Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков, О свойствах функции правдоподобия в задаче оценки моментов изменения вероятности успеха в неоднородных испытаниях Бернулли, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 2, 60–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1095>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:08:56

О свойствах функции правдоподобия в задаче оценки моментов изменения вероятности успеха в неоднородных испытаниях Бернулли

© 2010 г. М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков

Получено явное выражение для статистики, являющейся линейной функцией от логарифма функции правдоподобия, исследуются свойства ее математического ожидания. Полученные результаты могут быть применены к оцениванию моментов многократных изменений вероятности успеха.

Работа выполнена при поддержке программы президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, проект НШ 4129.2006.1

1. Введение

Задачи обнаружения моментов изменения вероятностных характеристик случайных последовательностей (задачи разладки) рассматривались многими авторами (см., например, [1–6]). Сложилось два направления исследований: скорейшее обнаружение в текущем контроле очередного момента изменения вероятностных характеристик случайной последовательности, обнаружение всех моментов смены вероятностных характеристик в заданном отрезке случайной последовательности. Данная работа относится ко второму направлению.

Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_t, \dots \quad (1)$$

— последовательность независимых случайных величин, каждая из которых принимает два значения 0 или 1 (успех или неудача). Вероятности этих значений зависят от t :

$$P\{x_t = 1\} = p_i, \quad t \in \{t_{i-1} + 1, \dots, t_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $0 < p_i < 1$, $p_i \neq p_{i+1}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r < \dots$. Будем предполагать, что вероятности p_i известны и известно, что в T первых членах последовательности

$$x_1, x_2, \dots, x_T, \quad t_r < T \leq t_{r+1}, \quad (3)$$

произошло ровно r изменений вероятности успеха, моменты $t_1, \dots, t_r$ предполагаются неизвестными. В работе исследуется математическое ожидание линейной функции от логарифма функции правдоподобия. Показано, как установленные свойства этого математического ожидания могут быть использованы для оценивания моментов смены вероятности успеха.

2. Функция правдоподобия

Не ограничивая общности, можно положить $T = t_{r+1}$. Тогда функция правдоподобия принимает вид

$$L(x_1, \dots, x_T) = \prod_{i=1}^{r+1} \prod_{j=t_{i-1}+1}^{t_i} p_i^{x_{t_j}} q_i^{\bar{x}_{t_j}},$$

где $\bar{x}_s = 1 - x_s$, $q_i = 1 - p_i$. Отсюда, полагая

$$\mu(t_{i-1}, t_i) = \sum_{s=t_{i-1}+1}^{t_i} x_s,$$

получим равенство

$$\ln L(x_1, \dots, x_T) = \sum_{i=1}^{r+1} [\mu(t_{i-1}, t_i) \ln p_i + (t_i - t_{i-1}) \mu(t_{i-1}, t_i) \ln q_i]. \quad (4)$$

Число $\mu(u, v)$ единиц в множестве $\{x_{u+1}, \dots, x_v\}$ выразим через числа $\mu_s = \mu(0, s)$ единиц в множествах $\{x_1, \dots, x_s\}$: $\mu(u, v) = \mu_v - \mu_u$. Используя эти обозначения, запишем (4) в следующем виде:

$$\ln L(x_1, \dots, x_T) = \sum_{i=1}^r \mu_{t_i} a_i + \mu_T \ln \frac{p_{r+1}}{q_{r+1}} + T \ln q_{r+1} + \sum_{i=1}^r t_i b_i, \quad (5)$$

где

$$a_i = \ln \frac{p_i q_{i+1}}{q_i p_{i+1}}, \quad b_i = \ln \frac{q_i}{q_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (6)$$

Логарифм функции правдоподобия (5) будем рассматривать как функцию $\tilde{\eta}_T(t_1, \dots, t_r)$ от неизвестных точек $(t_1, \dots, t_r)$ изменения вероятностей успеха. Отбросив в (5) слагаемые, не зависящие от $t_1, \dots, t_r$, и заменив $t_1, \dots, t_r$ переменными $s_1, \dots, s_r$, получим статистику

$$\eta_T(s_1, \dots, s_r) = \sum_{i=1}^r f_i^*(s_i), \quad f_i^*(s) = \mu_s a_i + s b_i, \quad (7)$$

где a_i и b_i определены равенствами (6). Очевидно, что у функций $\tilde{\eta}_T(s_1, \dots, s_r)$ и $\eta_T(s_1, \dots, s_r)$ точки, в которых они имеют локальные максимумы и минимумы, совпадают.

