Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Суриков, Время жизни случайной двоичной последовательности (параллельной системы), *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 2, 51–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1094>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 03:12:59

Время жизни случайной двоичной последовательности (параллельной системы)

© 2010 г. В. Н. Суриков

В статье вводится и изучается вероятностная модель параллельной системы, состоящей из m элементов и предназначенная для выполнения однородных заданий. На первом этапе на каждый элемент системы поступает одно задание из общего числа n заданий. Результатом работы элемента является либо исполнение задания, либо отказ элемента. В случае отказа элемент исключается из системы, а невыполненное задание возвращается в очередь заданий, ожидающих исполнения. На втором этапе в систему направляется m_1 заданий, где m_1 — число элементов системы, оставшихся исправными после первого этапа, и так далее. В статье проведен подробный анализ предложенной модели в случае, когда каждый элемент системы выполняет задание независимо от остальных элементов с одинаковой вероятностью.

1. Определения

Рассмотрим двоичную (бинарную) последовательность

$$x_1, x_2, \dots, \quad (1)$$

в которой $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots$. Можно установить взаимно однозначное соответствие между последовательностями (1) и последовательностями из множества целых неотрицательных чисел, расширенного элементом $+\infty$,

$$X_1, X_2, \dots, \quad (2)$$

полагая X_1 равным числу знаков в последовательности (1) до первого нуля, X_t , $t \geq 2$, равным числу единиц между $(t-1)$ -м и t -м вхождениями нуля в последовательности (1).

Зафиксируем натуральное число $m \geq 2$ и образуем из (1) последовательности двоичных векторов

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \quad (3)$$

и целых неотрицательных чисел

$$m_1, m_2, \dots, \quad (4)$$

следующим рекуррентным образом. Первые члены последовательностей (3) и (4) равны $\xi_1 = (x_1, \dots, x_m)$, $m_1 = \|\xi_1\|$ соответственно. Символом $\|v\|$ будем обозначать число единиц (вес) двоичного вектора v .

При $m_1 = 0$ процесс построения последовательности (3) обрывается и $m_t = 0$, $t = 1, 2, \dots$. При $m_1 > 0$, $\xi_2 = (x_{m+1}, \dots, x_{m+m_1})$, $m_2 = \|\xi_2\|$, и т.д.

При $m_t = 0$ процесс построения последовательности (3) обрывается и $m_t = m_{t+1} = \dots = 0$. При $m_t > 0$, $t \geq 2$, $\xi_{t+1} = (x_{m+m_1+\dots+m_{t-1}}, \dots, x_{m+\dots+m_t})$, $m_{t+1} = \|\xi_{t+1}\|$.

Другими словами, мы разбиваем последовательность (1) на участки следующим образом. Первый участок имеет размер m . Размер следующего вектора равен числу единиц в предыдущем участке последовательности (1) и так далее, до тех пор, пока не появится участок последовательности (1), состоящий только из нулей, или в (1) менее m нулей и последовательности (3) и (4) будут иметь неограниченную длину.

Вектор ξ_t , $t = 1, 2, \dots$, будем называть t -м циклом жизни последовательности (1). Обобщенную функцию (допускающую значение $+\infty$)

$$R^{(m)} = m_1 + m_2 + \dots$$

будем называть ресурсом последовательности (1).

Нетрудно видеть, что

$$R^{(m)} = X_1 + \dots + X_m.$$

Обозначим через S_k , $k = 1, 2, \dots$, и R_t , $t = 1, 2, \dots$, суммы первых k и t членов последовательностей (2) и (4), соответственно.

Для целого n , $1 \leq n \leq S_m$, определим траектории процессов восстановления

$$v_n(X_1, \dots, X_m) = v_n = \min\{k: S_k \geq n\}, \quad (5)$$

$$\tau_n(X_1, \dots, X_m) = \tau_n = \min\{t: R_t \geq n\}. \quad (6)$$

Из определений следует, что $\{n/m\} \leq \tau_n \leq n$, где $\{x\}$ здесь и всюду далее обозначает наименьшее целое число, не меньшее x (округление до целого числа сверху), $\{x\} \geq [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x .

Функцию $\tau = \tau_{S_m}$ будем называть временем жизни последовательности (1). Поведение функции τ_n описывается в следующем утверждении.

