Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Жук, О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств A -полноты для дефинитных автоматов, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 2, 80–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 18:22:23

О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств A -полноты для дефинитных автоматов

© 2010 г. Д. Н. Жук

В работе рассматриваются системы вида $M = F \cup \nu$, где F — некоторый класс Поста, а ν — конечная система дефинитных автоматов. Все классы Поста были разделены на те, для которых проблема A -полноты таких систем дефинитных автоматов алгоритмически разрешима, и те, для которых проблема A -полноты алгоритмически неразрешима.

1. Введение

В работах [3, 4] установлена алгоритмическая неразрешимость задач о полноте и A -полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для конечных систем автоматных функций. Для систем автоматов, содержащих все булевы функции, указанные задачи алгоритмически разрешимы [5, 6]. Д. Н. Бабин исследовал на полноту и A -полноту системы вида $F \cup \nu$, где F — некоторый класс Поста, а ν — конечная система автоматных функций. Ему удалось построить классификацию классов Поста по их способности гарантировать разрешимость проблемы полноты для конечных систем автоматов. Оказалось, что проблемы полноты и A -полноты для систем вида $F \cup \nu$ разрешимы точно тогда, когда F содержит либо функцию $x + y + z$, либо функцию $xy \vee yz \vee xz$ [7].

Похожие результаты были получены для дефинитных автоматов. Было показано, что в классе дефинитных автоматов задачи о полноте и A -полноте относительно операций суперпозиции алгоритмически неразрешимы [8]. Ранее автор показал, что для систем дефинитных автоматов вида $P_2 \cup \nu$ существует алгоритм проверки на полноту и A -полноту таких систем автоматов [9]. Для каждого конечного ν он заключается в проверке непринадлежности ν конечному числу предполных классов. Естественно исследовать на A -полноту системы вида $F \cup \nu$, где F — некоторый класс Поста, а ν — конечная система дефинитных автоматов. Возникает разделение классов Поста на сильные и слабые по их способности гарантировать разрешимость проблемы A -полноты для дефинитных автоматов. В работах [10, 11] автором были выделены некоторые сильные и некоторые слабые классы Поста. В данной работе выполнено заключительное построение, которое позволяет все классы Поста разделить на сильные и слабые

Автор благодарен своему научному руководителю В. Б. Кудрявцеву за помощь в исследовании задачи и написании данной работы.

2. Основные понятия и результаты

Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, $E_2 = \{0, 1\}$, E_2^l — множество всех слов длины l в алфавите E_2 , E — множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц. Далее такие последовательности называем сверх-словами. Множество E^n состоит из всех наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E$, $i = 1, \dots, n$. Если $a, b \in E_2$, то $\bar{a}$ — отрицание a , $a \vee b$ — дизъюнкция a и b , $a \& b$ — конъюнкция a и b , $a + b$ — сумма по модулю 2. Множество всех булевых функций будем обозначать через P_2 .

Пусть α — слово или сверхслово. Для $n \in \mathbf{N}$ через $\alpha(n)$ обозначим n -й элемент α . Обозначим $|\alpha|$ длину слова α ; для сверхслова α будем полагать, что $|\alpha| = \infty$. Для слова α такого, что $|\alpha| \geq k$, определим

$$[_k \alpha = \alpha(|\alpha| - k + 1) \dots \alpha(|\alpha| - 1) \alpha(|\alpha|).$$

Для слова или сверхслова α такого, что $|\alpha| \geq k \geq l$ положим

$$\begin{aligned}]_k \alpha &= \alpha(1) \alpha(2) \dots \alpha(k), \\ [_l]_k \alpha &= \alpha(k - l + 1) \alpha(k - l + 2) \dots \alpha(k). \end{aligned}$$

Для произвольного слова α определим слово $\alpha^s = \alpha \alpha \dots \alpha$, составленное из s слов α , и сверхслово $\alpha^\infty = \alpha \alpha \alpha \dots$.

Пусть $n, h \in \mathbf{N}$. Функция $T: E^n \rightarrow E$ называется дефинитным автоматом с n входами высоты h , если существуют функции $f_j: (E_2^j)^n \rightarrow E_2$, $j = 1, 2, 3, \dots, h$, такие, что для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, \dots, x_n)(1) &= f_1([_1 x_1,]_1 x_2, \dots,]_1 x_n), \\ T(x_1, x_2, \dots, x_n)(2) &= f_2([_2 x_1,]_2 x_2, \dots,]_2 x_n), \\ &\dots \\ T(x_1, x_2, \dots, x_n)(h) &= f_h([_h x_1,]_h x_2, \dots,]_h x_n), \\ T(x_1, x_2, \dots, x_n)(h + 1) &= f_h([_h]_h x_1,]_h]_h x_2, \dots,]_h]_h x_n), \\ &\dots \\ T(x_1, x_2, \dots, x_n)(h + i) &= f_h([_h]_h]_h x_1,]_h]_h]_h x_2, \dots,]_h]_h]_h x_n), \\ &\dots \end{aligned}$$

Таким образом, согласно нашему определению автомат высоты h является также автоматом высоты $h + 1$. Элемент $T(x_1, x_2, \dots, x_n)(j)$ будем называть элементом на выходе автомата T в момент времени j , а $x_i(j)$ — элементом, подаваемым на i -й вход в момент времени j . Для $j = 1, \dots, h - 1$ функция f_j определяет элемент на выходе автомата T в момент времени j , а функция f_h определяет элемент на выходе автомата, начиная с момента времени h .

Пусть T — автомат высоты h . Для $p \in \mathbf{N}$ определим функцию $T^p: (E_2^p)^n \rightarrow E_2$. Если $p \leq h$, то положим

$$T^p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f_p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Для $p > h$ положим

$$T^p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f_h([_h \alpha_1,]_h \alpha_2, \dots,]_h \alpha_n).$$

Таким образом, для любого p функция T^p определяет элемент на выходе автомата T в момент времени p . Функции T^p , где $p = 1, \dots, h$, будем называть порождающими. Нетрудно убедиться, что для задания дефинитного автомата необходимо задать высоту автомата и порождающие функции.

Множество всех дефинитных автоматов обозначим $\mathcal{P}_a$. Для $T \in \mathcal{P}_a$ через $h(T)$ обозначим наименьшую высоту автомата T . Ясно, что каждой булевой функции из P_2 соответствует дефинитный автомат высоты 1. Будем использовать стандартные обозначения для автоматов высоты 1, а именно: $\bar{x}$, $x \& y = xy$, $x \vee y$, $x + y$ — дефинитные автоматы T_1 , T_2 , T_3 и T_4 высоты 1 такие, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} T_1^1(\alpha) &= \bar{\alpha}, & T_2^1(\alpha, \beta) &= \alpha \& \beta, \\ T_3^1(\alpha, \beta) &= \alpha \vee \beta, & T_4^1(\alpha, \beta) &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Пусть S_c — автомат высоты 2 с одним входом, для которого $S_c^1(\alpha) = c$, $S_c^2(\alpha) = \alpha(1)$. Автомат S_c будем называть задержкой с начальным состоянием c .

Пусть $M \subseteq \mathcal{P}_a$. Фиксируем некоторое счетное множество $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$, элементы которого будем называть переменными. Индуктивно определим понятие терма над множеством M :

- (1) если $u \in U$, то u — терм над M ,
- (2) если F — автомат с $n \in \mathbf{N}$ входами, $F \in M$, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ — термы над M , то выражение $F(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ — терм над M .

