Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Рожков, О некоторых классах нелинейных регистров сдвига, обладающих одинаковой цикловой структурой, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 2, 96–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1098>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:51:23

О некоторых классах нелинейных регистров сдвига, обладающих одинаковой цикловой структурой

© 2010 г. М. И. Рожков

Работа посвящена вопросам исследования структуры переходов (цикловой структуры) автономного автомата $R(t) = R(G^n, \delta_f)$, называемого регистром сдвига с обратной связью $f, f: G^n \rightarrow G$, функция переходов которого δ_f задается следующим образом:

$$\delta_f(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_2, y_3, \dots, y_n, f(y_1, y_2, \dots, y_n)).$$

Одной из важных задач в данном направлении исследований является построение нелинейных автоматов $R(f)$, обладающих заданной цикловой структурой, в частности, обладающих циклом длины 2^n или $2^n - 1$.

1. Введение

Наиболее универсальный из известных к настоящему моменту методов построения нелинейных двоичных регистров сдвига с заданной цикловой структурой основан на принципе склейки–расклейки циклов исходного регистра сдвига с известной цикловой структурой [7]. При этом эффект склейки двух циклов в один или расклейки одного цикла на два достигается путем инвертирования значения функции обратной связи g исходного автомата $R(g)$ на векторах вида (1α) и (0α) , где $\alpha \in (F_2)^{n-1}$.

Недостатком данного подхода является то, что, если число этапов склейки–расклейки мало по сравнению с числом 2^n состояний рассматриваемых автоматов, то существенные части циклов исходного и результирующего автоматов будут совпадать. Другими словами, результирующий автомат будет мало отличаться от исходного. В противном же случае фактически будет иметь место табличное задание функции обратной связи результирующего регистра сдвига с необходимостью использования памяти объемом 2^n бит.

В работе [11] предложен метод построения полноцикловых регистров $R(f)$ длины m из полноцикловых регистров длины $m - 1$. Этот метод, однако, не приводит к увеличению числа полноцикловых регистров длины m по сравнению с исходным числом полноцикловых регистров длины $m - 1$.

Известны также методы построения полноцикловых регистров на основе достаточно сложных итеративных процедур, которые не приводят к явной аналитической структуре функции обратной связи построенного регистра сдвига (см. [6]).

Изучению цикловой структуры нелинейных регистров сдвига посвящены также работы [8–10, 12–14] и ряд других.

В настоящей работе исследуются некоторые классы функций обратной связи $M(f)$, при которых соответствующие регистры сдвига обладают одинаковой цикловой структурой (изоморфны заданному регистру сдвига $R(f)$). В этом случае для расчета цикловой структуры всего класса регистров достаточно исследовать структуру одного (наиболее удобного для изучения) представителя. К примеру, все двоичные регистры сдвига длины n , обладающие циклом длины $2^n - 1$, изоморфны друг другу. При этом, как известно, в данном классе регистров сдвига содержатся и линейные автоматы (с помощью которых вырабатываются линейные рекуррентные последовательности максимального периода).

Вместе с тем, описание регистров сдвига, изоморфных заданному регистру $R(f)$, связано со сложной задачей построения специального вида биективных отображений — решений уравнений Коши, соответствующих парам изоморфных регистров сдвига.

В настоящей работе получено описание лишь частных классов такого сорта биекций, приведших к построению соответствующих классов изоморфных нелинейных автоматов. При этом наиболее мощные из описанных классов имеют мощность $4(n - 2)$ и отвечают регистрам сдвига с квадратичными функциями обратной связи. Путем исследования на ЭВМ представителей этих классов для $n \leq 27$ выделены классы, отвечающие регистрам, которые обладают циклом длины $2^n - 1$.

2. Условия биективности отображений специального вида

Будем использовать следующие обозначения: пусть G^n — декартово произведение n экземпляров множества G ; $R(f) = R(G^n, \delta_f)$ — автономный автомат (регистр сдвига с обратной связью $f: G^n \rightarrow G$), функция переходов которого δ_f задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_f: G^n &\rightarrow G^n, & \delta_f(y_1, y_2, \dots, y_n) &= (y_2, y_3, \dots, y_n, f(y_1, y_2, \dots, y_n)), \\ & & y_1, \dots, y_n &\in G; \\ K[f, A]: G^n &\rightarrow G^n, & K[f, A](x) &= (f(x), f(A(x)), \dots, f(A^{n-1}(x))), \\ & & x &\in G^n, \\ A: G^n &\rightarrow G^n, \\ f: G^n &\rightarrow G; \end{aligned}$$

$R\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ — множество регулярных (подстановочных) автоматов $R(f)$, цикловая структура которых состоит из i_j циклов длины j , $j = 1, 2, \dots, m$; Q_A — множество функций $f: G^n \rightarrow G$, отвечающих биективным отображениям $K[f, A]$ при фиксированном отображении $A: G^n \rightarrow G^n$; $|M|$ — мощность конечного множества M .

Определение 1. Функцию $f: G^n \rightarrow G$ будем называть допустимой, если существует биективное отображение $F = (F_1, F_2, \dots, F_n): G^n \rightarrow G^n$, у которого координатная функция F_1 совпадает с f .

Определение 2. Отображения $B_1, B_2: G^n \rightarrow G^n$ назовем эквивалентными (изоморфными), если для некоторой биекции $D: G^n \rightarrow G^n$ выполняется равенство $DB_1D^{-1} = B_2$.

Лемма 1. Пусть $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $B = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ — произвольные отображения $G^n \rightarrow G^n$, $A_i, B_j: G^n \rightarrow G$, $f: G^n \rightarrow G$. Тогда равенство $AB = \delta_f A$ выполняется в том и только в том случае, когда

$$A_i(x) = A_1(B^{i-1}(x)), \quad i = 1, \dots, n, \quad f(A(x)) = A_1(B^n(x)).$$

Справедливость леммы легко усматривается при использовании координатного представления соответствующих отображений.

Лемма 1 свидетельствует о том, что задача построения преобразований δ_f , цикловая структура которых совпадает с цикловой структурой заданного отображения $B: G^n \rightarrow G^n$, самым тесным образом связана с построением биективных отображений вида $K[\varphi, B]$.

Лемма 2. *Множество всех биекций $K[f, A]: G^n \rightarrow G^n$ есть объединение множеств решений уравнений Коши*

$$XAX^{-1} = \delta_\varphi \quad (1)$$

по всем регистрам сдвига с обратной связью $\varphi: G^n \rightarrow G$.

Доказательство. Пусть $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, где $X_i: G^n \rightarrow G$, является решением уравнения (1). Тогда $X = K[X_1, A]$ в силу леммы 1. С другой стороны, если $K[f, A]$ — биекция, то она является решением уравнения (1) при

$$\varphi(y) = f(A^n K^{-1}[f, A](y)).$$

Теорема 1. *Пусть цикловая структура биективного отображения $A: G^n \rightarrow G^n$ состоит из i_j циклов длины j , $j = 1, 2, \dots, |G|^n$. Тогда для числа функций $f: G^n \rightarrow G$, отвечающих биективным отображениям $K[f, A]$, справедлива формула*

$$|Q_A| = |R\{i_1, i_2, \dots, i_m\}| \prod_{j=1}^m (i_j)! j^{i_j}, \quad m = |G|^n. \quad (2)$$

Доказательство. Заметим, что множества решений уравнения (1) при различных $\varphi: G^n \rightarrow G$ не пересекаются. Тогда справедливость теоремы вытекает из леммы 2 и известной формулы для числа решений уравнения Коши.