Найдем $\varphi_T(s_1, \dots, s_r) = \mathbf{E} \eta_T(s_1, \dots, s_r)$. Для этого воспользуемся формулой для математического ожидания $g(s) = \mathbf{E} \mu_s$ числа единиц в s первых членах последовательности (1):

$$g(s) = \begin{cases} p_1 s, & 1 \leq s \leq t_1, \\ \sum_{i=1}^{j-1} p_i (t_i - t_{i-1}) + p_j (s - t_{j-1}), & t_{j-1} \leq s \leq t_j, \quad j = 2, \dots, r+1. \end{cases} \quad (8)$$

Теорема 1. Математическое ожидание

$$\mathbf{E}\eta_T(s_1, \dots, s_r) = \varphi_T(s_1, \dots, s_r)$$

можно представить в виде

$$\varphi_T(s_1, \dots, s_r) = \sum_{i=1}^r f_i(s_i), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} f_i(s) &= \mathbf{E}f_i^*(s) \\ &= \begin{cases} c_{i1}s, & 1 \leq s \leq t_1, \\ \sum_{l=1}^j c_{il}(t_l - t_{l-1}) + c_{i,j+1}(s - t_j), & t_j \leq s \leq t_{j+1}, \quad j = 1, \dots, r, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

$$c_{il} = p_l \ln \frac{p_i(1 - p_i)^{1/p_l - 1}}{p_{i+1}(1 - p_{i+1})^{1/p_l - 1}}. \quad (11)$$

При любых $p_i \neq p_{i+1}$ верны неравенства

$$c_{ii} > 0, \quad c_{i,i+1} < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (12)$$

Доказательство. Формулы (10) и (11) следуют из формул (7), (8) и из равенства

$$\mathbf{E}(\mu_s a_i + s b_i) = g(s) a_i + s b_i,$$

в котором нужно заменить $g(s)$ выражением (8), а s в произведении $s b_i$ представить в виде

$$s = (s - t_{j-1}) + \sum_{k=1}^{j-1} (t_k - t_{k-1}).$$

Неравенства (12) следуют из неравенств

$$h(x) < h(x_\alpha), \quad x \in (0, x_\alpha) \cup (x_\alpha, 1),$$

где

$$h(x) = x(1 - x)^\alpha, \quad x_\alpha = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (13)$$

При $x = p_{i+1}$, $\alpha = 1/p_i - 1$ получаем первое неравенство (12), а при $x = p_i$, $\alpha = 1/p_{i+1} - 1$ получаем второе. Теорема доказана.

Отметим некоторые свойства функций $f_i(s)$, $i = 1, \dots, r$, которые следуют из теоремы 1.

- (1) График функции $f_i(s)$, $i = 1, \dots, r$, является ломаной, а угол при ее вершине $(t_i, f_i(t_i))$ образован двумя прямыми с угловыми коэффициентами $c_{ii} > 0$ и $c_{i,i+1} < 0$.
- (2) Функция $f_i(s)$, $i = 1, \dots, r$, на отрезке $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ имеет единственный максимум в точке t_i .