Лемма 1. При $v_n = 1$

$$\tau_n = \{n/m\}. \quad (7)$$

При $v_n = k$, $2 \leq k \leq m$,

$$0 \leq \tau_n^{(m)} - \frac{X_1}{m} - \dots - \frac{X_{k-1}}{m-k+2} - \frac{n-S_{k-1}}{m-k+1} \leq \left\{ \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m-k+2} \right\} \quad (8)$$

Доказательство. При $v_n = 1$ соотношение (7) следует из неравенства (5) $S_1 \geq n$.

Обозначим через r_i остатки от деления X_i на $m-i+1$.

Тогда $X_1 - r_1$ кратно m , в $((X_1 - r_1)/m + 1)$ -ом цикле есть нуль. Это означает, что последовательность (1), начиная с $(X_1 - r_1 + 1)$ -го члена, разбивается на циклы с весом, не большим $m-1$. Это влечет равенство

$$\tau_n^{(m)}(X_1, \dots, X_m) = \frac{X_1 - r_1}{m} + \tau_{n-X_1+r_1}^{(m-1)}(X_2 + r_1, \dots, X_m), \quad (9)$$

так как $n > X_1$.

Пусть $k = 2$. В этом случае

$$\tau_{n-X_1+r_1}^{(m-1)}(X_2 + r_1, \dots, X_m) = \left\{ \frac{n - X_1 + r_1}{m - 1} \right\}$$

и

$$\tau_n^{(m)}(X_1, \dots, X_m) = \left\{ \frac{X_1 - r_1}{m} + \frac{n - X_1 + r_1}{m - 1} \right\} = \left\{ \frac{X_1}{m} + \frac{n - X_1}{m - 1} + \frac{r_1}{m(m - 1)} \right\}.$$

Следуя принципу математической индукции, предположим, что для любого $k > 2$ верно соотношение

$$\begin{aligned} \tau_n^{(m)}(X_1, \dots, X_m) = & \left\{ \frac{X_1}{m} + \dots + \frac{X_{k-1}}{m - k + 2} + \frac{n - S_{k-1}}{m - k + 1} \right. \\ & \left. + \frac{r_1}{m(m - 1)} + \dots + \frac{r_{k-1}}{(m - k + 1)(m - k)} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда, продолжая равенство (9), получаем, что

$$\begin{aligned} \tau_n^{(m)}(X_1, \dots, X_m) = & \frac{X_1 - r_1}{m} + \left\{ \frac{X_2 + r_1}{m - 1} + \frac{r_2}{(m - 1)(m - 2)} + \dots \right\} \\ = & \left\{ \frac{X_1}{m} + \frac{r_1}{m(m - 1)} + \frac{X_2}{m - 1} + \frac{r_2}{(m - 1)(m - 2)} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Эта цепочка равенств доказывает справедливость (10). Учитывая, что $0 \leq r_i \leq m - i$, из (10) получим неравенства

$$\begin{aligned} \frac{X_1}{m} + \dots + \frac{n - S_{k-1}}{m - k + 1} & \leq \left\{ \frac{X_1}{m} + \dots + \frac{X_{k-1}}{m - k + 2} + \frac{n - S_{k-1}}{m - k + 1} \right\} \leq \tau_n, \\ \tau_n & \leq \left\{ \frac{X_1 + 1}{m} + \dots + \frac{X_{k-1} + 1}{m - k + 2} + \frac{n - S_{k-1}}{m - k + 1} \right\} \\ & \leq \left\{ \frac{X_1}{m} + \dots + \frac{X_{k-1}}{m - k + 2} + \frac{n - S_{k-1}}{m - k + 1} \right\} + \left\{ \frac{1}{m} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из второй цепочки неравенств (11) получаем, что

$$0 \leq \left\{ \tau_n - \frac{X_1}{m} - \dots \right\} \leq \left\{ \frac{1}{m} + \dots \right\}.$$

Отсюда, с учетом неравенств из первой цепочки (11), получаем утверждение леммы.

Обратим внимание на то, что нижняя и верхняя границы для τ_n в (11) достижимы при соответствующем выборе $X_1, \dots, X_{k-1}$ и n .

2. Иллюстрации

Для иллюстрации введенных определений рассмотрим пример, который ранее обсуждался в [1].

Параллельная система из m элементов применяется для выполнения заданий. Каждое задание направляется на выполнение одному элементу. Результатом выполнения является

либо выполненное задание, либо отказ элемента. Это отражается символом 1 или 0 в последовательности результатов выполнения заданий (1). В случае отказа элемента задание направляется в последовательность невыполненных заданий на первое место. Элемент, отказавший в исполнении задания, исключается из системы.