Следствие 1. *Пусть $G = F = \{0, 1\}$, и выполнено одно из следующих условий:*

- (1) Подстановка A состоит из одного цикла длины 2^n .
- (2) Подстановка A состоит из одного цикла длины $2^n - 1$ и цикла длины 1.

Тогда число булевых функций $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, отвечающих биективным отображениям $K[f, A]$, в первом случае равно 2^{2^n-1} , а во втором случае равно $2 \cdot 2^{2^n-1} (1 - 2^{-n})$.

Доказательство. Справедливость данного следствия вытекает из формулы (2) с учетом того, что число полноцикловых двоичных регистров сдвига длины n равно $2^{-n} 2^{2^n-1}$ (см. [3]), а число регистров, обладающих циклом длины $2^n - 1$, ровно в два раза больше (каждый такой регистр получается из полноциклового регистра изменением значения его функции обратной связи $f = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на одном из векторов $x = (0, 0, \dots, 0)$ и $x = (1, 1, \dots, 1)$).

Следствие 2. *Пусть $G = F_2 = \{0, 1\}$, $n = p$ — простое число, $A = T: (F_2)^n \rightarrow (F_2)^n$ — преобразование циклического сдвига координат векторов. Тогда число булевых функций $f = f(x_1, \dots, x_n)$, отвечающих биективным отображениям $K[f, T]$, равно*

$$|Q_T| = 2p^\alpha \alpha!, \quad \alpha = (2^p - 2)p^{-1}.$$

Доказательство. В силу простоты числа p цикловая структура отображения T состоит из двух циклов длины 1 и $(2^p - 2)p^{-1}$ циклов длины p . Нетрудно убедиться также, что существует единственный регистр сдвига (а именно, регистр с обратной связью $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$), цикловая структура которого совпадает с цикловой структурой отображения T . Теперь результат следствия вытекает непосредственно из формулы (2).

Следующая теорема утверждает, что множество биекций вида $K[f, A]: G^n \rightarrow G^n$ при всевозможных функциях $f: G^n \rightarrow G$ и биекциях $A: G^n \rightarrow G^n$ совпадает с множеством вообще всех биективных отображений множества G^n на себя.

Теорема 2. Пусть $D = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ — произвольная биекция $G^n \rightarrow G^n$. Тогда существует биекция $A: G^n \rightarrow G^n$ такая, что $D = K[f_1, A]$.

Доказательство. Пусть δ_f — преобразование произвольного регулярного регистра сдвига с обратной связью f (регулярные регистры сдвига, очевидно, существуют; например, с обратной связью $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$).

Через A обозначим отображение $D^{-1}\delta_f D$. Тогда $DAD^{-1} = \delta_f$. В таком случае в силу леммы 1 справедливы равенства

$$f_i(x) = f_1(A^{i-1}(x)), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которые и доказывают совпадение биекций D и $K[f_1, A]$.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 2 видно, что множество биекций A , при которых справедливо равенство $D = K(f_1, A)$, равномощно множеству регулярных регистров сдвига с одной обратной связью.

3. Композиции функций и их свойства

Далее полагаем, что множество G является коммутативным кольцом с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$. При этом знак умножения, где это не вызывает недоразумений, будем опускать.

Определение 3. Функции $f, \varphi: G^n \rightarrow G$ будем называть эквивалентными и использовать обозначение $f \sim \varphi$, если отображения δ_f и δ_φ обладают изоморфными структурами переходов, то есть когда для некоторой биекции $X: G^n \rightarrow G^n$ выполняется уравнение Коши

$$X\delta_f X^{-1} = \delta_\varphi.$$

Пусть

$$\lambda(z) = \sum_{i=1}^m a_i z^{i-1} \in G[z]$$

— многочлен над кольцом G , $\varphi: G^{n-m+1} \rightarrow G$ — функция $(n-m+1)$ аргументов, $m \leq n$.

Через $\lambda * \varphi$ и $\varphi * \lambda$ будем обозначать отображения (функции) $G^n \rightarrow G$ вида

$$\begin{aligned} (\lambda * \varphi)(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-m}), \\ (\varphi * \lambda)(x) &= \varphi(A_1(x), A_2(x), \dots, A_{n-m+1}(x)), \end{aligned}$$

где

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G^n, \quad A_j(x) = \sum_{i=1}^m a_i x_{i+j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-m+1.$$

Пусть $L: G^n \rightarrow G$ — фиксированное отображение,

$$\lambda(z) = \sum_{i=1}^m a_i z^{i-1} \in G[z], \quad \varphi: G^{n-m+1} \rightarrow G.$$

Функцию $f: G^n \rightarrow G$ будем называть (φ, λ, L) -композицией или (λ, φ, L) -композицией, если

$$f(x) = (\varphi * \lambda)(x) + L(x) \quad \text{или} \quad f(x) = (\lambda * \varphi)(x) + L(x), \quad (3)$$

соответственно. Через $M_n(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $t_i \in G$, будем обозначать циклическую $n \times n$ матрицу с первой строкой $(t_1, t_2, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$.

Лемма 3. Пусть

$$\lambda(z) = \sum_{i=1}^m a_i z^{i-1}, \quad \theta(z) = \sum_{i=1}^s \gamma_i z^{i-1} \in G[z], \quad \psi: G^{n-m-s+2} \rightarrow G.$$

Тогда справедливы равенства

- (1) $\psi * (\theta\lambda) = (\psi * \theta) * \lambda = (\psi * \lambda) * \theta;$
- (2) $(\theta\lambda) * \psi = \lambda * (\theta * \psi) = \theta * (\lambda * \psi);$
- (3) $\lambda * (\psi * \theta) = (\lambda * \psi) * \theta.$

Доказательство. Пусть

$$\theta(z)\lambda(z) = \sum_{i=1}^{m+s-1} r_i z^{i-1}, \quad A(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m a_i y_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (A * \theta)(x_1, \dots, x_{m+s-1}) &= \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^s \gamma_j x_{j+i-1} \\ &= \sum_{k=1}^{m+s-1} x_k \sum_{i=1}^k a_i \gamma_{k-i+1} = \sum_{i=1}^{m+s-1} r_i x_s. \end{aligned}$$

С учетом коммутативности кольца $G[z]$ отсюда и вытекают равенства п. 1.

Аналогичным образом получаем, что

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m a_i \left(\sum_{j=1}^s \gamma_j \psi(x_{i+j-1}, x_{i+j}, \dots, x_{i+j+n-m-s}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m+s-1} \psi(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-m-s+1}) \left(\sum_{i=1}^k a_i \gamma_{k-i+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m+s-1} r_k \psi(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-m-s+1}), \end{aligned}$$

что равносильно равенству

$$\lambda * (\theta * \psi) = (\lambda\theta) * \psi,$$

которое свидетельствует о справедливости равенств п. 2. Точно таким же образом доказывается и равенство п. 3. Отметим, что равенство п. 3 вытекает также из предложения 17 в [15].

Каждой функции $f: G^n \rightarrow G$, являющейся (φ, λ, L) -композицией вида (3), поставим в соответствие множество

$$M_\lambda(f) = \bigcup_{\{\theta, \nu; \theta\nu = \lambda\}} \{g_{\theta, \nu}\},$$

состоящее из функций $g_{\theta, \nu}: G^n \rightarrow G$ вида

$$g_{\theta, \nu} = \theta * (\varphi * \nu) + L, \quad (4)$$

где многочлены θ, ν и λ удовлетворяют равенству $\theta\nu = \lambda$.

