligned} \quad (1)$$

где определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ независимы и распределены так же, как случайная величина ξ .

Мы будем предполагать, что распределение случайной величины ξ имеет следующий вид, зависящий от параметра θ . Пусть для последовательности неотрицательных чисел $b_0, b_1, \dots$ радиус сходимости R ряда

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!},$$

положителен. Тогда случайная величина $\xi = \xi(\theta)$, $0 < \theta < R$, распределена по следующему закону:

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k! B(\theta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что события $A_i(\omega_1)$ не зависят от θ . Везде далее мы будем предполагать, что $b_0, b_1 > 0$.

Пусть $\alpha = n/N$. Нами показано, что если $\mathbf{E}_1 m! \lambda^{-m} < \infty$ для некоторого $0 < \lambda < \infty$, то

$$\mathbf{P}(A) \rightarrow \exp\left(-\frac{\alpha_0}{2} \frac{b_2 b_0}{(b_1)^2} \mathbf{E} I_{\{m \geq 2\}} m(m-1)\right)$$

почти наверное при $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$ (теорема 1). Если случайные величины ξ_{ij} имеют пуассоновское распределение (случай $b_0 = b_1 = \dots$), то этот результат верен при более слабом условии $\mathbf{E}_1 m^2 < \infty$ (теорема 2).

Событие $A_i(\omega_1)$ является событием обобщенной схемы размещения: событие $A_i(\omega_1)$ состоит в том, что в обобщенной схеме размещения $m_i(\omega_1)$ частиц по N ячейкам в каждой ячейке оказалось не более одной частицы. Обобщенная схема размещения введена в [2] (см. также [3]). Случайные величины $\xi_i(\theta)$ были введены в [4]. В [4–6] получены предельные теоремы для сумм случайных величин $\xi_i(\theta)$. Теорема 1 настоящей работы основана на уточнении пуассоновской предельной теоремы из [4], полученном в лемме 1.

2. Основная теорема

Рассмотрим вероятность

$$B(m, N) = \mathbf{P}\{\xi_j \leq 1, 1 \leq j \leq N, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_N = m\}.$$

Легко заметить, что

$$B(m, N) = \binom{N}{m} \left(\frac{b_1 \theta}{B(\theta)}\right)^m \left(\frac{b_0}{B(\theta)}\right)^{N-m}.$$

Следовательно, если $N\theta b_1/b_0 \rightarrow \lambda$ при $N \rightarrow \infty$, то при любом фиксированном $m = 0, 1, \dots$

$$B(m, N) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}. \quad (2)$$

Мы будем предполагать, что $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$, $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$. Также мы будем использовать неравенства

$$\binom{N}{k} \frac{1}{N^k} \leq \frac{1}{k!}, \quad \frac{b_0}{B(\theta)} \leq 1. \quad (3)$$

В [4] (теорема 2) доказано, что, если $N\theta b_1/b_0 \rightarrow \lambda$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N = m\} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \quad (4)$$

для любого фиксированного $m = 0, 1, \dots$. Нам потребуется следующее уточнение этого утверждения.

Лемма 1. Пусть

$$\theta = \theta(N) = \frac{b_0 \lambda}{b_1 N} = \frac{C_1}{N}, \quad C_2 = \frac{b_2 b_0 \lambda^2}{2(b_1)^2}.$$

Выберем $N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что

$$C_3 = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{b_i}{i!} (\theta(N_0))^{i-3} < \infty.$$

Тогда при $N > N_0$ и $m \leq N$ справедливы следующие соотношения: для $m = 0, 1$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = m\} = B(m, N); \quad (5)$$

для $m = 2$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = m\} = B(m, N) + \frac{1}{N} \frac{b_2(C_1)^2}{2B(\theta)} B(m-2, N-1); \quad (6)$$

для $m = 3$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = m\} = B(m, N) + \frac{1}{N} \frac{b_2(C_1)^2}{2B(\theta)} B(m-2, N-1) + \frac{C}{N^2}, \quad (7)$$

где $0 \leq C \leq C_4$, $C_4 = (C_1)^3 e^\lambda b_3 / 6b_0$; для $m > 3$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = m\} = B(m, N) + \frac{1}{N} \frac{b_2(C_1)^2}{2B(\theta)} B(m-2, N-1) + \frac{C}{N^2}, \quad (8)$$

где $0 \leq C \leq C_5$ и $C_5 = C_5(\lambda) = (C_1)^3 e^\lambda b_3 / 6b_0 + (C_3 C_1^3 + (C_2)^2 / 2) e^{C_2/N + \lambda}$.