На первом этапе в систему направляется m заданий. Результатом их исполнения является вектор ξ_1 . На втором этапе формируется комплект размером m_1 , равный числу выполненных заданий на первом этапе, и т. д.

Участок последовательности (1), который был назван t -м циклом, отражает результат выполнения заданий, направленных в систему на t -м этапе.

Особый интерес представляет круг вопросов, связанный с применением параллельных систем для решения задачи, допускающей разбиение на n независимых заданий. Исследователей интересует положительный исход, то есть решение задачи до отказа всей системы.

В связи с этим наибольшую значимость приобретают такие характеристики, как среднее время решения задачи, которое может измеряться числом этапов до достижения результата, а также число отказавших в процессе решения задачи элементов системы.

Для их количественных оценок можно использовать теоретико-вероятностные модели, задавая различные вероятностные пространства $(\Omega, \sigma, \mathbf{P})$ для значений вектора $(X_1, \dots, X_m)$.

Рассматриваемые характеристики широко обсуждаются специалистами по математическим методам в теории надежности [2]. Основная часть исследований посвящена изучению моделей, в которых надежность и время жизни системы являются функциями от вектора времен ожидания отказов элементов системы $(Y_1, \dots, Y_m)$ [3–6], для которого также задается соответствующее вероятностное пространство. Содержательные результаты, представленные в этих работах, относятся к случаю, когда компоненты вектора отказов элементов являются непрерывными и перестановочными случайными величинами.

Изучение поведения системы при дискретном распределении этого вектора даже в случае, когда компоненты являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, приводит к сложностям, которые можно преодолеть переходом к вектору $(X_1, \dots, X_m)$. Существует взаимно-однозначная связь между векторами $(Y_1, \dots, Y_m)$ и $(X_1, \dots, X_m)$, которую легко проследить при помощи следующей конструкции.

Рассмотрим случайную матрицу, состоящую из m строк. Каждая строка состоит из нулей и единиц и имеет, по крайней мере, один нуль. Заменим в каждой строке все элементы после первого появления нуля на символ f (отказ). Можно трактовать число единиц в i -й строке до символа f как время ожидания отказа i -го элемента, а число единиц в t -м столбце матрицы как число выполненных заданий m_t в t -м цикле.

Тогда время жизни системы, ее ресурс и темпы его реализации можно изучать либо как функцию от вектора $(Y_1, \dots, Y_m)$, что сделано в [3–6], либо как процесс восстановления для марковских последовательностей $m_t, t = 1, 2, \dots$

Для осуществления перехода от пространства состояний элементов системы к пространству результатов ее функционирования выпишем элементы матрицы в одну строку последовательно по столбцам до m -го нуля и удалим из этой строки все символы f . В полученной таким образом двоичной последовательности место первого появления 0 можно трактовать как первый отказ в исполнении заданий (а не отказ элемента системы) и т. д.

Обсуждение методологических аспектов соответствия математических моделей приложениям в теории надежности выходит за рамки этой работы. Вопросы выбора моделей для реальных систем освещались в [7] и [8].

Работа посвящена изучению функции восстановления процесса $\tau_n, n = 1, 2, \dots$, при некоторых предположениях о распределении случайных величин $(X_1, \dots, X_m)$.

В том случае, когда элементы рассматриваемой матрицы независимы и одинаково распределены, все три подхода равноправны и приводят к одинаковым результатам для времени ожидания выполнения задачи с n заданиями.

3. Произвольное распределение мест сбоев

Случайные места сбоев x_i , $i = 1, 2, \dots$, принимают лишь положительные значения. Поэтому их математические ожидания, возможно бесконечные, всегда существуют. В тех случаях, когда средний ресурс системы

$$\mathbf{M}R^{(m)} = \mathbf{M}X_1 + \dots + \mathbf{M}X_m$$

значительно превосходит единицу, хорошим приближением для времени жизни системы является случайная величина

$$L = L(X_1, \dots, X_m) = \sum_{k=1}^m \frac{X_k}{m - k + 1}. \quad (12)$$

Это следует из теоремы 1, которая является непосредственным следствием доказанной выше леммы.

Теорема 1. Для математического ожидания времени жизни двоичной последовательности (1) справедливы неравенства

$$0 \leq \mathbf{M}\tau - \mathbf{M}L \leq \left\{ \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right\}. \quad (13)$$

Для среднего времени выполнения задачи с n заданиями при условии, что ресурс системы $R^{(m)} \geq n$, справедливы неравенства, представленные в следующем утверждении.