Определение 4. Отображение $\sigma: G \rightarrow G$ назовем аддитивным, если при любых $x, y \in G$ выполняется равенство

$$\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y).$$

Теорема 3. Пусть $\beta_i, i = 1, 2, \dots, m$, — аддитивные, а $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, n$ — произвольные отображения множества G в себя, $m \leq n$, причем любое β_i перестановочно с каждым из α_j . Пусть при этом для функций $h, g: G^n \rightarrow G$ имеют место представления

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{i=1}^m \beta_i(\varphi(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-m})) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i), \\ g(x) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^m \beta_i(x_i), \sum_{i=1}^m \beta_i(x_{i+1}), \dots, \sum_{i=1}^m \beta_i(x_{i+n-m})\right) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i). \end{aligned}$$

Тогда справедливо равенство

$$A\delta_h = \delta_g A, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= (A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)), \\ A_1(x) &= \sum_{i=1}^m \beta_i(x_i), \quad A_{j+1}(x) = A_j(\delta_h(x)), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу леммы 1 для доказательства соотношения (5) достаточно убедиться в справедливости равенства

$$g(A(x)) = A_1((\delta_h)^n(x)),$$

которое равносильно равенству

$$g(A(x)) = \sum_{i=1}^m \beta_i(h((\delta_h)^{i-1}(x))). \quad (6)$$

Тогда в условиях теоремы правая часть равенства (6) допускает представление

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \beta_i(h((\delta_h)^{i-1}(x))) \\ &= \sum_{i=1}^m \beta_i \left[\varphi(A_1((\delta_h)^{i-1}(x)), \dots, A_{n-m+1}((\delta_h)^{i-1}(x))) + \sum_{s=1}^n \alpha_s(x_{s+i-1}) \right], \end{aligned}$$

где под x_{n+j} , $j = 1, 2, \dots, m$, понимаем функцию $h((\delta_h)^{j-1}(x))$. Учитывая перестановочность отображений β_i и α_j , а также равенство $A_{i+1}(x) = A_i(\delta_h(x))$, правую часть равенства (6) представляем в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \beta_i(\varphi(A_i(x), A_{i+1}(x), \dots, A_{i+n-m}(x))) + \sum_{s=1}^n \alpha_s \left(\sum_{j=1}^m \beta_j(x_{s+j-1}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \beta_i(\varphi(A_i(x), A_{i+1}(x), \dots, A_{i+n-m}(x))) + \sum_{s=1}^n \alpha_s(A_s(x)), \end{aligned}$$

при этом мы использовали соотношение

$$\sum_{j=1}^m \beta_j(x_{s+j-1}) = A_s(x) = A_1((\delta_h)^{s-1}(x)).$$

Таким образом, равенство (6) равносильно равенству

$$g(A(x)) = \sum_{i=1}^m \beta_i(\varphi(A_i(x), A_{i+1}(x), \dots, A_{i+n-m}(x))) + \sum_{s=1}^n \alpha_s(A_s(x)),$$

которое очевидным образом выполняется. На этом доказательство завершено.

Замечание 2. Если все α_s , $s = 1, 2, \dots, n$ являются отображениями в нуль, то теорема 3 будет верна при произвольных (а не только аддитивных) отображениях β_j , $j = 1, 2, \dots, m$.

Замечание 3. Теорема 3 останется, очевидно, верной и для случая произвольной абелевой группы G .

Следующие два утверждения содержат условия биективности отображения A , фигурирующего в равенстве (5).

Лемма 4. Пусть в условиях теоремы 3 выполнено одно из следующих условий:

- (1) $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, β_1 биективно;
- (2) $\alpha_j = 0$, $j = 2, 3, \dots, n - m + 1$, $\beta_i = -\beta_m \alpha_{n-m+i+1}$, $i = 1, 2, \dots, m - 1$; α_1 и β_m биективны.

Тогда фигурирующее в равенстве (5) отображение $A: G^n \rightarrow G^n$ является биективным.

Доказательство. Пусть выполнено условие 1. Распишем подробнее координатное представление отображения $A(x) = (A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x))$:

$$\begin{aligned}
 A_1(x) &= \sum_{i=1}^m \beta_i(x_i), \dots, A_{n-m+1}(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i(x_{i+n-m}), \\
 &\dots \\
 A_{n-m+2}(x) &= \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i(x_{i+n-m+1}) + \beta_m(\varphi(A_1(x), A_2(x), \dots, A_{n-m+1}(x))), \\
 A_{n-m+3}(x) &= \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i(x_{i+n-m+2}) + \beta_{m-1}((\varphi(A_1(x), A_2(x), \dots, A_{n-m+1}(x))) \\
 &\quad + \beta_m((\varphi(A_2(x), A_3(x), \dots, A_{n-m+2}(x)))), \\
 &\dots \\
 A_n(x) &= \beta_1(x_n) + \sum_{i=2}^m \beta_i(\varphi(A_{i-1}(x), A_i(x), \dots, A_{i+n-m-1}(x))).
 \end{aligned}$$

Учитывая биективность β_1 по заданным $A_1, A_2, \dots, A_n$, из последнего равенства возможно однозначное нахождение переменной x_n .

Аналогичным образом при уже найденных $x_{n-i+1}, x_{n-i+2}, \dots, x_n$ переменная x_{n-i} однозначно находится из $(n-i)$ -го уравнения. Таким образом, биективность отображения A для данного случая установлена.

Доказательство второго случая проводится по той же схеме. При этом переменные $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ будут восстановлены соответственно из $(n-m+2)$ -го, $(n-m+3)$ -го, $\dots$, n -го уравнений. После чего переменная x_m будет найдена из первого уравнения, переменная x_{m+1} из второго и т.д.

Точно таким же образом убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 5. Пусть в условиях теоремы 3 выполнены условия

- (1) $\alpha_i = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$ и $\alpha_1(y) = y$ для любого $y \in G$;
- (2) биективно аддитивное отображение $\Lambda: G^n \rightarrow G^n$, задаваемое равенствами

$$\begin{aligned}
 \Lambda(x) &= (\Lambda_1(x), \Lambda_2(x), \dots, \Lambda_n(x)), \\
 \Lambda_1(x) &= \sum_{i=2}^m \beta_i(x_i), \quad \Lambda_{j+1}(x) = \Lambda_j(T(x)), \quad j = 1, 2, \dots, n-1,
 \end{aligned}$$

где $T: G^n \rightarrow G^n$ — преобразование циклического сдвига (влево) координат векторов. Тогда фигурирующее в равенстве (5) отображение $A: G^n \rightarrow G^n$ является биективным.

Из леммы 5 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть G — коммутативное кольцо с единицей, и в условиях теоремы 3 выполнены условия

- (1) $\alpha_i = 0$, $i = 2, 3, \dots$, и $\alpha_1(y) = y$ для любого $y \in G$;

(2) $\beta_i(x) = b_i x$, $x, b_i \in G$, $i = 1, 2, \dots, m$;

(3) определитель циклической матрицы $M_n(b_1, b_2, \dots, b_m)$ является обратимым элементом кольца G .

Тогда фигурирующее в равенстве (5) отображение $A: G^n \rightarrow G^n$ является биективным.

Следующая теорема является основным результатом данного раздела.

Теорема 4. Пусть функция $f: G^n \rightarrow G^n$ является (φ, λ, L) -композицией и задана представлением (3). Пусть при этом выполнено одно из условий:

(1) $L = L(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$, и для любого $b \in G$ уравнение $a_1 y = b$ имеет в G единственное решение,

(2) $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$, и биективно линейное отображение $G^n \rightarrow G^n$, соответствующее циклической матрице $M_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Тогда все функции множества $M_\lambda(f)$ попарно эквивалентны.