Термы, отличные от переменных, назовем собственными. Пусть τ — произвольный терм, $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ — набор попарно различных переменных, содержащий все переменные, использованные при построении терма τ . Тогда через $\tau(x_1, x_2, \dots, x_m)$ обозначим функцию $\tau: E^m \rightarrow E$, определяемую индуктивно:

- (1) если $\tau = x_c$ — переменная, $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^m) \in E^m$, то определим

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_m)(\gamma) = \gamma^c,$$

- (2) если $\tau = F(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^m) \in E^m$, то определим

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_m)(\gamma) = F(\tau_1(x_1, x_2, \dots, x_m)(\gamma), \dots, \tau_n(x_1, x_2, \dots, x_m)(\gamma)).$$

О функции T такой, что $T = \tau(x_1, x_2, \dots, x_m)$ для некоторого собственного терма τ над множеством M , будем говорить, что она получена термальными операциями из дефинитных автоматов множества M . Нетрудно проверить, что функция T также будет дефинитным автоматом, поэтому мы можем ввести на множестве $\mathcal{P}_a$ оператор замыкания $[\cdot]$ относительно термальных операций — такое отображение, которое каждому множеству $M \subseteq \mathcal{P}_a$ сопоставляет множество $[M]$ всех автоматов, которые можно получить термальными операциями из автоматов множества M . Определенный выше оператор замыкания также известен как оператор замыкания относительно операций суперпозиции [12].

Множество M называется замкнутым, если $[M] = M$; множество M называется полным, если $[M] = \mathcal{P}_a$. Пусть $\tau \in \mathbf{N}$, скажем, что автоматы T_1 и T_2 с n входами τ -равны, если для любого $i \leq \tau$ справедливо равенство $T_1^i = T_2^i$. Обозначим через $[M]_\tau$ множество всех дефинитных автоматов, τ -равных получающимся из M с помощью термальных операций. Множество M называется A -полным, если $[M]_\tau = \mathcal{P}_a$ для любого τ . Положим

$$[M]_A = \bigcap_{\tau=1}^{\infty} [M]_\tau.$$

Проблема A -полноты для $\mathcal{P}_a$ состоит в описании всех A -полных множеств M . Множество M называется A -замкнутым, если $[M]_A = M$; M называется A -предполным, если $[M]_A \neq \mathcal{P}_a$ и для любой $f \in \mathcal{P}_a \setminus M$ справедливо равенство

$$[M \cup \{f\}]_A = \mathcal{P}_a.$$

Нетрудно заметить, что дефинитные автоматы — это все автоматы, которые можно получить с помощью термальных операций из автоматов из P_2 и задержки. Другими словами $[P_2 \cup \{S_c\}] = \mathcal{P}_a$, где S_c — задержка с начальным состоянием c . Отсюда, в частности, следует, что $\{\bar{x} \vee \bar{y}, S_c\} = \mathcal{P}_a$.

Постом полностью описаны все замкнутые относительно операций суперпозиции классы булевых функций [1, 2]. Все они конечнопорожденные и образуют счетную решетку по включению.

Ранее автор показал, что для систем дефинитных автоматов вида $P_2 \cup \nu$ существует алгоритм проверки на полноту и A -полноту таких систем дефинитных автоматов [9]. Значит, для распознавания полноты и A -полноты существенна роль функций без памяти, присутствующих в базисе. Если присутствуют все функции без памяти, то проблемы A -полноты и полноты для дефинитных автоматов алгоритмически разрешимы. Если присутствует, фактически, лишь тождественная функция x , то не существует алгоритма распознавания A -полноты и полноты для дефинитных автоматов [4, 8].

Учитывая эти результаты, естественно исследовать на A -полноту и полноту системы вида $F \cup \nu$, где F — некоторый класс Поста, а ν — конечная система дефинитных автоматов. Такие системы мы будем называть автоматными базисами Поста — так же, как это делал Д. Н. Бабин в работах [5, 7].

Пусть F — замкнутый класс булевых функций. Определим проблему A -ПОЛНОТА(F) следующим образом: дана конечная система ν дефинитных автоматов, заданных своими порождающими функциями; требуется установить, A -полна ли система $F \cup \nu$.

Нетрудно убедиться, что если $F \subseteq F'$ и проблема A -ПОЛНОТА(F) алгоритмически разрешима, то A -ПОЛНОТА(F') также алгоритмически разрешима. Аналогично, если $F' \subseteq F$ и проблема A -ПОЛНОТА(F) алгоритмически неразрешима, то A -ПОЛНОТА(F') также алгоритмически неразрешима. Также, если F^* — класс, двойственный к F относительно замены 0 на 1, то проблема A -ПОЛНОТА(F^*) алгоритмически разрешима тогда и только тогда, когда алгоритмически разрешима проблема A -ПОЛНОТА(F).

Воспользуемся обозначениями из [1]. Для $\mu \geq 2$

$$h_\mu(x_1, x_2, \dots, x_{\mu+1}) = \bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{\mu+1},$$

h_μ^* — функция, двойственная к h_μ . В частности,

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3.$$

Будем использовать также обозначения

$$\begin{aligned} F_2^3 &= [\{h_3^*\}], & F_6^3 &= [\{h_3\}], & D_2 &= [\{h_2\}], & L_4 &= [\{x + y + z\}], \\ F_4^\infty &= [\{x \vee \bar{y}\}], & F_8^\infty &= [\{x \& \bar{y}\}], & S_6 &= [\{x \vee y, 0, 1\}], & P_6 &= [\{x \& y, 0, 1\}], \\ O_9 &= [\{\bar{x}, 0\}], & F_4^4 &= [\{x \vee \bar{y}, h_4^*\}], & F_8^4 &= [\{x \& \bar{y}, h_4\}]. \end{aligned}$$

Ранее автором были доказаны две следующие теоремы (соответственно в [10] и [11]).

Теорема 1 ([10]). Проблема A -Полнота(F) алгоритмически неразрешима для каждого $F \in \{F_4^\infty, F_8^\infty, S_6, P_6, O_9\}$.

Теорема 2 ([11]). Проблема A -Полнота(F) алгоритмически разрешима для каждого $F \in \{F_2^3, F_6^3, D_2, L_4\}$.

В данной работе доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Проблема A -Полнота(F) алгоритмически неразрешима для каждого $F \in \{F_4^4, F_8^4\}$.

Эта теорема завершает построение классификации классов Поста по их способности гарантировать разрешимость проблемы A -полноты для дефинитных автоматов. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Проблема A -Полнота(F) алгоритмически разрешима тогда и только тогда, когда для какой-то $f \in \{h_2, x + y + z, h_3, h_3^*\}$ справедливо включение $f \in F$.

3. Основные утверждения

Тройка $\theta = \langle D, \rho, \omega \rangle$, где $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, D^* — множество слов в алфавите D , $\rho: D \rightarrow D^*$, $\rho(d_i) = R_i$, ω — натуральное число, называется системой однородных произведений Поста. Если $\xi \in D^*$, $|\xi| \geq \omega$, то скажем, что θ применима к слову $\xi = g_1 g_2 \dots g_{|\xi|}$, где $g_1 = d_c$, и слово $\theta(\xi) = g_{\omega+1} g_{\omega+2} \dots g_{|\xi|} R_c$ назовем результатом применения θ к слову ξ . Последовательность $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ такую, что $\xi_1 = \xi$, а $\xi_{i+1} = \theta(\xi_i)$, назовем последовательностью произведений Поста слова ξ . Известно [13], что существует система однородных произведений Поста, для которой не существует алгоритма, по слову ξ решающего вопрос о конечности последовательности произведений слова ξ . Зафиксируем эту систему произведений Поста $\langle D, \rho, \omega \rangle$.

Для определенности будем считать, что k — четное число. Если это не так, добавим в D еще один элемент и определим произвольным образом $\rho(d_{k+1})$. Понятно, что при этом проблема конечности последовательности произведений Поста останется неразрешимой. Для $g = d_i \in D$ определим $\tilde{g} = 1^i 01^{k+1-i}$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} e_1 &= (01)^5 00010001(01)^{k/2+1}, & e_2 &= (10)^5 10100000(10)^{k/2+1}, \\ p_0 &= 1(01)1(10)1(10)1(1)^8, & p_1 &= 1(10)1(00)1(10)1(1)^8, \\ p_2 &= 1(10)1(00)1(00)1(1)^8, & p_3 &= 1(10)1(10)1(10)1(1)^8. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что для любых i, j и l выполняется равенство

$$|p_i| + |\tilde{d}_j| = |e_l| = k + 20.$$

В процессе доказательства все сверхслова будут разбиваться на слова длины $k + 20$. При этом будут встречаться слова вида $p_i \tilde{d}_j$ и e_i . Первые десять символов в слове $p_i \tilde{d}_j$ являются заголовком и задают i . Следующие восемь символов используются только в словах e_1 и e_2 и служат для определения остатка от деления номера позиции на $k + 20$. И наконец, последние $k + 2$ символа задают j в словах вида $p_i \tilde{d}_j$.