- (3) При любых $p_i \neq p_{i+1}$, $i = 1, \dots, r$, функция $\varphi_T(s_1, \dots, s_r)$ имеет единственный максимум на множестве

$$S = \{(s_1, \dots, s_r): t_{i-1} \leq s_i \leq t_{i+1}, i = 1, \dots, r\}, \quad 0 = t_0 < t_1 \dots < t_{r+1} = T, \quad (14)$$

и

$$\max_{s \in S} \varphi_T(s_1, \dots, s_r) = \sum_{i=1}^r \max_{t_{i-1} \leq s \leq t_{i+1}} f_i(s).$$

- (4) При $i \geq 2$ первый локальный максимум функции $f_i(s)$ на множестве $s \geq t_{k-1}$ достигается в точке $s = t_k$.

Рассмотрим более простой случай двух чередующихся вероятностей успеха:

$$p_{2u+1} = p_1, \quad p_{2(u+1)} = p_2, \quad u = 0, 1, \dots, \quad p_1 \neq p_2. \quad (15)$$

В этом случае

$$f_{2u+1}(s) = f_1(s), \quad f_{2u+2}(s) = -f_1(s).$$

Локальные максимумы функции $f_1(s)$ достигаются в точках $t_1, t_3, \dots$, а локальные максимумы функции $f_2(s) = -f_1(s)$ — в точках $t_2, t_4, \dots$. Следовательно, функция $\varphi_T(s_1, \dots, s_r)$ имеет локальный максимум только в точках $(s_1^{(0)}, \dots, s_r^{(0)})$, где $s_i^{(0)} \in \{t_1, t_3, \dots\}$ при нечетном i и $s_i^{(0)} \in \{t_2, t_4, \dots\}$ при четном i . Точка $(t_1, \dots, t_r)$ истинных моментов смены вероятностей успеха является точкой локального максимума функции $\varphi_T(s_1, \dots, s_r)$ с координатами $s_1^{(0)}, \dots, s_r^{(0)}$, удовлетворяющими условию $s_1^{(0)} < s_2^{(0)} < \dots < s_r^{(0)}$.

Таким образом, для определения локального максимума функции $\varphi_T(s_1, \dots, s_r)$ от r переменных в этом случае достаточно найти локальные максимумы двух функций от одной переменной.

3. Оценивание моментов изменения вероятности успеха

Приведенные в параграфе 2 свойства позволяют предложить различные процедуры получения оценок $\bar{t}^* = (t_1^*, \dots, t_r^*)$ истинной точки $\bar{t} = (t_1, \dots, t_r)$ смены вероятностей успеха.

Процедура 1. Используя свойство 4, можно предложить следующую процедуру получения оценки $\bar{t}^*$. Сначала по функции $f_1^*(s)$ определить точку t_1^* , соответствующую первому локальному максимуму функции $f_1(s)$, затем при $s > t_1^*$ по функции $f_2^*(s)$ выбрать точку, соответствующую t_2 , и так далее.

В общем случае при определении оценок максимального правдоподобия r параметров требуется определить точку, в которой достигается максимум функции r переменных. В предложенной выше процедуре нужно искать максимум r функций одной переменной.

Процедура 2. Если из дополнительной информации удалось найти множество

$$S^* = \{(s_1, \dots, s_r): t_{i-1} + \underline{s}_i < s_i < t_{i+1} - \bar{s}_i, i = 1, \dots, r\} \subset S, \quad (16)$$

где числа $\underline{s}_i, \bar{s}_i$ удовлетворяют условиям $t_{i-1} + \underline{s}_i < t_i < t_{i+1} - \bar{s}_i$, $\underline{s}_i > 0$, $\bar{s}_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, то оценку $\bar{t}^* = (t_1^*, \dots, t_r^*)$ точки $\bar{t} = (t_1, \dots, t_r)$ можно определить равенствами

$$\max_{t_{i-1} + \underline{s}_i \leq s_i \leq t_{i+1} - \bar{s}_i} f_i^*(s_i) = f_i^*(t_i^*), \quad i = 1, \dots, r, \quad (17)$$

где функция $f_i^*(s)$ определена вторым равенством (7). Если при данном i точек t_i^* несколько, то выбирается наименьшая из них.