Для доказательства нам понадобятся две вспомогательные очевидные леммы.

Лемма 6. Пусть $a = a_1 a_2$, $a_1, a_2 \in G$ и для любого $b \in G$ уравнение $ax = b$ имеет в кольце G единственное решение. Тогда каждое из уравнений $a_1 x = b$ и $a_2 x = b$ имеет в кольце G единственное решение.

Лемма 7. Пусть

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= \sum_{i=1}^m a_i z^{i-1}, & \lambda_1(z) &= \sum_{i=1}^k b_i z^{i-1}, & \lambda_2(z) &= \sum_{i=1}^t c_i z^{i-1}, \\ \lambda(z) &= \lambda_1(z) \lambda_2(z), & & & \lambda_i(z) &\in G[z]. \end{aligned}$$

Тогда

$$M_n(a_1, a_2, \dots, a_m) = M_n(b_1 b_2, \dots, b_k) \times M_n(c_1, c_2, \dots, c_t)$$

(здесь знаком $\times$ обозначено умножение квадратных матриц).

Доказательство теоремы 4. Пусть

$$\lambda(z) = \lambda_1(z) \lambda_2(z)$$

— произвольное разложение многочлена λ на два множителя,

$$\lambda_1(z) = \sum_{i=1}^k b_i z^{i-1}, \quad \lambda_2(z) = \sum_{i=1}^t c_i z^{i-1},$$

и выполнено условие 1 теоремы. Тогда в силу леммы 3 и теоремы 3 будет выполнено соотношение

$$A \delta_t = \delta_g A,$$

где

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n): G^n \rightarrow G^n, \quad A_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^t c_i x_i,$$

$$A_{j+1}(x) = A_j(\delta_t(x)), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad g = (\lambda_2 * (\varphi * \lambda_1)) + L.$$

Заметим, что $a_1 = b_1 c_1$. Тогда в силу лемм 4 и 6 отображение A биективно, то есть $f \sim g$, и первый случай теоремы доказан. В случае 2 теоремы, биективность отображения A будет вытекать из лемм 5 и 7. На этом доказательство завершено.

4. Случай поля $GF(2)$

Введем обозначения, пусть

$e_1, e_2, \dots, e_n$ — векторы канонического базиса векторного пространства $(F_2)^n$,

$e = \sum_{i=1}^n e_i$ — вектор с единичными координатами,

E — единичное (тождественное) преобразование соответствующего векторного пространства,

T — преобразование циклического сдвига (влево) координат векторов соответствующего векторного пространства.

Кроме того, символом 0 будем обозначать нулевые элементы как поля F_2 , так и векторного пространства $(F_2)^n$. В каждом конкретном случае значение этого символа будет видно из контекста.

Отметим, что фигурирующее в равенстве (5) отображение A в случае $G = F_2$ представляется в виде

$$A = \beta_1 E + \beta_2 \delta_h + \dots + \beta_m (\delta_h)^{m-1}, \quad \beta_i \in \{0, 1\}. \quad (7)$$

Теорема 5. *Отображение*

$$A = E + \delta_f$$

биективно в том и только том случае, когда функция $f: (F_2)^n \rightarrow F_2$ удовлетворяет равенству

$$f(x) = f(x + e). \quad (8)$$

Доказательство. Пусть

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + x_1.$$

Биективность отображения A равносильна выполнению неравенства $A(x + y) + A(x) \neq 0$ при всех $x, y \in (F_2)^n$, $y \neq 0$. Так как $y + T(y) \neq e_n$ при любом $y \in (F_2)^n$, биективность отображения A равносильна выполнению неравенства $\psi(x) + \psi(x + y) \neq 0$ для всех $x \in (F_2)^n$ и тех ненулевых $y \in (F_2)^n$, при которых $y = T(y)$. Учитывая, что единственным ненулевым решением уравнения $y = T(y)$ является вектор $y = e$, биективность отображения A равносильна выполнению равенства

$$\psi(x) + \psi(x + e) = 1,$$

которое и приводит к равенству (8).

Заметим, что любую булеву функцию от n переменных, удовлетворяющую равенству (8), можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n), \quad (9)$$

где φ — некоторая булева функция от $n - 1$ аргументов, однозначно определяемая видом функции f . При этом в силу теоремы 3 будет иметь место соотношение

$$(E + \delta_f)\delta_t = \delta_g(E + \delta_f),$$

где

$$g(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + \varphi(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Следует отметить, что в некоторых случаях (например, при задании функции f многочленом Жегалкина или табличным образом) достаточно легко убедиться в справедливости тождества (8). В то же время найти вид функции φ , фигурирующей в представлении (9), может оказаться затруднительным. В этой связи представляет интерес следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть функция f удовлетворяет равенству (8), а функция $g(x)$ представима в виде

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \sum_{i=2}^{n-1} x_i, \dots, x_{n-1}, 0\right) + f\left(\sum_{i=2}^{n-1} x_i \sum_{i=3}^{n-1} x_i, \dots, 0, x_n\right).$$

Тогда справедливо равенство

$$(E + \delta_f)\delta_t = \delta_g(E + \delta_f).$$

Доказательство. Учитывая лемму 1 для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$g(A(x)) = f(x) + f(\delta_f(x)),$$

где $A = E + \delta_f$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} g(A(x)) &= g(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n + f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= f(x_1 + x_n, x_2 + x_n, \dots, x_{n-1} + x_n, 0) \\ &\quad + f(x_2 + x_n, x_3 + x_n, \dots, x_{n-1} + x_n, 0, x_n + f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) + f(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= f(x) + f(\delta_f(x)). \end{aligned}$$

На этом доказательство завершено.

Теорема 7. Пусть $n > 2$ и функция $f: (F_2)^n \rightarrow F_2$ допускает представление

$$f(x) = \varphi(x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, \dots, x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) + L(x),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, φ — произвольная булева функция от $n - 2$ аргументов,

$$L(x \in \{x_1 + x_{n-2} + x_{n-1}, x_1 + x_{n-2} + x_n, x_1 + x_{n-1} + x_n\})$$

при $n \equiv 0 \pmod{3}$,

$$L(x \in \{x_1 + x_{n-2} + x_{n-1}, x_1, x_1 + x_{n-1} + x_n\})$$

при $n \equiv 1 \pmod{3}$,

$$L(x \in \{x_1, x_1 + x_{n-2} + x_n, x_1 + x_{n-1} + x_n\})$$

при $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Тогда отображение $A = E + \delta_f + (\delta_f)^2$ является биективным.

Для доказательства потребуются две леммы.