Пусть $g_i \in D$ для любого i , $m_1 < m_2 < m_3$. Сверхслова вида

$$\begin{aligned} p_1 \tilde{g}_1 p_1 \tilde{g}_2 \dots p_1 \tilde{g}_{m_1} p_2 \tilde{g}_{m_1+1} p_3 \tilde{g}_{m_1+2} \dots p_3 \tilde{g}_{m_2} p_0 \tilde{g}_{m_2+1} p_0 \tilde{g}_{m_2+2} \dots, \\ p_1 \tilde{g}_1 p_1 \tilde{g}_2 \dots p_1 \tilde{g}_{m_1} p_2 \tilde{g}_{m_1+1} p_3 \tilde{g}_{m_1+2} \dots p_3 \tilde{g}_{m_2} p_0 \tilde{g}_{m_2+1} p_0 \tilde{g}_{m_2+2} \dots p_0 \tilde{g}_{m_3} 1^\infty \end{aligned}$$

будем называть записями продукции $g_{m_1+1}g_{m_1+2} \dots g_{m_2}$.

Пусть

$$C_{01} = \{(01)^n 1^\infty \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Определим отображение $\tilde{H}_{01}: C_{01} \rightarrow E$ такое, что

$$\tilde{H}_{01}((01)^n 1^\infty) = (01)^{n+1} 1^\infty.$$

Пусть

$$C_{10} = \{(10)^n 1^\infty \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Определим отображение $\tilde{H}_{10}: C_{10} \rightarrow E$ такое, что

$$\tilde{H}_{10}((10)^n 1^\infty) = (10)^{n+1} 1^\infty.$$

Пусть V_e — множество пар вида $((e_1)^n (01)^\infty, (e_2)^n (10)^\infty)$, где $n \in \mathbb{N}_0$. Определим отображения $\tilde{H}_1: V_e \rightarrow E$ и $\tilde{H}_2: V_e \rightarrow E$ такие, что

$$\tilde{H}_1((e_1)^n (01)^\infty, (e_2)^n (10)^\infty) = (e_1)^{n+1} (01)^\infty,$$

$$\tilde{H}_2((e_1)^n (01)^\infty, (e_2)^n (10)^\infty) = (e_2)^{n+1} (10)^\infty.$$

Пусть C_F — множество сверхслов вида $p_0 \tilde{g}_1 p_0 \tilde{g}_2 \dots p_0 \tilde{g}_n 1^\infty$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $g_i \in D$ для любого i . Для $d_c \in D$ определим $\tilde{F}_c: C_F \rightarrow E$ такое, что

$$\tilde{F}_c(p_0 \tilde{g}_1 p_0 \tilde{g}_2 \dots p_0 \tilde{g}_n 1^\infty) = p_0 \tilde{g}_1 p_0 \tilde{g}_2 \dots p_0 \tilde{g}_n p_0 \tilde{d}_c 1^\infty.$$

Пусть $d_c \in D$, V_c — множество троек вида $(p_1 \tilde{g}_1 p_1 \tilde{g}_2 \dots p_1 \tilde{g}_{m_1} p_2 \tilde{g}_{m_1+1} p_3 \tilde{g}_{m_1+2} \dots p_3 \tilde{g}_{m_2} p_0 \tilde{g}_{m_2+1} p_0 \tilde{g}_{m_2+2} \dots, e_1^\infty, e_2^\infty)$, где $g_i \in D$ для любого i , $g_{m_1+1} = d_c$, $m_2 - m_1 \geq \omega$ и $g_{m_2+1} g_{m_2+2} \dots g_{m_2+|R_c|} = R_c$. Определим $\tilde{T}_c: V_c \rightarrow E$, полагая

$$\tilde{T}_c(p_1 \tilde{g}_1 p_1 \tilde{g}_2 \dots p_1 \tilde{g}_{m_1} p_2 \tilde{g}_{m_1+1} p_3 \tilde{g}_{m_1+2} \dots p_3 \tilde{g}_{m_2} p_0 \tilde{g}_{m_2+1} p_0 \tilde{g}_{m_2+2} \dots, e_1^\infty, e_2^\infty) = \beta,$$

где

$$\begin{aligned} \beta = & p_1 \tilde{g}_1 p_1 \tilde{g}_2 \dots p_1 \tilde{g}_{m_1+\omega} p_2 \tilde{g}_{m_1+\omega+1} p_3 \tilde{g}_{m_1+\omega+2} \dots \\ & p_3 \tilde{g}_{m_2+|R_c|} p_0 \tilde{g}_{m_2+|R_c|+1} p_0 \tilde{g}_{m_2+|R_c|+2} \dots \end{aligned}$$

Другими словами, отображение $\tilde{T}_c$ преобразует запись продукции ξ в запись продукции $\theta(\xi)$. Стоит отметить, что запись продукции $\theta(\xi)$ уже содержится в сверхслове, подаваемом на первый вход. Отображение $\tilde{T}_c$ лишь преобразует заголовки p_0 , p_1 , p_2 и p_3 .

Пусть V_F — множество троек вида $(p_1 \tilde{g}_1 p_1 \tilde{g}_2 p_1 \tilde{g}_3 \dots, e_1^\infty, e_2^\infty)$, где $g_i \in D$ для любого i . Определим $\tilde{F}: V_F \rightarrow E$, полагая

$$\tilde{F}(p_1 \tilde{g}_1 p_1 \tilde{g}_2 p_1 \tilde{g}_3 \dots, e_1^\infty, e_2^\infty) = 0^\infty.$$

Для произвольного слова $\xi = g_1 g_2 \dots g_l \in D^*$ определим множество C_ξ сверхслов вида $p_0 \tilde{g}_1 p_0 \tilde{g}_2 \dots p_0 \tilde{g}_l p_0 \tilde{g}_{l+1} p_0 \tilde{g}_{l+2} \dots p_0 \tilde{g}_n 1^\infty$, где $g_{l+1}, g_{l+2}, \dots, g_n \in D$. Также определим отображение $\tilde{T}_\xi: C_\xi \rightarrow E$ такое, что

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\xi(p_0 \tilde{g}_1 p_0 \tilde{g}_2 \dots p_0 \tilde{g}_l p_0 \tilde{g}_{l+1} p_0 \tilde{g}_{l+2} \dots p_0 \tilde{g}_n 1^\infty) \\ = p_2 \tilde{g}_1 p_3 \tilde{g}_2 \dots p_3 \tilde{g}_l p_0 \tilde{g}_{l+1} p_0 \tilde{g}_{l+2} \dots p_0 \tilde{g}_n 1^\infty. \end{aligned}$$

Другими словами, на выходе отображения $\tilde{T}_\xi$ будет запись продукции ξ .

Таким образом, отображение $\tilde{H}_{01}$ определено на C_{01} , $\tilde{H}_{10}$ определено на C_{10} , $\tilde{H}_1$ и $\tilde{H}_2$ на V_e , $\tilde{F}_c$ на C_F , $\tilde{T}_c$ на V_c , $\tilde{F}$ на V_F , $\tilde{T}_\xi$ на C_ξ .

Построим дефинитные автоматы $H_{01}, H_{10}, H_1, H_2, F_1, \dots, F_k, T_1, \dots, T_k, F, T_\xi$, соответствующие этим отображениям. Определим высоты автоматов. Положим

$$\begin{aligned} h(H_{01}) &= 3, & h(H_{10}) &= 3, \\ h(H_1) &= (k + 20) \cdot 2, & h(H_2) &= (k + 20) \cdot 2, \\ h(F_c) &= (k + 20) \cdot 2, & h(F) &= (k + 20) \cdot 2, \\ h(T_c) &= (\omega + |R_c| + 2)(k + 20), & h(T_\xi) &= (|\xi| + 2)(k + 20). \end{aligned}$$

Определим сразу все перечисленные автоматы. Пусть $H \in \{H_{01}, H_{10}, H_1, H_2, F_1, \dots, F_k, T_1, \dots, T_k, F, T_\xi\}$, автомату H соответствует отображение $\tilde{H}$, которое определено на множестве C . Зададим порождающие функции автомата H .