Доказательство. Введем обозначения

$$v_1 = \sum_{j=1}^N \xi_j I_{\{\xi_j \leq 1\}}, \quad v_2(k) = \sum_{j=1}^k \xi_j I_{\{\xi_j \geq 2\}}.$$

При $k = N$ мы будем обозначать случайную величину $v_2(k)$ через v_2 . Рассмотрим выражение

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = m\} = \sum_{i=0}^m \mathbf{P}(v_1 = m - i, v_2 = i). \quad (9)$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}(v_1 = m, v_2 = 0) = B(m, N), \quad \mathbf{P}(v_1 = m - 1, v_2 = 1) = 0 \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(v_1 = m - 2, v_2 = 2) &= \sum_{j=1}^N \mathbf{P}(v_1 = m - 2, \xi_j = 2, \xi_i < 2, i \neq j) \\ &= N \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^N \xi_j I_{\{\xi_j \leq 1\}} = m - 2, \xi_1 = 2, \xi_i < 2, 2 \leq i \leq N\right) \\ &= N \mathbf{P}(\xi_1 = 2) \mathbf{P}\left(\sum_{j=2}^N \xi_j I_{\{\xi_j \leq 1\}} = m - 2, \xi_i < 2, 2 \leq i \leq N\right) \\ &= N \frac{b_2 \theta^2}{2B(\theta)} B(m - 2, N - 1), \end{aligned} \quad (11)$$

и так как

$$\mathbf{P}(\xi = 1) \leq \frac{\lambda}{N},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(v_1 = m - 3, v_2 = 3) &= \binom{N}{m - 3} (\mathbf{P}(\xi = 1))^{m-3} \mathbf{P}(v_2(N - (m - 3)) = 3) \\ &\leq \binom{N}{m - 3} \frac{\lambda^{m-3}}{N^{m-3}} (N - (m - 3)) \frac{b_3}{6B(\theta)} \theta^3 \leq \frac{e^\lambda}{N^2} \frac{b_3}{6b_0} C_1^3. \end{aligned} \quad (12)$$

Равенства (9) и (10) влекут (5), равенства (9), (10) и (11) влекут (6), равенства (9), (10), (11) и оценка (12) влекут (7).

Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=4}^m \mathbf{P}(v_1 = m - i, v_2 = i) = \sum_{i=4}^m \binom{N}{m - i} (\mathbf{P}(\xi = 1))^{m-i} \mathbf{P}(v_2(N - (m - i)) = i). \quad (13)$$

Введем обозначение

$$v_3(k) = \sum_{j=1}^k \xi_j I_{\{\xi_j \geq 3\}}.$$

Так как

$$\mathbf{P}(\xi = 2) \leq \frac{C_2}{N^2}, \quad \mathbf{P}(\xi = 2) \leq \frac{C_2}{N^2},$$

справедливы оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(v_2(N - (m - i)) = i) &= \sum_{k=0}^{[i/2]} \binom{N - (m - i)}{k} (\mathbf{P}(\xi = 2))^k \\ &\quad \times \mathbf{P}(v_3(N - (m - i) - k) = i - 2k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{[i/2]} \binom{N - (m - i)}{k} \left(\frac{C_2}{N^2}\right)^k \\ &\quad \times \mathbf{P}(v_3(N - (m - i) - k) = i - 2k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{[i/2]} \frac{1}{k!} \left(\frac{C_2}{N}\right)^k \mathbf{P}(v_3(N - (m - i) - k) = i - 2k). \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}(v_3(k) = j) \leq \mathbf{P}(v_3(k) \geq j) \leq k \mathbf{P}(\xi \geq 3) \leq \frac{C_3}{N^2}$$

при $k \leq N$ и $j \geq 3$. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(v_2(N - (m - i)) = i) &\leq \sum_{k=0}^{(i-1)/2} \frac{(C_2/N)^k}{k!} \frac{C_3 C_1^3}{N^2} \\ &\leq \frac{C_3 C_1^3}{N^2} \exp\left(\frac{C_2}{N}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

если i нечетно, и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(v_2(N - (m - i)) = i) &\leq \sum_{k=0}^{i/2-1} \frac{(C_2/N)^k}{k!} \frac{C_3 C_1^3}{N^2} + \frac{(C_2/N)^{i/2}}{(i/2)!} \\ &\leq \frac{C_3 C_1^3}{N^2} \exp\left(\frac{C_2}{N}\right) + \frac{(C_2/N)^{i/2}}{(i/2)!}, \end{aligned} \quad (16)$$