Лемма 8. Пусть $n \equiv i \pmod{3}$, $n > 2$. Тогда соотношению

$$T^2(y) + T(y) + y = a_y e_{n-1} + b_y e_n, \quad y \in (F_2)^n, \quad a_y, b_y \in F_2,$$

удовлетворяют только три отличных от нулевого вектора $y_{1,i}$, $y_{2,i}$, $y_{3,i}$, которые в зависимости от $i \in \{0, 1, 2\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} y_{1,0} &= 011011 \dots 011, & y_{2,0} &= 101101 \dots 101, & y_{3,0} &= 110110 \dots 110, \\ y_{1,1} &= 0110110 \dots 011, & y_{2,1} &= 101101 \dots 1011, & y_{3,1} &= 110110 \dots 1101, \\ y_{1,2} &= 011011 \dots 01101, & y_{2,2} &= 101101 \dots 10110, & y_{3,2} &= 110110 \dots 11011. \end{aligned}$$

При этом элементы a_y , b_y приведены ниже в таблице:

y	$y_{1,0}$	$y_{2,0}$	$y_{3,0}$	$y_{1,1}$	$y_{2,1}$	$y_{3,1}$	$y_{1,2}$	$y_{2,2}$	$y_{3,2}$
a_y	0	0	0	0	1	1	1	0	1
b_y	0	0	0	1	0	1	0	1	1

Доказательство. Пусть $n \equiv 0 \pmod{3}$ и для вектора $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ выполняется равенство

$$T^2(d) + T(d) + d = a e_{n-1} + b e_n, \quad a, b \in F_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 &= 0, \\ &\dots \\ d_{n-2} + d_{n-1} + d_n &= 0, \\ d_{n-1} + d_n + d_1 &= a, \\ d_n + d_1 + d_2 &= b. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d_1 &= d_4 = \dots = d_{n-2}, \\ d_2 &= d_5 = \dots = d_{n-1}, \\ d_3 &= d_6 = \dots = d_n. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор d определяется своими тремя первыми координатами, среди которых должны быть две единицы.

Два других случая леммы доказываются аналогичным образом.

Лемма 9. Пусть $n \equiv i \pmod{3}$, $n > 2$ и $y_{1,i}$, $y_{2,i}$, $y_{3,i}$ — векторы, определенные в лемме 8. Пусть также для некоторого $j \in \{1, 2, 3\}$ при всех $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (F_2)^n$ функция $\psi = x_1 + f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \psi(x + y_{j,i}) &= \psi(x) + 1, \\ \psi(x + y_{j+1,i}) &= \psi(x) + 1, \\ \psi(x + y_{j+2,i}) &= \psi(x), \end{aligned}$$

где при $j > 3$ под $y_{j,i}$ понимается вектор $y_{t,i}$, $t = j \pmod{3} + 1$. Тогда отображение

$$A = E + \delta_f + (\delta_f)^2$$

является биективным, если выполнено одно из условий:

- (1) $i = 0$;
- (2) $i = 1, j \in \{2, 3\}$;
- (3) $i = 2, j \in \{1, 2\}$.

Доказательство. Несложным координатным анализом можно убедиться в том, что отображение $A = E + \delta_f + (\delta_f)^2$ является биекцией в том и только том случае, когда при всех $x, y \in (F_2)^n$, $y \neq 0$, выполнено соотношение

$$(\psi(x) + \psi(x + y))e_{n-1} + (\psi(x) + \psi(x + y) + \psi(\delta_f(x)) + \psi(\delta_f(x) + T(y) + (\psi(x) + \psi(x + y))e_n)))e_n \neq T^2(y) + T(y) + y. \quad (10)$$

С учетом леммы 8, для биективности отображения A достаточно, чтобы неравенство (10) выполнялось для любых $y \in \{y_{1,i}, y_{2,i}, y_{3,i}\}$.

Пусть имеет место условие 1. Тогда для $y \in \{y_{j,0}, y_{j+1,0}\}$ неравенство (10) выполнено, так как в его левой части коэффициент при векторе e_{n-1} равен единице. Пусть теперь $y = y_{j+2,0}$. Учтывая, что $T(y_{j+2,0}) = y_{j+1,0}$, получаем, что в левой части соотношения (10) коэффициент при векторе e_n равен единице. Значит, (10) будет выполняться и в этом случае. Тем самым, лемма при условии 1 доказана. Доказательство для условий 2 и 3 проводится по такой же схеме.

Доказательство теоремы 7. Приступим теперь к доказательству теоремы 7. Если $n \pmod{3} \neq 0$ и $L = x_1$, то с учетом следствия 3 для биективности отображения $E + \delta_f + (\delta_f)^2$ достаточно показать невырожденность циклической матрицы $M_n(1, 1, 1)$ над полем F_2 . Согласно [4], невырожденность матрицы $M_n(1, 1, 1)$ равносильна взаимной простоте многочленов $1 + z + z^2$ и $1 + z^n$ над полем F_2 . А при $n \pmod{3} \neq 0$ данные многочлены, как нетрудно видеть, взаимно просты.

В остальных случаях для доказательства теоремы 7 достаточно убедиться в справедливости соответствующих условий леммы 8, что не вызывает затруднений.

В следующей теореме наиболее широко отражены условия эквивалентности (λ, φ, L) и (φ, λ, L) -композиций.

Пусть

$$\lambda(z) = \sum_{i=1}^m a_i z^{i-1} \in F_2[z], \quad a_1 = a_m = 1, \quad m > 1.$$

Через Λ_λ обозначим подпространство, порожденное (в множестве линейных булевых функций) функциями $\sum_{i=1}^m a_i x_i, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m}$, и через $\Lambda_\lambda(g)$ — смежный класс по подпространству Λ_λ , содержащий заданную линейную функцию g . Под (a, b) понимаем наибольший общий делитель соответствующих многочленов или чисел.

Теорема 8. Пусть функция $f: (F_2)^n \rightarrow F_2$ является (φ, λ, L) -композицией и задана представлением (3).

Тогда функции

$$f(x) = (\varphi * \lambda)(x) + L(x), \quad h(x) = (\lambda * \varphi)(x) + L(x)$$

являются эквивалентными, если выполнено одно из условий:

$$(1) \quad L \in \Lambda_\lambda(g), \quad g = x_1 + \sum_{i=1}^{m-1} a_i x_{n-m+i+1};$$

- (2) $L \in \Lambda_\lambda(g)$, $g = x_1$ и циклическая матрица $M_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$ является невырожденной;
- (3) $L \in \Lambda_\lambda(g)$, $g = x_1$, $(\lambda(z), z + 1) = 1$, $\lambda(z) \neq \sum_{i=0}^{n-1} z^i$, $n = p - \text{простое число, такое, что } 2 \text{ является первообразным корнем по модулю } p$;
- (4) $L \in \Lambda_\lambda(g)$, $g = x_1$, $(\lambda(z), z + 1)$, $n = 2^d$, $d \in \{1, 2, \dots\}$;
- (5) $L \in \Lambda_\lambda(g)$, $g = x_1$, $\lambda(z) = \sum_{i=1}^m z^{i-1}$, $(\lambda(z), z + 1) = 1$, $(n, m) = 1$;
- (6) $\lambda(z) = 1 + z + z^2$, $L \in \Lambda_\lambda(g)$, где

$$\begin{aligned} g(x) &\in \{x_1 + x_{n-2} + x_{n-1}, x_1 + x_{n-2} + x_n, x_1 + x_{n-1} + x_n\}, & n &\equiv 0 \pmod{3}, \\ g(x) &\in \{x_1 + x_{n-2} + x_{n-1}, x_1, x_1 + x_{n-1} + x_n\}, & n &\equiv 1 \pmod{3}, \\ g(x) &\in \{x_1, x_1 + x_{n-2} + x_n, x_1 + x_{n-1} + x_n\}, & n &\equiv 2 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Доказательство. В условиях 1 и 2 теорема следует из теоремы 3 с учетом соответственно лемм 4 и 5. Пусть выполнено условие 3. Тогда (см. [5]) многочлен $z^n + 1$ имеет только два неприводимых множителя $z + 1$ и $1 + z + \dots + z^{n-1}$. Отсюда следует взаимная простота многочленов $\lambda(z)$ и $z^n + 1$, и следовательно (см. [4]), невырожденность циклической матрицы $M_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Тем самым, мы оказываемся в условиях п. 2. Аналогичным образом показывается, что при выполнении условий 4 и 5 также будут выполнены и условия п. 2. Наконец, если выполнены условия 6, то справедливость теоремы вытекает из теорем 3 и 7.