Для $i < h(H)$ положим $H^i(r) = 0$ тогда и только тогда, когда существует $r' \in C$ такое, что $]_i r' = r$ и для свёрхслова $\beta = \tilde{H}(r')$ выполняется равенство $\beta(i) = 0$. Аналогично $H^{h(H)}(r) = 0$ тогда и только тогда, когда существуют $l \geq h(H)$ и $r' \in C$ такие, что $]_{h(H)} l r' = r$ и для свёрхслова $\beta = \tilde{H}(r')$ выполняется равенство $\beta(l) = 0$.

Определение 1. Дефинитный автомат T с n входами называется автоматным доопределением отображения $\tilde{T}: C \rightarrow E$, если $C \subseteq E^n$ и для любого $r \in C$ выполняется равенство $T(r) = \tilde{T}(r)$.

Предложение 1. Дефинитные автоматы $H_{01}, H_{10}, H_1, H_2, F_1, \dots, F_k, T_1, \dots, T_k, F, T_\xi$ являются автоматными доопределениями отображений $\tilde{H}_{01}, \tilde{H}_{10}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_k, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_k, \tilde{F}, \tilde{T}_\xi$ соответственно.

Для каждого слова ξ такого, что последовательность продукции слова ξ конечна и имеет вид $\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$, определим множество $W_\xi \subseteq \mathbb{N}^3$. Пусть для любого t слово ξ_t начинается с буквы d_{i_t} . Рассмотрим две последовательности натуральных чисел:

$$a_i = (i - 1)\omega, \quad b_i = a_i + |\xi_i|.$$

Положим

$$n_4(\xi) = b_s(k + 20) + 6, \quad \xi_1 R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_{s-1}} = g_1 g_2 \dots g_l.$$

Для $1 \leq i \leq s$ положим

$$\zeta_i = p_1 \tilde{g}_1 p_1 \tilde{g}_2 \dots p_1 \tilde{g}_{a_i} p_2 \tilde{g}_{a_i+1} p_3 \tilde{g}_{a_i+2} \dots p_3 \tilde{g}_{b_i} p_0 \tilde{g}_{b_i+1},$$

то есть ζ_i — начало записи продукции ξ_i .

Тройка (n_1, n_2, n_3) принадлежит W_ξ , если и только если $n_1, n_2, n_3 \leq n_4(\xi)$ и числа n_1, n_2, n_3 удовлетворяют одному из следующих условий:

- (1) $n_1 = n_4(\xi) - 1; n_2 = n_3 = n_4(\xi);$
- (2) $n_1 = (k + 20)n + q_1, n_2 = (k + 20)n + q_2$, где $n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq q_1, q_2 \leq (k + 20), q_2 - q_1 = 1$ и $(q_1, q_2) \notin \{(5, 6), (8, 9), (11, 12), (12, 13), (14, 15), (15, 16), (16, 17), (17, 18)\};$
 $n_3 = n_4(\xi).$
- (3) $n_1 = (k + 20)n + 8; n_2 = (k + 20)n + 9; n \neq a_i$ для любого $i; n_3 = n_4(\xi);$

- (4) $n_1 = (k + 20)n + 8$; $n_2 = (k + 20)n + 9$; существует i такое, что $n = a_i$, $\zeta_i(n_3) = 1$, $n_3 \leq b_i(k + 20) + 4$.

Нетрудно убедиться, что для любой тройки $(n_1, n_2, n_3) \in W_\xi$ справедливо равенство $n_1 + 1 = n_2$.

Определение 2. Говорим, что автомат $T \in P_a$ с n входами сохраняет $C \subseteq E$, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in C$ выполняется включение $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in C$.

Нетрудно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Для любого $C \subseteq E$ множество всех автоматов, сохраняющих множество C , замкнуто.

По $n_4(\xi)$ и множеству W_ξ построим множество сверхслов $\widetilde{W}_\xi$. Сверхслово α принадлежит $\widetilde{W}_\xi$ тогда и только тогда, когда $\alpha(n_1) \vee \alpha(n_2) \vee \alpha(n_3) \vee \alpha(n_4(\xi)) = 1$ для любого $(n_1, n_2, n_3) \in W_\xi$. Из предложения 2 следует, что класс автоматов, сохраняющих $\widetilde{W}_\xi$, замкнут.

Предложение 3. Каждый из автоматов $x \vee \bar{y}$, $x \vee S_0(y)$, h_4^* , H_{01} , H_{10} , H_1 , H_2 , $F_1, \dots, F_k$, F , $T_1, \dots, T_k$, T_ξ сохраняет множество $\widetilde{W}_\xi$ для любого ξ такого, что последовательность продукций Поста слова ξ конечна.

Предложение 4. Пусть последовательность продукций слова ξ бесконечна, тогда система

$$\Sigma = \{x \vee \bar{y}, x \vee S_0(y), H_{01}, H_{10}, H_1, H_2, F_1, \dots, F_k, T_1, \dots, T_k, F, T_\xi\}$$

A -полна.

Доказательство. Пусть последовательность продукций Поста слова ξ бесконечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$. Также пусть для любого t слово ξ_t начинается с буквы d_{i_t} .

Так как $x \vee \bar{x} = 1$ для любого x , константа 1 принадлежит $[\Sigma]$. Пусть

$$\tau = s\omega(k + 20), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$\begin{aligned} Q_{01}(x) &= H_{01}(H_{01}(H_{01}(\dots(H_{01\tau}(x))\dots))), \\ Q_{10}(x) &= H_{10}(H_{10}(H_{10}(\dots(H_{10\tau}(x))\dots))), \end{aligned}$$

где символы H_{01} и H_{10} входят в формулу τ раз.

Нетрудно убедиться, что первые τ символов сверхслова $Q_{01}(1^\infty)$ совпадают с первыми τ символами сверхслова $(01)^\infty$, а первые τ символов сверхслова $Q_{10}(1^\infty)$ совпадают с первыми τ символами сверхслова $(10)^\infty$.

Определим рекурсивно две последовательности сверхслов. Пусть

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (01)^\infty, & \gamma_0 &= (10)^\infty, \\ \beta_i &= H_1(\beta_{i-1}, \gamma_{i-1}), & \gamma_i &= H_2(\beta_{i-1}, \gamma_{i-1}). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что для любого i

$$\beta_i = (e_1)^i (01)^\infty, \quad \gamma_i = (e_2)^i (10)^\infty.$$

Значит, существуют автоматы $G_1, G_2 \in [\Sigma]$ такие, что

$$\begin{aligned}]_{\tau} G_1((01)^{\infty}, (10)^{\infty}) &= (e_1)^{s\omega}, \\]_{\tau} G_2((01)^{\infty}, (10)^{\infty}) &= (e_2)^{s\omega}. \end{aligned}$$

Определим автоматы $L_1, L_2 \in [\Sigma]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= G_1(Q_{01}(x \vee \bar{x}), Q_{10}(x \vee \bar{x})), \\ L_2(x) &= G_2(Q_{01}(x \vee \bar{x}), Q_{10}(x \vee \bar{x})). \end{aligned}$$

Рассмотрим слово $\xi_1 R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_{s-1}} R_{i_s} = d_{j_1} d_{j_2} \dots d_{j_l}$. Очевидно, что $l \geq s\omega$. Введем обозначение

$$G_3(x) = F_{j_l}(F_{j_{l-1}}(\dots(F_{j_2}(F_{j_1}(x)))\dots)).$$

Легко проверить, что

$$G_3(1^{\infty}) = F_{j_l}(F_{j_{l-1}}(\dots(F_{j_2}(F_{j_1}(1^{\infty})))\dots)) = p_0 \tilde{d}_{j_1} p_0 \tilde{d}_{j_2} \dots p_0 \tilde{d}_{j_l} 1^{\infty}.$$

Пусть

$$\delta_1 = T_{\xi}(p_0 \tilde{d}_{j_1} p_0 \tilde{d}_{j_2} \dots p_0 \tilde{d}_{j_l} 1^{\infty}).$$

Легко проверить, что δ_1 является записью продукции ξ . Определим индуктивно

$$\delta_{r+1} = T_{i_r}(\delta_r, (e_1)^{\infty}, (e_2)^{\infty}).$$

Тогда существует автомат $G_0 \in [\Sigma]$ такой, что $G_0(\delta_1, (e_1)^{\infty}, (e_2)^{\infty}) = \delta_{s+1}$. Сверхслово δ_r является записью продукции ξ_r для $r = 1, 2, \dots, s, s+1$. Первые τ символов сверхслова $F(\delta_{s+1})$ равны нулю.