если i четно. Из (14), (15) и (16) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\sum_{i=4}^m \mathbf{P}(v_1 = m - i, v_2 = i) \\ &\leq \frac{C_3 C_1^3}{N^2} e^{C_2/N} \sum_{i=4}^m \binom{N}{m-i} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{m-i} + \sum_{\substack{4 \leq i \leq m \\ i \in 2\mathbb{N}}} \binom{N}{m-i} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{m-i} \frac{(C_2/N)^{i/2}}{(i/2)!} \\ &\leq \frac{C_3 C_1^3}{N^2} e^{\lambda + C_2/N} + \left(\frac{C_2}{N}\right)^2 \sum_{\substack{4 \leq i \leq m \\ i \in 2\mathbb{N}}} \binom{N}{m-i} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{m-i} \frac{(C_2/N)^{i/2-2}}{(i/2-2)!} \\ &\leq \frac{C_3 C_1^3}{N^2} e^{C_2/N + \lambda} + \frac{(C_2)^2}{2N^2} e^{C_2/N} \sum_{i=4}^m \binom{N}{m-i} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{m-i} \leq \frac{1}{N^2} e^{C_2/N + \lambda} \left(C_3 C_1^3 + \frac{(C_2)^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $2\mathbf{N}$ — множество четных чисел.

Тогда (9), (10), (11), (12) и (17) влекут (8). Доказательство закончено.

Замечание 1. Лемма 1 показывает, что распределение суммы $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N = m$ хорошо аппроксимируется биномиальным распределением, которое, согласно пуассоновской предельной теореме, сходится к пуассоновскому распределению. Таким образом, мы получаем новое доказательство теоремы 2 из [4]. Используя лемму 1, можно также дать новое доказательство локальной центральной предельной теоремы из [4]. Для этого достаточно в (8) оценить величины $B(m, N)$ с помощью теоремы Муавра–Лапласа. Из леммы 1 следует, что сходимость в (4) равномерна по λ , принадлежащим ограниченному множеству.

Мы будем использовать следующее простое следствие усиленного закона больших чисел.

Лемма 2. Пусть $\eta, \eta_i, i \in \mathbf{N}$, — такие независимые одинаково распределенные случайные величины, что $\mathbf{E}|\eta| < \infty$. Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \eta_i \rightarrow \alpha_0 \mathbf{E}\eta$$

почти наверное, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Лемма 2 следует из усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова, примененного к равенству

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \eta_i = \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i.$$

Теорема 1. Пусть $\mathbf{E}_1 m! \lambda^{-m} < \infty$ для некоторого $0 < \lambda < \infty$. Тогда почти наверное

$$\mathbf{P}(A) \rightarrow \exp\left(-\frac{\alpha_0}{2} \frac{b_2 b_0}{(b_1)^2} \mathbf{E} I_{\{m \geq 2\}} m(m-1)\right),$$

если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Доказательство. Пусть

$$\theta = \theta(N) = \frac{b_0 \lambda}{b_1 N}.$$

Условие $\mathbf{E}_1 m! \lambda^{-m} < \infty$ влечет неравенство $\mathbf{E}_1 I_{\{m \geq 2\}} m(m-1) < \infty$. Поэтому по лемме 2 найдется $\Omega' \subset \Omega_1$ такое, что $\mathbf{P}_1(\Omega') = 1$ и для всех $\omega_1 \in \Omega'$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n m(\omega_1)! \lambda^{-m(\omega)} \rightarrow \alpha_0 \mathbf{E}_1 m! \lambda^{-m}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n I_{\{m_i(\omega_1) \geq 2\}} m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1) \rightarrow \alpha_0 \mathbf{E}_1 I_{\{m \geq 2\}} m(m-1), \quad (19)$$

если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Пусть $\omega_1 \in \Omega'$. Условия (18) и (19) влекут сходимости

$$\frac{1}{N} m_n(\omega_1)! \lambda^{-m_n(\omega_1)} \rightarrow 0, \quad \frac{m_n(\omega_1)(m_n(\omega_1) - 1)}{N} \rightarrow 0,$$

если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$. Поэтому

$$\frac{m_n(\omega_1)}{N} \rightarrow 0,$$

если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$. Следовательно,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{N} m_i(\omega_1)! \lambda^{-m_i(\omega_1)} e^{-m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1)-1)/2} \rightarrow 0, \quad (20)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{m_i(\omega_1)}{N} \rightarrow 0, \quad (21)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{N} \rightarrow 0, \quad (22)$$