На множестве S^* по свойству 3 функция $\varphi_T(s_1, \dots, s_r)$ имеет единственный максимум. Из свойства 2 и закона больших чисел следует утверждение следующей теоремы 2.

Теорема 2. Если $p_i \neq p_{i+1}$ $i = 1, \dots, r-1$ и при $T \rightarrow \infty$ точки $\bar{t}(T) = (t_1, \dots, t_r)$, $\bar{s}(T) = (s_1, \dots, s_r)$ меняются так, что $t_l/T \rightarrow \gamma_l$, $s_l/T \rightarrow \beta_l$, $0 < \gamma_l < \infty$, $0 < \beta_l < \infty$, $\gamma_{l-1} < \beta_l < \gamma_{l+1}$, $l = 1, \dots, r$, $\gamma_{r+1} = 1$, то для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется такое T_0 , что вероятность события $\eta_T(s_1, \dots, s_r) < \eta_T(t_1, \dots, t_r)$ больше $1 - \varepsilon$ при $T > T_0$.

При отсутствии дополнительной информации множество S^* можно выбрать, воспользовавшись для предварительной оценки точки $t = (t_1, \dots, t_r)$ статистиками

$$\xi_T^{(h)}(s) = \frac{1}{\sqrt{T}}(\mu_{s+h} - 2\mu_s + \mu_{s-h}), \quad s = h+1, \dots, T-h, \quad h > 0. \quad (18)$$

Абсолютная величина математического ожидания этих статистик $|\mathbf{E}\xi_T^{(h)}(s)|$, рассматриваемая как функция одной переменной s , имеет локальные максимумы в точках $t_1, \dots, t_r$.

Приведем без доказательства теорему о предельных распределениях для статистик (18) в схеме серий при $T \rightarrow \infty$, когда $p_k = p_k(T)$, $h = h(T)$ и $t_k = t_k(h)$ изменяются следующим образом:

$$p_k(T) = \left(1 + \frac{\omega_k(T)}{\sqrt{T}}\right) p, \quad 0 < p < 1, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \omega_k(T) = \omega_k, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(T)}{T} = h_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t_k(T)}{T} = \gamma_k, \quad k = 1, \dots, r. \quad (19)$$

Обозначим через $\zeta(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$, гауссовский процесс с математическими ожиданиями

$$\mathbf{E}\zeta(\theta) = \begin{cases} p(\omega_{l+1} - \omega_l)(h_0 - |\theta - \gamma_l|), & \gamma_l - h_0 < \theta < \gamma_l + h_0, \quad l = 1, \dots, r, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (20)$$

и ковариационной матрицей

$$R(\theta', \theta'') = \begin{cases} p(1-p)(2h_0 - |\theta' - \theta''|), & |\theta' - \theta''| \leq 2h_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (21)$$

Теорема 3. Если $\theta_i^* = s_i/T \rightarrow \theta_i$, $i = 1, \dots, m$, при $T \rightarrow \infty$, то в схеме серий (19) совместные распределения величин $\xi_T^{(h)}(\theta_i^*)$, $i = 1, \dots, m$, сходятся к совместному распределению величин $\zeta(\theta_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Отметим, что функция $|\mathbf{E}\zeta(\theta)|$ имеет локальные максимумы в точках $\theta_l = \gamma_l$, $l = 1, \dots, r$, соответствующих точкам смены вероятностей p_l на p_{l+1} . Таким образом, последовательность статистик (18) может быть использована для предварительной оценки $(t_1, \dots, t_r)$.