Таким образом, получен автомат $F(G_0(T_{\xi}(G_3(x \vee \bar{x})), L_1(x), L_2(x)), L_1(x), L_2(x))$ из $[\Sigma]$, который первые τ моментов времени работает как константа 0.

Так как $0 \vee S_0(y) = S_0(y)$ и $0 \vee \bar{y} = \bar{y}$, автоматы $x \vee S_0(y)$, $x \vee \bar{y}$, 0 составляют полную систему в $\mathcal{P}_A$. Но τ мы можем выбрать сколь угодно большим, значит, данная система A -полна и предложение доказано.

Предложение 5. Система

$$\Sigma = \{x \vee \bar{y}, x \vee S_0(y), h_4^*, H_{01}, H_{10}, H_1, H_2, F_1, F_2, \dots, F_k, T_1, T_2, \dots, T_k, F, T_{\xi}\}$$

A -полна тогда и только тогда, когда последовательность продукции слова ξ бесконечна.

Доказательство. Достаточность следует из предложения 4.

Докажем необходимость. Пусть последовательность продукции слова ξ конечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$. Из предложения 3 следует, что каждый из автоматов в Σ сохраняет множество $\widetilde{W}_{\xi}$.

Из предложения 2 следует, что класс всех автоматов, сохраняющих $\widetilde{W}_{\xi}$, замкнут. Но любой автомат, τ -равный константе 0 для $\tau = (s+1)\omega(k+20)$, очевидно, не сохраняет множество $\widetilde{W}_{\xi}$. Так как $[\Sigma]$ сохраняет $\widetilde{W}_{\xi}$, константа 0 не принадлежит $[\Sigma]_A$. Тогда Σ не A -полно. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 3. Так как классы F_4^4 и F_8^4 двойственны, достаточно доказать теорему для F_4^4 . Предположим, что теорема неверна. Тогда существует алгоритм, решающий проблему A -Полнота(F_4^4).

Построим алгоритм, решающий проблему конечности последовательности продукций Поста $\langle D, \rho, \omega \rangle$. По слову $\xi \in D^*$ эффективно строится автомат T_ξ . По предположению, существует алгоритм, решающий проблему A -полноты для системы

$$\Sigma = \{x \vee \bar{y}, x \vee S_0(y), h_4^*, H_{01}, H_{10}, H_1, H_2, F_1, F_2, \dots, F_k, T_1, T_2, \dots, T_k, F, T_\xi\}.$$

Из предложения 5 следует, что система Σ является A -полной тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ бесконечна.

Таким образом, алгоритм, решающий проблему конечности последовательности продукций Поста $\langle D, \rho, \omega \rangle$, заключается в следующем: по слову ξ строим дефинитный автомат T_ξ ; решаем проблему A -полноты для системы

$$\Sigma = \{x \vee \bar{y}, x \vee S_0(y), h_4^*, H_{01}, H_{10}, H_1, H_2, F_1, F_2, \dots, F_k, T_1, T_2, \dots, T_k, F, T_\xi\}.$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

4. Доказательство утверждений 1 и 3

Доказательство предложения 1. Пусть $H \in \{H_{01}, H_{10}, H_1, H_2, F_1, \dots, F_k, T_1, \dots, T_k, F, T_\xi\}$, $\tilde{H}$ — отображение, соответствующее H , $\tilde{H}$ определено на C .

Пусть $r_1 \in C$, $H(r_1) = \delta'$, $\tilde{H}(r_1) = \delta_1$. Покажем, что $\delta' = \delta_1$. Предположим, что это не так, тогда для какого-то l_1 выполняется неравенство $\delta'(l_1) \neq \delta_1(l_1)$. Учитывая определение автомата H , получаем, что $\delta'(l_1) = 0$, $\delta_1(l_1) = 1$.

Рассмотрим случай, когда $l_1 < h(H)$. В этом случае существует $r_2 \in C$ такое, что $]l_1 r_1 =]l_1 r_2$, $\tilde{H}(r_2) = \delta_2$, причем $\delta_2(l_1) = 0 \neq \delta_1(l_1)$. Из определения отображений $\tilde{H}_{01}, \tilde{H}_{10}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_k, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_k, \tilde{F}, \tilde{T}_\xi$ следует, что это невозможно.

Теперь рассмотрим случай, когда $l_1 \geq h(H)$. В этом случае существуют $r_2 \in C$ и l_2 такие, что $]_{h(H)} l_1 r_1 =]_{h(H)} l_2 r_2 = r$, $\tilde{H}(r_2) = \delta_2$, причем $\delta_2(l_2) = 0 \neq \delta_1(l_1)$.

Докажем утверждение для автоматов H_{01} , H_{10} . Если $r \in \{010, 011\}$, то $\delta_1(l_1) = \delta_2(l_2) = 0$, в противном случае $\delta_2(l_2) = \delta_2(l_2) = 1$. Получили противоречие. Другими словами, для любого i выход в момент времени i полностью определяется последними тремя символами и неравенство $\delta_1(l_1) \neq \delta_2(l_2)$ невозможно.

Докажем утверждение для автоматов H_1 и H_2 . Пусть $r = (\alpha_1, \alpha_2)$. Нетрудно убедиться, что для H_1 каждое из равенств $\delta_1(l_1) = 0$ и $\delta_2(l_2) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1(2(k+20)) = 0, \quad \alpha_1 = (010001(01)^{k/2+1})((01)^5 00010001(01)^{k/2+1})((01)^5 01)$$

или

$$\alpha_1 = (01(01)^{k/2+1})((01)^5 00010001(01)^{k/2+1})((01)^5 010101).$$

Аналогично, для H_2 каждое из равенств $\delta_1(l_1) = 0$ и $\delta_2(l_2) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_2(2(k+20)) = 0, \quad \alpha_2 = (000(10)^{k/2+1})((10)^5 10100000(10)^{k/2+1})((10)^5 10101)$$

или

$$\alpha_2 = (0(10)^{k/2+1})((10)^5 10100000(10)^{k/2+1})((10)^5 1010101).$$

Другими словами, элементы $\delta_1(l_1)$ и $\delta_2(l_2)$ полностью определяются парой слов r . Получили противоречие с равенствами $\delta_1(l_1) = 1$, $\delta_2(l_2) = 0$.

Докажем утверждение для автомата F_c , где $1 \leq c \leq k$. Нетрудно убедиться, что для F_c каждое из равенств $\delta_1(l_1) = 0$ и $\delta_2(l_2) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $r(2(k+20)) = 0$ или слово r заканчивается на слово, содержащееся в множестве $\{p_0\tilde{d}_j 1^{c+19}, p_0\tilde{d}_j 11, p_0\tilde{d}_j 1(11)1(11), p_0\tilde{d}_j 1(11)1(11)1(11)\}$, то есть, элементы $\delta_1(l_1)$ и $\delta_2(l_2)$ полностью определяются словом r . Получили противоречие.