если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{B(m_i(\omega_1) - 2, N - 1)}{B(m_i(\omega_1), N)} \\ &= \frac{(N - 1) \dots (N - 1 - (m_i(\omega_1) - 2) + 1)}{(m_i(\omega_1) - 2)!} \left(\frac{b_1 \theta}{B(\theta)} \right)^{m_i(\omega_1) - 2} \left(\frac{b_0}{B(\theta)} \right)^{N - 1 - (m_i(\omega_1) - 2)} \\ & \quad \times \left(\frac{N(N - 1) \dots (N - m_i(\omega_1) + 1)}{m_i(\omega_1)!} \left(\frac{b_1 \theta}{B(\theta)} \right)^{m_i(\omega_1)} \left(\frac{b_0}{B(\theta)} \right)^{N - m_i(\omega_1)} \right)^{-1} \\ &= \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{N(N - m_i(\omega_1) + 2)} \frac{b_0 B(\theta)}{(b_1 \theta)^2} = \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{1 - m_i(\omega_1)/N + 2/N} \frac{b_0 B(\theta)}{(b_1 C_1)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Поэтому при $m_i(\omega_1) \geq 2$ по лемме 1 получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_i(\omega_1)) &= \frac{B(m_i(\omega_1), N)}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N = m_i(\omega_1)\}} \\ &= \frac{B(m_i(\omega_1))}{B(m_i(\omega_1), N) + (b_2 C_1^2 / 2B(\theta)) B(m_i(\omega_1) - 2, N - 1) / N + C'_i / N^2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{N} \frac{b_2 C_1^2}{2B(\theta)} \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{1 - m_i(\omega_1)/N + 2/N} \frac{b_0 B(\theta)}{(b_1 C_1)^2} + \frac{1}{B(m_i(\omega_1), N)} \frac{C'_i}{N^2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

где $0 < C'_i \leq C_5$.

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{B(m_i(\omega_1), N)} &= \frac{m_i(\omega_1)}{N} \frac{m_i(\omega_1) - 1}{N - 1} \dots \frac{1}{N - m_i(\omega_1) + 1} \left(\frac{N}{\lambda} \right)^{m_i(\omega_1)} \left(\frac{B(\theta)}{b_0} \right)^N \\ &= \frac{m_i(\omega_1)!}{\lambda^{m_i(\omega_1)}} \exp \left(- \sum_{k=1}^{m_i(\omega_1)-1} \ln \left(1 - \frac{k}{N} \right) \right) \left(\frac{B(\theta)}{b_0} \right)^N \\ &< m_i(\omega_1)! \lambda^{-m_i(\omega_1)} e^{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1)-1)/(2N)} \left(\frac{B(\theta)}{b_0} \right)^N \end{aligned} \quad (24)$$

и при $N \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{B(\theta)}{b_0} \right)^N \rightarrow e^\lambda, \quad (25)$$

в силу (20), (21) и (22) существуют такие $n_0 \in \mathbf{N}$ и $\varepsilon > 0$, что

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} I_{\{m_i(\omega_1) \geq 2\}} \left(\frac{1}{N} \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{2} \frac{1}{1 - m(\omega_1)/N + 2/N} \frac{b_0 b_2}{(b_1)^2} + \frac{1}{B(m_i(\omega_1), N)} \frac{C'_i}{N^2} \right) < 1$$

и

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{m_i(\omega_1)}{N} < 1, \quad \max_{1 \leq i \leq n} \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{N} < 1$$

при $N, n > n_0$, $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$. Тогда, используя неравенство $-x \leq \ln(1 - x) \leq -x + x^2/2$, справедливое для $0 < x < 1$, при $N, n > n_0$, $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, получаем, что

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n I_{\{m_i(\omega_1) \geq 2\}} \left(\frac{1}{N} \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{2} \frac{1}{1 - m_i(\omega_1)/N + 2/N} \frac{b_0 b_2}{(b_1)^2} + \frac{1}{B(m_i(\omega_1), N)} \frac{C'_i}{N^2} \right) \\ & \leq \ln(\mathbf{P}(A)) \leq - \sum_{i=1}^n I_{\{m_i(\omega_1) \geq 2\}} \left(\frac{1}{N} \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{2} \frac{1}{1 - m_i(\omega_1)/N + 2/N} \frac{b_0 b_2}{(b_1)^2} + \frac{1}{B(m_i(\omega_1), N)} \frac{C'_i}{N^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_{\{m_i(\omega_1) \geq 2\}} \left(\frac{1}{N} \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{2} \right. \\ & \quad \times \frac{1}{1 - m_i(\omega_1)/N + 2/N} \frac{b_0 b_2}{(b_1)^2} + \left. \frac{1}{B(m_i(\omega_1), N)} \frac{C'_i}{N^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & - \left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{1 - m_i(\omega_1)/N + 2/N} \right) \frac{1}{2} \frac{b_0 b_2}{(b_1)^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n I_{\{m_i(\omega_1) \geq 2\}} (m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)) \\ & - \frac{C_5}{N^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{B(m_i(\omega_1), N)} \\ & \leq \ln(\mathbf{P}(A)) \leq - \left(\min_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{1 - m_i(\omega_1)/N + 2/N} \right) \\ & \quad \times \frac{1}{2} \frac{b_0 b_2}{(b_1)^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n I_{\{m_i(\omega_1) \geq 2\}} (m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)) \right) \\ & \quad \times \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{N} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{1 - m_i(\omega_1)/N + 2/N} \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{2} \right) \frac{b_0 b_2}{(b_1)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{C_5}{N^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{B(m_i(\omega_1), N)} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Из (24) получаем