Теорема 2. Для произвольного распределения величин $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ и положительного числа n справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{t \geq n/m} t \mathbf{P}\{\tau_n = t, R^{(m)} \geq n\} \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \frac{1}{m - k + 1} \left(n + \sum_{v=0}^{k-1} \frac{k - v}{m - v + 1} \mathbf{M}(X_v \mid v_n = k) \right) \mathbf{P}\{v_n = k\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{m-1} \{\delta_m(k)\} \mathbf{P}\{v_n = k\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $X_0 = 0$, $\delta_m = \delta_m = 1/m$ и

$$\delta_m(k) = \sum_{v=1}^{k-1} \frac{1}{m - v + 1}, \quad k > 2.$$

4. Последовательность испытаний Бернулли

Пусть (1) является последовательностью независимых случайных величин с вероятностями

$$\mathbf{P}\{x_1 = 0\} = p, \quad \mathbf{P}\{x_1 = 1\} = 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

В этом случае X_i равна времени ожидания появления нуля в последовательности испытаний Бернулли и имеет геометрическое распределение с параметром p (см. [9])

$$\mathbf{P}\{X_i = k\} = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Последовательность целочисленных случайных величин (4) образует однородную цепь Маркова с вектором начальных распределений

$$\mathbf{P}\{m_1 = k\} = \binom{m}{k} (1 - p)^k p^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (15)$$

и вероятностями переходов

$$\mathbf{P}\{m_{i+1} = k \mid m_i = l\} = \binom{l}{k} (1 - p)^k p^{l-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (16)$$

Здесь полагаем $\binom{l}{k} = 0$ при $l < k$. Распределение (4) совпадает в данном случае с распределением последовательности случайных величин

$$m'_1, m'_2, \dots, \quad (17)$$

в которой

$$m'_i = \sum_{v=1}^m \mathbf{I}(Y_v < i),$$

$\mathbf{I}(A)$ обозначает индикатор события A , $Y_1, Y_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых имеет геометрическое распределение с параметром p .

Такая вероятностная схема рассматривалась в [1], где было анонсировано утверждение, частично аналогичное утверждению следующей теоремы.

Теорема 3. Для последовательности испытаний Бернулли (1) с вероятностями

$$\mathbf{P}\{x_i = 0\} = p, \quad \mathbf{P}\{x_i = 1\} = 1 - p, \quad 0 < p < 1,$$

и целых чисел $n \geq m \geq 2$ имеют место следующие утверждения.

(1) Математическое ожидание ресурса последовательности (1) равно

$$\mathbf{M}R^{(m)} = m(1 - p)p. \quad (18)$$

(2) Математическое ожидание $\mathbf{M}\tau$ времени жизни последовательности (1) не меньше, чем

$$\frac{1 - p}{p} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m - 1} + \dots + 1 \right), \quad (19)$$

и не больше, чем

$$\left(\frac{1 - p}{p} + 1 \right) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m - 1} + \dots + 1 \right). \quad (20)$$

(3) Вероятность решения задачи с n заданиями до сбоя системы равна

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n, m, p) &= \mathbf{P}\{R^{(m)} \geq n\} = (1-p)^n \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k-1}{k} p^k \\ &= (1-p)^n \sum_{v=0}^{m-1} \binom{n+m-1}{v} p^v (1-p)^{m-1+v}. \end{aligned} \quad (21)$$

(4) Для математического ожидания времени решения задачи с n заданиями справедливо неравенства

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{P}\{R^{(m)} \geq n\} \mathbf{M}(\tau_n \mid R^{(m)} \geq n) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k(m-k+1)} + \frac{(n-1)}{m} \varphi_m(k) \right) \binom{n+k-2}{k-1} p^{k-1} (1-p)^n \\ &\leq \sum_{k=1}^{m-1} \delta_m(k) \binom{n+k-2}{k-1} p^{k-1} (1-p)^n, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_m(k) = \frac{m}{k} \sum_{v=1}^k \frac{1}{m-v+1}, \quad k = 1, \dots, m,$$

а $\delta_m(k)$ определено в теореме 2.

Доказательство. Соотношения (18), (19) и (20) следуют из формул (12), (13) и свойств геометрического распределения. В условиях теоремы случайная величина $R^{(m)}$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами (p, m) (см. [9], с. 436)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{R^{(m)} = k\} &= \mathbf{P}\{X_1 + \dots + X_m = k\} \\ &= \binom{m+k-1}{k} p^m (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Событие $\{v_n = k\}$ означает, что в $(n+k-1)$ -м испытании последовательности (1) появилась единица, а в первых $n+k-2$ появились $n-1$ единица и $k-1$ нуль. Это, в свою очередь, означает, что

$$\mathbf{P}\{v_n = k\} = \binom{n+k-2}{k-1} p^{k-1} (1-p)^n, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поскольку

$$\{R^{(m)} \geq n\} = \bigcup_{k=1}^{m-1} \{v_n = k\},$$

из этого соотношения вытекает справедливость первого равенства (21).