Пусть $H = T_c$, где $1 \leq c \leq k$, $r = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. α_2 всегда заканчивается на слово вида $e_1\gamma$, где $\gamma =]_m(e_1)$, $0 \leq m < (k+20)$. Нетрудно убедиться, что каждое из равенств $\delta_1(l_1) = 0$ и $\delta_2(l_2) = 0$ выполняется только в следующих случаях:

- (1) α_1 заканчивается на 0 и $m \notin \{2, 8\}$;
- (2) $m = 3$ и α_1 заканчивается на $p_3\tilde{g}_0 p_0\tilde{g}_1 \dots p_0\tilde{g}_s 101$, где $s < |R_c|$, $g_i \in D$ для любого i ;
- (3) $m = 2$ и α_1 заканчивается на $p_0\tilde{g}_1 \dots p_0\tilde{g}_s 10$, где $s \geq |R_c|$, $g_i \in D$ для любого i ;
- (4) $m = 8$ и α_1 заканчивается на $p_2\tilde{g}_1 p_3\tilde{g}_2 \dots p_3\tilde{g}_\omega 1(\varepsilon)1(10)11$, где $\varepsilon \in \{01, 10\}$, $g_i \in D$ для любого i ;
- (5) $m = 5$ и α_1 заканчивается на $p_2\tilde{g}_1 p_3\tilde{g}_2 \dots p_3\tilde{g}_s 1(\varepsilon)11$, где $s \leq \omega$, $\varepsilon \in \{01, 10\}$, $g_i \in D$ для любого i .

Таким образом, элементы $\delta_1(l_1)$ и $\delta_2(l_2)$ полностью определяются тройкой r . Получили противоречие с неравенством $\delta_1(l_1) \neq \delta_2(l_2)$.

Пусть $H = F$. Из определения следует, что $\delta_1 = \delta_2 = 0^\infty$. Значит $\delta_2(l_2) = 0$. Получили противоречие.

Для $H = T_\xi$ каждое из равенств $\delta_1(l_1) = 0$ и $\delta_2(l_2) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда r заканчивается на 0. Получили противоречие с неравенством $\delta_1(l_1) \neq \delta_2(l_2)$. Предложение доказано.

Лемма 1. Если последовательность продукций слова ξ конечна, то каждый из автоматов $x \vee \bar{y}$, $x \vee S_0(y)$, h_4^* , сохраняет множество $\tilde{W}_\xi$.

Доказательство. Докажем лемму для автоматов $x \vee \bar{y}$ и $x \vee S_0(y)$. Если на первый вход любого из этих автоматов в какой-то момент времени подавалась 1, то и на выходе в этот момент времени будет 1. Поэтому, если на первый вход подавалось сверхслово из $\tilde{W}_\xi$, то и на выходе будет сверхслово из $\tilde{W}_\xi$.

Докажем лемму для автомата $h_4^*(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Предположим, что это не так. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \tilde{W}_\xi$, а $h_4^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \beta \notin \tilde{W}_\xi$. Значит, для какой-то тройки $(n_1, n_2, n_3) \in W_\xi$ верны равенства $\beta(n_1) = \beta(n_2) = \beta(n_3) = \beta(n_4(\xi)) = 0$. Так как на вход в h_4^* подается 5 сверхслов и для каждого сверхслова α_i найдется $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ такое, что $\alpha_i(n_j) = 1$, для каких-то $j, m, l, m \neq l$ выполняются равенства $\alpha_m(n_j) = \alpha_l(n_j) = 1$. Но в этом случае $\beta(n_j) = 1$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2. Для любых $H \in \{H_{01}, H_{10}, F_1, F_2, \dots, F_k\}$, $\beta = H(\alpha)$, $\alpha \in E$, $i \in \mathbf{N}$ выполняется равенство

$$\beta(i) \vee \beta(i + 1) = 1.$$

Доказательство. Для $i < h(H)$ утверждение очевидно. Докажем его для $i \geq h(H)$. Предположим, что это не так и $\beta(i) = \beta(i + 1) = 0$. Пусть $H \in \{H_{01}, H_{10}\}$. Так как $\beta(i + 1) = 0$, справедливы равенства $\alpha(i - 1) = 0, \alpha(i) = 1$. Но тогда $\beta(i) = 1$. Получили противоречие.

Теперь докажем лемму для F_c , где $1 \leq c \leq k$. Как было указано выше, если $\beta(i) = 0$, то $\alpha(i) = 0$ или слово $]_i\alpha$ заканчивается на слово из множества

$$R = \{p_0\tilde{d}_j1^{c+13}, p_0\tilde{d}_j11, p_0\tilde{d}_j1(11)1(11), p_0\tilde{d}_j1(11)1(11)1(11)\}.$$

Если $\alpha(i) = 0$ и $\alpha(i + 1) = 0$, то $\beta(i + 1) = 1$, так как в C_F нет сверхслов, в которых в каком-то месте идут подряд 2 нуля. Если $\alpha(i) = 0$, а $\alpha(i + 1) = 1$, то $\beta(i + 1) = 1$, так как в R нет слов, заканчивающихся на 01. Пусть $\alpha(i) = 1$, а $]_i\alpha$ заканчивается на слово из множества R . Легко проверить, что в любом сверхслове из C_F после слова из R обязательно идет 1. Значит $\alpha(i + 1) = 1$. Но в этом случае $]_{i+1}\alpha$ не может заканчиваться на слово из R . Получили противоречие. Лемма доказана.

Следствие 1. Если последовательность продукций слова ξ конечна, то каждый из автоматов $H_{01}, H_{10}, F_1, \dots, F_k$ сохраняет множество $\tilde{W}_\xi$.

Доказательство. Как было замечено ранее, для любой тройки $(n_1, n_2, n_3) \in W_\xi$ выполняется равенство $n_1 + 1 = n_2$. Из леммы 2 следует, что если $H \in \{H_{01}, H_{10}, F_1, \dots, F_k\}$, то для $\beta = H(\alpha)$ справедливо равенство $\beta(n_1) \vee \beta(n_2) = 1$. Значит,

$$\beta(n_1) \vee \beta(n_2) \vee \beta(n_3) \vee \beta(n_4(\xi)) = 1,$$

и следствие доказано.

Лемма 3. Если последовательность продукций слова ξ конечна, то автоматы H_1, H_2 сохраняют множество $\tilde{W}_\xi$.

Доказательство. Идея доказательства заключается в следующем. Если сверхслово принадлежит $\tilde{W}_\xi$ и на $n_4(\xi)$ -м месте в нем стоит 0, то слово 0001000 может в нем идти только начиная с позиции $(k + 20)t + 11$, а слово 00000 — с позиции $(k + 20)t + 14$, где $t < b_s$. Чтобы на выходе в момент времени $n_4(\xi)$ был 0, необходимо, чтобы либо на первый вход, либо на второй вход в момент времени $n_4(\xi)$ подавался 0. С помощью этого мы всегда можем определить остаток от деления номера позиции на $k + 20$, и обеспечить, чтобы данные автоматы сохраняли множество $\tilde{W}_\xi$.

Перейдем к доказательству. Докажем сначала утверждение для автомата H_1 . Предположим, что лемма неверна, то есть $\alpha_1, \alpha_2 \in \tilde{W}_\xi$, а $H_1(\alpha_1, \alpha_2) = \beta \notin \tilde{W}_\xi$. Значит, найдется тройка $(n_1, n_2, n_3) \in W_\xi$ такая, что

$$\beta(n_1) = \beta(n_2) = \beta(n_3) = \beta(n_4(\xi)) = 0.$$

Справедливо равенство $\beta(n_4(\xi)) = 0$, поэтому либо $\alpha_1(n_4(\xi)) = 0$, либо $\alpha_2(n_4(\xi)) = 0$. По определению, тройка (n_1, n_2, n_3) имеет вид $n_1 = (k + 20)n + q_1, n_2 = (k + 20)n + q_2$, где $0 \leq q_1, q_2 \leq (k + 20), q_2 - q_1 = 1$. Если $n = 0$, то утверждение очевидно, так как автомат H_1 в моменты времени 2, 4, 6, 8, 10, 14, 18, 20, 22, ..., $(k + 20)$ возвращает единицу.