Таблица 1. $T = 3900$, $p_2 = 0,7$, $p_1 = p_3$, $t_1 = 1300$, $t_2 = 2600$, $b = 1000$, $H = 30$

p_1	$\hat{m}_{t_1}$	$\hat{m}_{t_2}$	$\hat{\sigma}_{t_1}$	$\hat{\sigma}_{t_2}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{p}_{12}$
0,3	1298,4	2538,5	7,52	6,79	0,989	0,991	0,98
0,4	1299,6	2599,9	13,85	13,31	0,947	0,958	0,905
0,5	1300,6	2599,8	31,39	29,37	0,793	0,812	0,647
0,6	1298,8	2598,4	97,30	99,05	0,446	0,473	0,206

Таблица 2. $T = 300$, $p_2 = 0,7$, $p_1 = p_3$, $t_1 = 100$, $t_2 = 200$, $b = 1000$, $H = 30$

p_1	$\hat{m}_{t_1}$	$\hat{m}_{t_2}$	$\hat{\sigma}_{t_1}$	$\hat{\sigma}_{t_2}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{p}_{12}$
0,3	98,72	199,00	6,98	7,37	0,992	0,991	0,983
0,4	99,74	200,91	11,295	12,55	0,962	0,955	0,918
0,5	100,22	201,73	22,74	22,26	0,8279	0,843	0,701
0,6	98,92	201,36	37,68	38,55	0,590	0,578	0,350

Некоторое представление о точности оценок $(t_1^*, \dots, t_r^*)$ моментов $(t_1, \dots, t_r)$ дает обработка реализаций последовательности (1), полученных с использованием датчика случайных чисел. При $r = 2$ было получено по n реализаций $(x_1^{(l)}, \dots, x_T^{(l)})$, $l = 1, \dots, n$, при различных наборах значений параметров T , p_1 , p_2 , t_1 и t_2 . Предполагается, что числа $\bar{s}_l$ и $\underline{s}_l$, $l = 1, 2$, в равенстве (17) известны. Для каждой реализации с использованием (17) были получены оценки $(t_1^*(l), t_2^*(l))$, $l = 1, \dots, n$. Оценками $m_{t_l} = \mathbf{E}t_l^*$, $\sigma_{t_l}^2 = \mathbf{D}t_l^*$ являются выборочные математические ожидания и дисперсии $\hat{m}_{t_l}$, $\hat{\sigma}_{t_l}^2$. Вероятности $P_l = \mathbf{P}\{t_l^* \in (t_l - H, t_l + H)\}$, $P_{12} = \mathbf{P}\{(t_1^*, t_2^*) \in (t_1 - H, t_1 + H) \times (t_2 - H, t_2 + H)\}$ оценивались частотами $\hat{p}_l$ и $\hat{p}_{12}$ соответствующих событий. Полученные результаты приведены в табл. 1 и 2.

Приведенные в таблицах оценки математических ожиданий $\mathbf{E}t_1^*$, $\mathbf{E}t_2^*$ близки к истинным моментам разладки (t_1, t_2) при всех рассмотренных значениях параметров. Качество оценок характеризуется значением среднеквадратичных отклонений $\hat{\sigma}_{t_k}$ и частотами $\hat{p}_l$, $\hat{p}_{12}$. По результатам эксперимента точность оценок уменьшается при сближении вероятностей p_1 и p_2 .

Список литературы

1. Боровков А. А., Асимптотически оптимальные решения в задаче о разладке. *Теория вероятностей и ее применения* (1998) **43**, №4, 623–654.
2. Дарховский Б. С., Непараметрический метод оценивания интервалов однородности случайной последовательности. *Теория вероятностей и ее применения* (1985) **30**, №4, 795–799.
3. Hinkley D. V., Hinkley E. A., Inference about the change-point in a sequence of binomial variables. *Biometrika* (1970) **57**, 477–488.
4. Хахубия Ц. Г., Предельная теорема для оценки максимального правдоподобия момента разладки. *Теория вероятностей и ее применения* (1986) **31**, №1, 152–155.
5. Zubkov A. M., Sokolov D. V., Statistical inference for noisy piecewise linear signals.. В сб.: *Докл. 1-й Межд. конф. "Цифровая обработка сигналов и ее применения"*, II-Е, Москва, 1998, с. 140–142.
6. Бродский Б. Е., Дарховский Б. С., Проблемы и методы вероятностной диагностики. *Автоматика и телемеханика* (1999) **8**, 3–50.

Статья поступила 20.06.2006.