Аналитическое доказательство правого равенства в (21) можно провести при помощи соотношения

$$x \sum_{v \geq N} \binom{v}{n} x^M (1-x)^v = \sum_{v=0}^M \binom{N}{v} x^v (1-x)^{N-v}, \quad 1 \leq m \leq N, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

которое доказано в [10]. Существует целый ряд классических вероятностных доказательств правой части (21), ссылки на которые можно найти в [11]. Они основаны на следующем факте, наиболее подробно описанном в [12].

Пусть B_N — число успехов в первых N испытаниях (1), T_k — минимальное число испытаний, необходимых для получения ровно k неудач, U_n — минимальное число испытаний, необходимых для получения n успехов. Тогда

$$\mathbf{P}\{B_N \geq N - k\} = \mathbf{P}\{T_k > N\} = \mathbf{P}\{U_{N-k} \leq N\}.$$

Хорошо известно (см., например, [13], глава 6, раздел 8), что T_k имеет отрицательное биномиальное распределение.

В условиях теоремы распределение вектора $(X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, n - 1 - S_{k-1})$ при условии $v_n = k$ совпадает с распределением координат вектора решений уравнения $y_1 + \dots + y_k = n - 1$ в неотрицательных целых числах при равномерном распределении на множестве всех решений, которое является частным случаем обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [14]. Следовательно,

$$\mathbf{M}(X_v, v_n = k) = \mathbf{M}y_v = \frac{n-1}{k}, \quad v = 1, \dots, k-1.$$

Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n-k+1} \left(n + \sum_{v=0}^{k-1} \frac{k-v}{(m-v+1)} \mathbf{M}(X_v | v_n = k) \right) \\ &= \frac{1}{m-k+1} \left(n + \frac{1}{k} \sum_{v=0}^{k-1} \frac{(k-v)(n-1)}{(m-v+1)} \right) = \frac{1}{k(m-k+1)} + \frac{(n-1)}{m} \varphi_m(k). \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения в (14), завершим доказательство теоремы.

Автор выражает признательность А. Ф. Ронжину за внимание к работе и ряд конструктивных замечаний. В частности, им предложена формулировка леммы 1, которая существенно расширяет границы применимости основных результатов работы.

Список литературы

1. Ронжин А. Ф., Суриков В. Н., О времени полного перебора. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (2007) **14**, №4, 506–508.
2. Samaniego F. J., On closure of the IFR class under formation of coherent systems. *IEEE Trans. Reliab.* (1985) **34**, 69–72.
3. Navarro J., Balakrishnan N., Samaniego F. J., Mixture representations of residual lifetimes of used systems. *J. Appl. Probab.* (2008) **45**, 1097–1112.
4. Navarro J., Rychlik T., Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components. *J. Multivariate Anal.* (2007) **98**, 102–113.
5. Spizzichino F., Ageing and positive dependence. In: *Encyclopaedia of Statistics for Quality and Reliability*. Wiley, Chichester, 2007, pp. 82–95.
6. Седякин Н. М., Об одном физическом принципе теории надежности. *Известия АН СССР, Техническая кибернетика* (1966), № 3, 80–87.

7. Багдонавичюс В. Б., Статистическая проверка модели аддитивного накопления повреждений. *Теория вероятностей и ее применения* (1978) **23**, №2, 403–408.
8. Вероятность и математическая статистика. В сб.: *Энциклопедия*. Большая Российская Энциклопедия, 1999.
9. Ронжин А. Ф., Точные формулы для вероятностных характеристик времени выхода накапливающихся сумм исходов бернуллиевской последовательности за прямолинейные границы и их применение к определению средней информационной скорости одного способа скрытой передачи информации. *Обзор прикладной и промышленной математики* (2007) **14**, №4, 593–597.
10. Оуэн Д. Б., *Сборник статистических таблиц*. ВЦ АН СССР, Москва, 1966.
11. Bahadur R. R., Some approximations to the binomial distribution. *Ann. Math. Statist.* (1960) **3**, №1, 43–54.
12. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Мир, Москва, 1964.
13. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.

Статья поступила 21.01.2009.