Пусть $n \geq 1$. Если $\alpha_1(n_4(\xi)) = 1$, то $\alpha_2(n_4(\xi)) = 0$. Так как $\alpha_1(n_4(\xi)) = 1$ и $\beta(n_4(\xi)) = 0$, слово $]_{n_4(\xi)}\alpha_2$ заканчивается на $((10)^5 10100000(10)^{k/2+1})((10)^5 10)$ или на $((10)^5 10100000(10)^{k/2+1})((10)^5 101010)$. Но в этом случае слово 00000 идет в сверхслово α_2 , начиная с позиции $(k+20)m+8$ или $(k+20)m+4$, что невозможно.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha_1(n_4(\xi)) = 0$. Поскольку $\beta(n_4(\xi)) = 0$, $\alpha_1 \in \widetilde{W}_\xi$, $n_4(\xi) = b_s(k+20) + 6$, а слово 0001000 может идти в α_1 только начиная с позиции $(k+20)m+11$, слово $]_{n_4(\xi)}\alpha_1$, очевидно, должно заканчиваться на слово 00010001(01) $^{k/2+1}$ 010101. Но мы предположили, что $\alpha_1(n_4(\xi)) = 0$, получили противоречие.

Теперь докажем утверждение для автомата H_2 . Предположим, что лемма неверна, то есть, $\alpha_1, \alpha_2 \in \widetilde{W}_\xi$, а $H_2(\alpha_1, \alpha_2) = \beta \notin \widetilde{W}_\xi$. Значит, есть тройка $(n_1, n_2, n_3) \in W_\xi$ такая, что $\beta(n_1) = \beta(n_2) = \beta(n_3) = \beta(n_4(\xi)) = 0$. Так как $\beta(n_4(\xi)) = 0$, верно либо $\alpha_1(n_4(\xi)) = 0$, либо $\alpha_2(n_4(\xi)) = 0$. По определению, тройка (n_1, n_2, n_3) имеет вид $n_1 = (k+20)n + q_1$, $n_2 = (k+20)n + q_2$, где $0 \leq q_1, q_2 \leq (k+20)$, $q_2 - q_1 = 1$. Если $n = 0$, то утверждение очевидно, так как автомат H_2 в моменты времени 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 19, 21, 23, ..., $(k+19)$ возвращает единицу.

Пусть $n \geq 1$. Рассмотрим случай, когда $\alpha_1(n_4(\xi)) = 0$. Так как $\beta(n_4(\xi)) = 0$, $\alpha_1 \in \widetilde{W}_\xi$, $n_4(\xi) = b_s(k+20) + 6$, а слово 0001000 может идти в α_1 только начиная с позиции $(k+20)m+11$, слово $]_{n_4(\xi)}\alpha_1$, очевидно, должно заканчиваться на слово 00010001(01) $^{k/2+1}$ 010101. Но мы предположили, что $\alpha_1(n_4(\xi)) = 0$. Получили противоречие.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha_2(n_4(\xi)) = 0$. Поскольку $n \geq 1$,

$$\beta_1(n_2 - 1) = \beta_1(n_2) = \beta(n_4(\xi)) = 0,$$

слово $]_{n_2}\alpha_2$ заканчивается на слово $10100000(10)^{k/2+1}(10)^5\gamma$, где $|\gamma| \in \{5, 6, 7, 8\}$. Иными словами, если автомат H_2 на выходе дает подряд два нуля, то около $k+20$ букв назад на вход подавалось слово 00000. Но слово 00000 может встретиться только на позиции $(k+20)m+14$. Тогда $q_2 \in \{15, 16, 17, 18\}$. Но $q_2 - q_1 = 1$, значит, тройки (n_1, n_2, n_3) нет в множестве W_ξ . Получили противоречие. Значит, автомат H_2 сохраняет $\widetilde{W}_\xi$.

Лемма 4. Если последовательность произведений слова ξ конечна, то автомат F сохраняет множество $\widetilde{W}_\xi$.

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \widetilde{W}_\xi$, но $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \beta \notin \widetilde{W}_\xi$. Значит, найдется тройка $(n_1, n_2, n_3) \in W_\xi$ такая, что

$$\beta(n_1) = \beta(n_2) = \beta(n_3) = \beta(n_4(\xi)) = 0.$$

Так как $\beta(n_4(\xi)) = 0$, либо $\alpha_2(n_4(\xi)) = 0$, либо $\alpha_3(n_4(\xi)) = 0$.

Идея доказательства заключается в следующем. С помощью α_2 или α_3 мы в каждый момент времени можем определить остаток от деления момента времени на $(k+20)$. Для любого n автомат F действует таким образом, что если в момент времени $(k+20)n+6$ на первый вход подается 1, то и на выходе в момент времени $(k+20)n+6$ будет 1. И если в момент времени $(k+20)n+5$ на первый вход подается 1, то опять же на выходе в момент времени $(k+20)n+6$ будет 1.

Рассмотрим случай, когда $\alpha_2(n_4(\xi)) = 0$. Поскольку $\beta(n_4(\xi)) = 0$, $\alpha_2 \in \widetilde{W}_\xi$, $n_4(\xi) = b_s(k+20) + 6$, а слово 0001000 может идти в α_2 только начиная с позиции $(k+20)m+11$, слово $]_{n_4(\xi)}\alpha_2$ должно заканчиваться на слово 00010001(01) $^{k/2+1}$ 010101. Но мы предположили, что $\alpha_2(n_4(\xi)) = 0$, получили противоречие.

Рассмотрим случай, когда $\alpha_3(n_4(\xi)) = 0$. Поскольку $\beta(n_4(\xi)) = 0$, $\alpha_3 \in \widetilde{W}_\xi$, а $n_4(\xi) = b_s(k+20) + 6$, слово $]_{n_4(\xi)}\alpha_3$ заканчивается на слово $10100000(10)^{k/2+1}101010$. Так как $\alpha_1 \in \widetilde{W}_\xi$, мы видим, что $\alpha_1(n_4(\xi) - 1) \vee \alpha_1(n_4(\xi)) = 1$. Но в этом случае из определения автомата F получаем, что $\beta(n_4(\xi)) = 1$. Получили противоречие. Значит, автомат F сохраняет множество $\widetilde{W}_\xi$.

Лемма 5. Если последовательность продукций слова ξ конечна, то автомат T_c , где $1 \leq c \leq k$, сохраняет множество $\widetilde{W}_\xi$.

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \widetilde{W}_\xi$, но $T_c(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \beta \notin \widetilde{W}_\xi$. Значит, найдется тройка $(n_1, n_2, n_3) \in W_\xi$ такая, что

$$\beta(n_1) = \beta(n_2) = \beta(n_3) = \beta(n_4(\xi)) = 0.$$

Так как $\beta(n_4(\xi)) = 0$, либо $\alpha_2(n_4(\xi)) = 0$, либо $\alpha_3(n_4(\xi)) = 0$. Пусть $n_1 = (k+20)n + q_1$, $n_2 = (k+20)n + q_2$, где $0 \leq q_1, q_2 \leq (k+20)$, $q_2 - q_1 = 1$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha_2(n_4(\xi)) = 0$. Поскольку $\beta(n_4(\xi)) = 0$, $\alpha_2 \in \widetilde{W}_\xi$, $n_4(\xi) = b_s(k+20) + 6$, а слово 0001000 может идти в α_2 , только начиная с позиции $(k+20)m + 11$, слово $]_{n_4(\xi)}\alpha_2$ должно заканчиваться словом $00010001(01)^{k/2+1}(01)^3$. Но мы предполагали, что $\alpha_2(n_4(\xi)) = 0$. Получили противоречие.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha_3(n_4(\xi)) = 0$. Поскольку $\beta(n_4(\xi)) = 0$, $\alpha_3 \in \widetilde{W}_\xi$, а $n_4(\xi) = b_s(k+20) + 6$, слово $]_{n_4(\xi)}\alpha_3$, очевидно, заканчивается на слово $10100000(10)^{k/2+1}(10)^3$. Значит, $\alpha_1(n_4(\xi)) = 0$. На выходе в моменты времени n_1 и $n_2 = n_1 + 1$ автомат T_c выдал 0, поэтому $]_{n_2}\alpha_3$ может заканчиваться только на $10100000(10)^{k/2+1}(10)^3$ или на $00010001(10)^{k/2+1}(10)^4$. Значит, $q_1 = 5$, либо $q_1 = 8$.