Следующая теорема является центральной в данном разделе.

Теорема 9. Пусть функция $f: (F_2)^n \rightarrow F_2$ является (φ, λ, L) -композицией и задана представлением (3), $\lambda(z) = g_1 \cdots g_k$ есть разложение многочлена $\lambda(z)$ в произведение неприводимых множителей $g_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, k$ (многочлены g_i не обязательно различны).

Пусть при этом для каждого фиксированного $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ функция

$$f(x) = (\varphi * \lambda)(x) + L(x) = ((\varphi * (\lambda/g_i)) * g_i) + L(x),$$

рассматриваемая как $(\varphi * (\lambda/g_i), g_i, L)$ -композиция, удовлетворяет одному из условий 1–6 (не обязательно одному и тому же при разных i) теоремы 8.

Тогда функции множества $M_\lambda(f)$ попарно эквивалентны.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу множителей k . При $k = 1$ справедливость теоремы вытекает из теоремы 8. Пусть теорема верна для $k - 1$ и θ — произвольный делитель многочлена $\lambda(z)$. Если $\theta \neq \lambda$, тогда в разложение θ входит не более $k - 1$ множителей, и функция $(\theta * (\varphi * (\lambda/\theta)))(x) + L(x)$ эквивалентна функции $f(x) = ((\varphi * (\lambda/\theta) * \theta)(x) + L(x))$ по предположению индукции.

Пусть теперь $\theta = \lambda$. Тогда функция

$$f = ((\varphi * g_k) * (\lambda/g_k))(x) + L(x),$$

являющаяся $((\varphi * g_k), (\lambda/g_k), L)$ -композицией, эквивалентна

$$h = ((\lambda/g_k) * (\varphi * g_k))(x) + L(x).$$

С другой стороны, функция h является $((\lambda/g_k) * \varphi, g_k, L)$ -композицией и эквивалентна функции

$$\begin{aligned} (g_k * (\lambda/g_k) * \varphi)(x) + L(x) &= ((g_k(\lambda/g_k)) * \varphi)(x) + L(x) \\ &= (\lambda * \varphi)(x) + L(x) = (\theta * \varphi)(x) + L(x). \end{aligned}$$

Тем самым индуктивный переход завершен, теорема доказана.

5. Оценки мощности классов эквивалентных функций

Далее будем рассматривать регулярные (подстановочные) регистры сдвига над полем F_2 и использовать обозначения предыдущего раздела. Известно [7], что необходимым и достаточным условием регулярности двоичного регистра сдвига $R(f)$ (то есть биективности отображения δ_f) является линейность функции обратной связи f по первой координате:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + \psi(x_2, \dots, x_n).$$

Так как в случае линейности функции φ функции $(\varphi * \lambda)$ и $(\lambda * \varphi)$ совпадают, при рассмотрении композиции вида (3) и (4) всегда будем предполагать, что функция φ нелинейна ($\deg(\varphi) > 1$) и не зависит от первой координаты, а функция $L = L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является линейной и зависящей существенным образом от переменной x_1 .

Введем несколько дополнительных обозначений. Пусть

$$\begin{aligned} s: (F_2)^n &\rightarrow (F_2)^n, & s(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1); \\ Z(f) &= \{f(x), f(x+e) + 1, f_{\nabla}(x), f_{\nabla V}(x+e) + 1\}, \\ f: (F_2)^n &\rightarrow F_2, & f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 + \psi(x_2, x_3, \dots, x_n), \\ x, e &\in (F_2)^n, & e &= (1, 1, \dots, 1), \\ f_{\nabla}(x) &= f_{\nabla}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + \psi(x_n + x_{n-1} + \dots + x_2); \end{aligned}$$

$Z_+(f)$, $f: (F_2)^n \rightarrow F_2$, — множество булевых функций от n переменных, представимых в виде $g + h$ при некоторых $g \in Z(f)$ и

$$h(x) = \sum_{i=1}^n h_i x_i + h_0, \quad h_j \in \{0, 1\}.$$

Если функция $f: (F_2)^n \rightarrow F_2$ является (φ, λ, L) -композицией, то

$$M(f) = \bigcup_{g \in M_{\lambda}(f)} Z(g).$$

При заданном многочлене

$$\lambda(z) = \sum_{i=1}^m a_i z^{i-1} \in F_2[z], \quad a_1 = a_m = 1, \quad m > 1.$$

через $\lambda^*(z)$ обозначим многочлен

$$\lambda^*(z) = \sum_{i=1}^m a_{m-i+1} z^{i-1}.$$

Лемма 10. *Функции множества $Z(f)$ являются попарно эквивалентными.*

Доказательство. Утверждение данной леммы вытекает из легко проверяемых соотношений

$$\tau \delta_f \tau^{-1} = \delta_g, \quad g(x) = f(x + e) + 1, \quad \tau: (F_2)^n \rightarrow (F_2)^n, \quad \tau(x) = x + e;$$

$$s \delta_f s^{-1} = (\delta_h)^{-1}, \quad h(x) = f_{\nabla}(x).$$

Теорема 10. *Пусть функции $f, h: (F_2)^n \rightarrow F_2$ являются соответственно (φ, λ, L) - и (λ, φ, L) -композициями и заданы представлениями*

$$f(x) = (\varphi * \lambda)(x) + L(x), \quad h(x) = (\lambda * \varphi)(x) + L(x),$$

$$\deg(\varphi) > 1, \quad \lambda(z) = \sum_{i=1}^m a_i z^{i-1} \in F_2[z], \quad a_1 = a_m = 1, \quad m > 1.$$

Тогда функция $h(x)$ не может лежать в множестве $Z_+(f)$.

Доказательство. Пусть

$$f(x) = h(x) + l(x), \quad \deg(l(x)) \leq 1. \quad (11)$$

Это равносильно равенству

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m} \right) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi(x_{i+1}, \dots, x_{i+n-m}) + l(x). \quad (12)$$

Очевидно, что без потери общности можно ограничиться случаем, когда функция $\varphi(z_2, z_3, \dots, z_{n-m+1})$ зависит от переменной z_{n-m+1} нелинейным образом. Рассмотрим разложение функции φ по координате z_{n-m+1}

$$\varphi(z_2, z_3, \dots, z_{n-m+1}) = \varphi_0(z_2, z_3, \dots, z_{n-m}) + z_{n-m+1} \varphi_1(z_2, z_3, \dots, z_{n-m}).$$

Тогда соотношение (12) принимает вид

$$\begin{aligned} & \varphi_0 \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m-1} \right) \\ & + \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m} \right) \varphi_1 \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m-1} \right) \\ & = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_0(x_{i+1}, \dots, x_{i+n-m-1}) \\ & + \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m} \varphi_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+n-m-1}) + l(x). \end{aligned}$$

Учитывая равенства $a_1 = a_m = 1$, отсюда получаем, что

$$\varphi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{n-1}) + \varphi_1 \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m-1} \right) \quad (13)$$

есть постоянная. Но тождеству (13) не может удовлетворять ни одна отличная от константы функция φ_1 . Полученное противоречие доказывает, что равенство (11) невозможно.