$$0 < \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{B(m_i(\omega_1), N)} \leq \exp \left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1)}{2N} \right) \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^n m_i(\omega_1)! \lambda^{-m_i(\omega_1)}.$$

Поэтому в силу (18) и (22)

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{B(m_i(\omega_1), N)} \rightarrow 0, \quad (27)$$

если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$. Неравенство (26) с учетом (19), (21), (27), доказывает теорему.

Замечание 2. Если m — такая пуассоновская случайная величина, что ее параметр $\lambda_1 < \lambda$, то $\mathbf{E}_1 m! \lambda^{-m} < \infty$. Поэтому m удовлетворяет условию теоремы 1.

3. Пуассоновский случай

Если $\xi_i(\theta)$ — независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины с параметром θ (случай $b_i = 1, i = 0, 1, 2, \dots$), то событие $A_i(\omega_1)$ является событием схемы размещения $m_i(\omega_1)$ различных частиц по N ячейкам [3]. Следовательно, его вероятность равна

$$\mathbf{P}(A_i(\omega_1)) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{m_i(\omega_1) - 1}{N}\right). \quad (28)$$

Поэтому в этом случае справедлив аналог теоремы 1 с более слабыми условиями на m .

Теорема 2. Пусть $\mathbf{E}_1 m^2 < \infty$. Предположим, что $\xi_i(\theta)$ — независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины с параметром θ . Тогда, если $\alpha \rightarrow \alpha_0$ при $n, N \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}(A) \rightarrow \exp \left(-\frac{\alpha_0}{2} \mathbf{E} I_{\{m \geq 2\}} m(m-1) \right) \quad (29)$$

почти наверное.

Доказательство. По лемме 2 найдется $\Omega' \subset \Omega_1$ такое, что $\mathbf{P}_1(\Omega') = 1$ и для всех $\omega_1 \in \Omega'$ выполнено (19). Пусть $\omega_1 \in \Omega'$. Выберем такие $n_0 \in \mathbf{N}$ и $\varepsilon > 0$, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{m_i(\omega_1)}{N} < 1$$

при $N, n > n_0, |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$. Тогда, используя неравенство

$$-x < \ln(1-x) < -x + \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 1,$$

для оценки (28), при $N, n > n_0, |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, получаем, что

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i(\omega_1)-1} \frac{j}{N} \leq \ln(\mathbf{P}(A)) \leq -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i(\omega_1)-1} \frac{j}{N} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_j(\omega_1)-1} \left(\frac{j}{N}\right)^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n I_{\{m_i(\omega_1) \geq 2\}} m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1) &\leq \ln(\mathbf{P}(A)) \\
 &\leq \left(-1 + \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{m_i(\omega_1)}{N} \right) \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n I_{\{m_i(\omega_1) \geq 2\}} m_i(\omega_1)(m_i(\omega_1) - 1). \quad (30)
 \end{aligned}$$

Из (30) следует (29).

Для случая, когда $m_i = m$ — постоянные величины, теорема 2 получена в [7].

Список литературы

1. Новиков Ф. А., *Дискретная математика для программистов*. Питер, Санкт-Петербург, 2004.
2. Колчин В. Ф., Один класс предельных теорем для условных распределений. *Литовский матем. сб.* (1968) **8**, №1, 53–63.
3. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
4. Колчин А. В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. *Дискретная математика* (2003) **15**, №4, 143–157.
5. Колчин А. В., Колчин В. Ф., О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2006) **18**, №4, 113–127.
6. Колчин А. В., Колчин В. Ф., Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2007) **19**, №3, 15–21.
7. Avkhadiev F. G., Chuprunov A. N., The probability of a successful allocation of ball groups by boxes. *Lobachevskii J. Math.* (2007) **25**, 3–5.

Статья поступила 17.10.2008.

Переработанный вариант поступил 11.02.2009.