Вспомним обозначения из определения множества $\widetilde{W}_\xi$. Пусть последовательность продукций слова ξ имеет вид $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$; для любого t слово ξ_t начинается с буквы d_{i_t} . Рассмотрим последовательности

$$a_i = (i-1)\omega, \quad b_i = a_i + |\xi_i|.$$

Тогда

$$n_4(\xi) = b_s(k+20) + 6.$$

Положим

$$\xi_1 R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_{s-1}} = g_1 g_2 \dots g_l.$$

Пусть для $1 \leq i \leq s$

$$\xi_i = p_1 \tilde{g}_1 p_1 \tilde{g}_2 \dots p_1 \tilde{g}_{a_i} p_2 \tilde{g}_{a_i+1} p_3 \tilde{g}_{a_i+2} \dots p_3 \tilde{g}_{b_i} p_0 \tilde{g}_{b_i+1}.$$

Если $q_1 = 5$, то $n_1 = n_4(\xi) - 1$, $n_2 = n_3 = n_4(\xi)$. Так как $\alpha_1 \in \widetilde{W}_\xi$, мы видим, что $\alpha_1(n_4(\xi) - 1) \vee \alpha_1(n_4(\xi)) = 1$. Из определения автомата T_c следует, что $]_{n_4(\xi)}\alpha_1$ заканчивается на $p_2 \tilde{d}_c p_3 \tilde{v}_1 p_3 \tilde{v}_2 \dots p_3 \tilde{v}_{m-1} 1(\varepsilon) 1(10)$, где $v_i \in D$ для любого i , $m \leq \omega$, $\varepsilon \in \{01, 10\}$. При этом ε равняется 01 тогда и только тогда, когда $m = \omega$.

Так как $\alpha_1 \in \widetilde{W}_\xi$ и

$$\alpha_1((b_s - m)(k+20) + 8) = \alpha_1((b_s - m)(k+20) + 9) = \alpha_1(n_4(\xi)) = 0,$$

верно соотношение $m = |\xi_s| < \omega$. Но тройка $((k+20)a_s + 8, (k+20)a_s + 9, (k+20)b_s + 3)$ принадлежит W_ξ , поэтому $\alpha_1((k+20)b_s + 3) = 1$ и $\varepsilon = 01$. Получили противоречие, так как ε не может равняться 01, если $m < \omega$.

Таким образом, осталось рассмотреть случай $\alpha_1(n_4(\xi)) = 0$, $q_1 = 8$. Из определения автомата следует, что $\downarrow_{n_2} \alpha_1$ заканчивается на $p_2 \tilde{d}_c p_3 \tilde{v}_1 p_3 \tilde{v}_2 \dots p_3 \tilde{v}_{\omega-1} 1(\varepsilon) 1(10) 1(10)$, где $v_i \in D$ для любого i , $\varepsilon \in \{01, 10\}$. В этом случае

$$\alpha_1((n-\omega)(k+20) + 8) = \alpha_1((n-\omega)(k+20) + 9) = \alpha_1(n_4(\xi)) = 0.$$

Значит, для какого-то $m \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$n = (m-1)\omega = a_m.$$

При этом

$$\zeta_m(n_3) = 1, \quad n_3 \leq b_m(k+20) + 4.$$

Из определения множества $\tilde{W}_\xi$ получим, что для $i \leq b_{m-1}(k+20) + 4$ справедливо неравенство $\alpha_1(i) \geq \zeta_{m-1}(i)$. Порождающая функция $T_c^{h(T_c)}$ обладает таким свойством, что если в слове $[\downarrow_{h(T_c)}]_i \zeta_{m-1}$, подаваемом на первый вход, поменять некоторые символы с 0 на 1, то значение либо не изменится, либо будет равно 1. Значит, для любого $i \leq b_{m-1}(k+20) + 4$ выполняется неравенство $\beta(i) \geq \zeta_m(i)$. А значит, для $n_3 \leq b_{m-1}(k+20) + 4$ лемма доказана.

Теперь пусть

$$b_{m-1}(k+20) + 4 < n_3 \leq b_m(k+20) + 4.$$

Из условия следует, что для $i \leq (b_{m-1} + 1)(k+20) + 4$ выполняется неравенство

$$\alpha_1(i) \geq \zeta_{m-1}(i).$$

Пусть

$$\gamma = p_3 \tilde{g}_{b_{m-1}} 1(01) 1.$$

Так как $\zeta_{m-1}(i)$ заканчивается на $p_3 \tilde{g}_{b_{m-1}} p_0 \tilde{g}_{b_{m-1}+1}$, а высота автомата T_c равна $(\omega + |R_c| + 2)(k+20)$, на первый вход порождающей функции $T_c^{h(T_c)}$ в момент времени n_3 поступит слово, заканчивающееся на $\gamma_1 \gamma_2$, где $|\gamma_1| = |\gamma|$ и для любого i выполняется неравенство $\gamma_1(i) \geq \gamma(i)$. Из определения автомата следует, что в этом случае $\beta(n_3) \geq \zeta_m(n_3)$. Значит, $\beta(n_3) = \zeta_m(n_3) = 1$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. Если последовательность продукций слова ξ конечна, то автомат T_ξ сохраняет множество $\tilde{W}_\xi$.

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть, $\alpha \in \tilde{W}_\xi$, а $T_\xi(\alpha) = \beta \notin \tilde{W}_\xi$. Значит, найдется тройка $(n_1, n_2, n_3) \in W_\xi$ такая, что

$$\beta(n_1) = \beta(n_2) = \beta(n_3) = \beta(n_4(\xi)) = 0.$$

Пусть $\xi = g_1 g_2 \dots g_l$. Автомат T_ξ работает таким образом, что в момент времени $t > (|\xi| + 2)(k+20)$ он возвращает либо 1, либо то, что подавалось на вход в момент t . Если $\alpha(t-1) = \alpha(t) = 0$, то, очевидно, $\beta(t) = 1$. Таким образом, начиная с

момента времени $(|\xi| + 2)(k + 20)$ на выходе не может появиться два нуля подряд. В первые $(|\xi| + 2)(k + 20)$ моментов времени он выводит либо по очереди буквы сверхслова

$$\alpha_0 = p_2 \tilde{g}_1 p_3 \tilde{g}_2 \dots p_3 \tilde{g}_l p_0 \tilde{g}_{l+1} p_0 \tilde{g}_{l+2} p_0 \tilde{g}_{l+3} \dots,$$

либо 1. Таким образом, два нуля подряд могут появиться только на 5 и 6, или 8 и 9 позиции. По определению, тройка $(8, 9, n_3)$ принадлежит W_ξ тогда и только тогда, когда $n_3 \leq |\xi|(k + 20) + 4$. Значит, из того, что $\alpha_0 \in \tilde{W}_\xi$ следует, что $\beta \in \tilde{W}_\xi$. Получили противоречие. Значит, T_ξ сохраняет множество $\tilde{W}_\xi$.

Из лемм 1–6, а также следствия 1 следует предложение 3.

Список литературы

1. Post E., *Two-valued iterative systems of mathematical logic*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
2. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
3. Кратко М. И., Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. *Доклады АН СССР* (1964) **155**, 35–37.
4. Бувевич В. А., Об алгоритмической неразрешимости распознавания A -полноты для о.д.-функций. *Математические заметки* (1972) **12**, №6, 687–697.
5. Бабин Д. Н., Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций. *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 41–56.
6. Бувевич В. А., *Условия A -полноты для автоматов*. Изд-во МГУ, Москва, 1986.
7. Бабин Д. Н., О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и A -полноты. *Доклады РАН* (1999) **367**, №4, 439–441.
8. Бувевич В. А., Клиндухова Т. Э., Об алгоритмической неразрешимости задач об A -полноте и полноте для дефинитных ограниченно-детерминированных функций. *Матем. вопросы кибернетики* (2001), № 10.
9. Жук Д. Н., Присмотров Ю. Н., О проблеме полноты в классе автоматов без обратной связи. *Интеллектуальные системы* (2007) **11**, 439–472.
10. Жук Д. Н., О неразрешимости проблемы полноты для дефинитных автоматов. *Интеллектуальные системы* (2008) **12**, 211–228.
11. Жук Д. Н., Разрешимые случаи задачи об A -полноте для дефинитных автоматов. *Интеллектуальные системы* (2009) **13**, 273–312.
12. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
13. Мальцев А. И., *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Наука, Москва, 1986.

Статья поступила 3.02.2010.