Аналогичными рассуждениями доказывается невозможность равенства

$$f(x) = h(x + e) + l(x), \quad \deg(l(x)) \leq 1.$$

Покажем теперь невозможность выполнения равенства

$$f(x) = h_{\bar{v}}(x + e) + l(x), \quad \deg(l(x)) \leq 1.$$

Для этого достаточно показать невозможность выполнения равенства

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m} \right) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi(x_{n-i+1}, x_{n-i}, \dots, x_{m-i+2}) + l(x) \quad (14)$$

ни при какой функции $l(x)$, $\deg(l(x)) \leq 1$, $\deg(\varphi) > 1$.

Рассмотрим разложение $\varphi(z_2, z_3, \dots, z_{n-m+1})$ по координатам z_2 и z_{n-m+1} :

$$\varphi(z_2, z_3, \dots, z_{n-m+1}) = \varphi_0 + z_2 \varphi + z_{n-m+1} \varphi_2 + z_2 z_{n-m+1} \varphi_3,$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — функции переменных $z_3, z_4, \dots, z_{n-m}$. Тогда из (14) получаем, что

$$\varphi_3 = 0, \quad (15)$$

$$\varphi_1 \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+2}, \dots, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m-1} \right) = \varphi_2(x_{n-m}, x_{n-m-1}, \dots, x_3) + c_1, \quad (16)$$

$$\varphi_2 \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+2}, \dots, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m-1} \right) = \varphi_1(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{m+2}) + c_2, \quad (17)$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы. Пусть равенствам (16) и (17) удовлетворяют функции $\varphi_1(z_3, z_4, \dots, z_{n-m-s})$, $\varphi_2(z_t, z_{t+1}, \dots, z_{n-m})$, такие, что φ_1 существенно зависит от z_{n-m-s} , а φ_2 существенно зависит от z_t , $t \geq 3$. Тогда в многочлен Жегалкина левой части равенства (16) будут входить члены, содержащие переменную x_{n-s-1} . При этом переменных $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-s+1}, x_{n-s}$ в левой части равенства (16) не будет. Аналогичным образом, правая часть равенства (16) будет существенным образом зависеть от переменной $x_{n-m-t+3}$ и не будет зависеть от $x_{n-m-t+4}, x_{n-m-t+5}, \dots, x_{n-1}$. Таким образом, должно выполняться равенство

$$n - s - 1 = n - m - t + 3. \quad (18)$$

С другой стороны, левая часть равенства (17) будет существенно зависеть от x_t и не зависеть от $x_1, x_2, \dots, x_{t-1}$, а правая часть данного равенства будет существенно зависеть от x_{m+s+2} и не зависеть от $x_1, x_2, \dots, x_{m+s+1}$. Таким образом, должно выполняться также равенство

$$t = m + s + 2. \quad (19)$$

Из (18)–(19) вытекает, что $m = 1$. Полученное противоречие показывает, что функции φ_1 и φ_2 являются константами. В таком случае соотношение (14) перейдет в аналогичное соотношение для функции φ_0 от меньшего числа аргументов. Продолжая рассуждения далее, получим, что выполнение равенства (14) возможно лишь при $\deg(\varphi) \leq 1$.

Аналогичными рассуждениями показывается невозможность выполнения равенства

$$f(x) = h_{\nabla}(x + e) + l(x), \quad \deg(l(x)) \leq 1.$$

На этом доказательство теоремы завершено.

Лемма 11. Пусть функции $f, h: (F_2)^n \rightarrow F_2$ определены в условиях теоремы 10 и при этом функции $f(x)$ и $f(x + e) + 1$ различны. Тогда функции $h(x)$ и $h(x + e) + 1$ также будут различными.

Доказательство. Рассмотрим случай $(\lambda(z), z + 1) = 1$. Тогда из различности функций $f(x)$ и $f(x + e) + 1$ вытекает, что существует вектор $y = (y_2, y_3, \dots, y_{n-m+1})$, при котором

$$\varphi(y) + \varphi(y + e) = L(e). \quad (20)$$

Если при этом $\varphi(y) + \varphi(y + e)$ — не константа, то

$$h(x) + h(x + e) = \sum_{i=1}^m a_i \psi(x_2, x_3, \dots, x_{n-m+1}) + L(e), \quad (21)$$

где

$$\psi(z) = \varphi(z) + \varphi(z + e).$$

Если предположить, без потери общности, существенную зависимость функции $\psi(x_2, x_3, \dots, x_{n-m+1})$ от переменной x_{n-m+1} , то из (21) получаем существенную зависимость функции $h(x) + h(x + e)$ от переменной x_n , то есть функция $h(x) + h(x + e) + 1$ отлична от константы.

Пусть теперь равенство (20) верно при любых векторах y . Учитывая, что условие $(\lambda(z), z + 1) = 1$ равносильно условию $\sum_{i=1}^m a_i = 1$ (суммирование в поле F_2), получаем, что

$$h(x) + h(x + e) + 1 = L(e) \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) + L(e) + 1 = 1.$$

Если же $(\lambda(z), z + 1) = z + 1$, то из условия $f(x) \neq f(x + e) + 1$ вытекает равенство $h(0) + h(e) + 1 = 1$, и лемма полностью доказана.

Лемма 12. Пусть в условиях теоремы 10 выполняется равенство $\lambda^*(z) = \lambda(z)$. Тогда функции $h(x)$ и $h_{\nabla}(x)$ совпадают в том и только в том случае, когда совпадают функции $f(x)$ и $f_{\nabla}(x)$.

Доказательство. Запишем равенства

$$f(x) = f_{\nabla}(x), \quad h(x) = h_{\nabla}(x)$$

в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \varphi \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m} \right) + \varphi_{\leftrightarrow} \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_i x_{i+n-m} \right) \\ = L(x) + L_{\nabla}(x), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i (\varphi(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n-m})) + \varphi_{\leftrightarrow}(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n-m}) \\ = L(x) + L_{\nabla}(x), \end{aligned} \quad (23)$$

где под $\varphi_{\leftrightarrow}(z_1, z_2, \dots, z_{n-m})$ понимается функция $\varphi(z_{n-m}, z_{n-m-1}, \dots, z_1)$.

Рассмотрим далее случай, когда

$$\varphi(z_1, z_2, \dots, z_{n-m}) + \varphi_{\leftrightarrow}(z_1, z_2, \dots, z_{n-m}) = \sum_{i=1}^{n-m} b_i z_i, \quad b_i \in F_2. \quad (24)$$

Тогда соотношения (22)–(23) являются эквивалентными, поскольку каждое из них эквивалентно соотношению

$$\sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^{n-m} b_j x_{i+j} = L(x) + L_{\nabla}(x).$$

Теперь рассмотрим случай, когда (24) не имеет места. Тогда без потери общности можно полагать, что функция $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_{n-m}) + \varphi_{\leftrightarrow}(z_1, z_2, \dots, z_{n-m})$ нелинейным образом зависит от переменной z_{n-m} . В таком случае левые части соотношений (22) и (23) будут нелинейным образом зависеть от переменной x_n . Следовательно, ни одно из равенств (22)–(23) не будет верным. На этом доказательство завершено.

Лемма 13. Пусть в условиях теоремы 10 имеет место одно из дополнительных условий:

- (1) $\lambda^*(z) = \lambda(z)$, $(\lambda(z), z + 1) = z + 1$, $L(e) = 0$;
- (2) $\lambda^*(z) = \lambda(z)$, $(\lambda(z), z + 1) = 1$.

Тогда в первом случае $f(x) \neq f_{\nabla}(x + e) + 1$ и $h(x) \neq h_{\nabla}(x + e) + 1$, а во втором случае $h(x)$ и $f_{\nabla}(x + e) + 1$ совпадают в том и только в том случае, когда совпадают функции $f(x)$ и $f_{\nabla}(x + e) + 1$.

Справедливость леммы для случая 1 вытекает при сравнении значений соответствующих функций в точке $x = 0 \in (F_2)^n$. Доказательство для случая 2 проводится по той же схеме, что и леммы 12, и мы его опускаем.

Следующая теорема является основной в данном разделе.

Теорема 11. Пусть функция $f: (F_2)^n \rightarrow F_2$ является (φ, λ, L) -композицией и задана представлением

$$f(x) = (\varphi * \lambda)(x) + L(x),$$

где

$$\lambda(z) = \sum_{i=1}^m a_i z^{i-1} \in F_2[z], \quad a_1 = a_m = 1, \quad m > 1,$$

функция $\varphi = \varphi(z_1, z_2, \dots, z_{n-m+1})$ нелинейна, $\deg(\varphi) > 1$, и не зависит от первой координаты, а функция $L = L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является линейной и зависящей существенно от переменной x_1 .

Пусть при этом выполнены дополнительные условия:

- (1) $\lambda(z) = \theta^t(z)$, t — целое положительное число, $\theta(z)$ неприводим над полем F_2 , $\theta^*(z) = \theta(z)$;
- (2) функция f , рассматриваемая как $((\varphi * \theta^{t-1}), \theta, L)$ -композиция, удовлетворяет одному из условий 1–6 теоремы 8;
- (3) $(\lambda(z), z + 1) = 1$, либо $L(e) = 0$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Все функции множества $M(f)$ являются попарно эквивалентными.

$$(2) |M(f)| = \sum_{g \in M_\lambda(f)} |Z(g)|.$$

(3) Если функция $f(x)$ отлична от функции $f(x + e) + 1$, то

$$|M(f)| = |Z(f)|(t + 1).$$

Доказательство. Эквивалентность функций множества $M(f)$ вытекает из теоремы 9 и леммы 10.

Пусть $g, h \in M_\lambda(f)$,

$$\begin{aligned} g(x) &= (\theta^p * (\varphi * \theta^{t-p}))(x) + L(x), \\ h(x) &= ((\theta^q * (\varphi * \theta^{t-q}))(x) + L(x), \quad p \neq q. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$Z(g) \cap Z(h) = \emptyset.$$

Действительно, положим для определенности, что $p > q$. Тогда, с учетом леммы 3, функции g и h можно представить в виде

$$\begin{aligned} h(x) &= ((\theta^q * (\varphi * \theta^{t-q}))(x) + L(x) = ((\theta^q * (\varphi * \theta^{t-p})) * \theta^{p-q})(x) + L(x), \\ g(x) &= ((\theta^p * (\varphi * \theta^{t-p}))(x) + L(x) = (\theta^{p-q} * (\theta^q * (\varphi * \theta^{t-p}))(x) + L(x). \end{aligned}$$

Следовательно, функции h и g можно рассматривать как $(\theta^q * (\varphi * \theta^{t-p}), \theta^{p-q}, L)$ - и $(\theta^{p-q}, \theta^q * (\varphi * \theta^{t-p}), L)$ -композицию соответственно. С учетом теоремы 10 получаем, что $Z(g) \cap Z(h) = \emptyset$. Следовательно,

$$|M(f)| = \left| \bigcup_{g \in M_\lambda(f)} Z(g) \right| = \sum_{g \in M_\lambda(f)} |Z(g)|.$$

Пусть теперь функция $f(x)$ отлична от функции $f(x + e) + 1$. Покажем, что в этом случае при любой функции $g \in M_\lambda(f)$ мощности множеств $Z(g)$ и $Z(f)$ совпадают. По лемме 11, функция $g(x)$ будет отлична от функции $g(x + e) + 1$. Пусть

$$g(x) = ((\theta^p * (\varphi * \theta^{t-p}))(x) + L(x), \quad 0 \leq p \leq t.$$

Так как

$$(\theta^p)^*(z) = (\theta^*(z))^p = \theta^p(z),$$

по лемме 12 функция $g(x)$ будет отлична от функции $g_{\nabla}(x)$ в том и только в том случае, если функция

$$f(x) = (\varphi * \theta^t)(x) + L(x) = ((\varphi * \theta^{t-p}) * \theta^p)(x) + L(x)$$

будет отлична от $f_{\nabla}(x)$. Аналогичным образом (с учетом леммы 13) показывается, что функция $g(x)$ будет отлична от функции $g_{\nabla}(x + e) + 1$ в том и только том случае, если функция $f(x)$ будет отлична от функции $f_{\nabla}(x + e) + 1$. Следовательно,

$$|Z(g)| = |Z(f)|, \quad |M(f)| = |Z(f)|(t + 1).$$

На этом теорема полностью доказана.

6. Заключительные замечания

Отметим, что с точки зрения конкретного расчета цикловой структуры соответствующих нелинейных регистров сдвига особый интерес представляют классы эквивалентности, в которых наряду с нелинейными имеются и линейные функции обратной связи. Например, все автономные двоичные регистры сдвига длины n , обладающие циклом длины $2^n - 1$, являются изоморфными, и среди них имеются линейные (с помощью которых вырабатываются линейные рекуррентные последовательности максимального периода). Однако, использующийся в работе способ построения эквивалентных функций на основе (φ, λ, L) - и (λ, φ, L) -композиций приводит к классам эквивалентных функций $M(f)$, которые имеют одну и ту же степень нелинейности. Таким образом, в случае нелинейной функции f в построенных классах эквивалентности $M(f)$ нет линейных функций. Это приводит к необходимости использования вычислительной техники для определения конкретной цикловой структуры регистров сдвига, соответствующих заданному классу эквивалентности (в виду отсутствия к настоящему моменту эффективных теоретических методов расчета).

Пусть, например,

$$\lambda(z) = \sum_{i=1}^m a_i z^{i-1} = (1+z)^{n-3} \in F_2[z], \quad m = n-2,$$

и функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет вид

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+1} \right) \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+2} \right) + L(x), \quad (25)$$

где функция

$$L = L(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + L_*(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

является линейной, зависящей существенным образом от переменной x_1 и принимающей нулевое значение на векторе $e = (1, 1, \dots, 1)$. Тогда мощность соответствующего класса эквивалентных функций $M(f)$ равна $4(n-2)$ или $2(n-2)$ в зависимости от того, различны функции $L_*(x_2, x_3, \dots, x_n)$ и $L_*(x_n, x_{n-1}, \dots, x_2)$ или они совпадают. При этом число функций f вида (25), отвечающих различным классам $M(f)$, равно 2^{n-3} при нечетном n и равно $2^{n-3} + 2^{(n-4)/2}$ при четном n .

В соответствии с результатами предыдущего раздела элементы множества $M(f)$ задаются как объединение множеств $Z(g_{\Theta, \nu})$ по всем функциям $g_{\Theta, \nu}: (F_2)^n \rightarrow F_2$ вида

$$g_{\Theta, \nu}(x) = (\theta * (\varphi * \nu))(x) + L(x), \quad (26)$$

где многочлены θ и ν удовлетворяют равенству

$$\theta(z)\nu(z) = (1+z)^{n-3}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i z^{i-1}, & \alpha_1 = \alpha_m = 1, \\ \nu(z) &= \sum_{i=1}^{n-m-1} \beta_i z^{i-1}, & \beta_1 = \beta_{n-m-1} = 1. \end{aligned}$$

Тогда из (26) получаем, что

$$g_{\theta,v}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[\left(\sum_{j=1}^{n-m-1} \beta_j x_{i+j} \right) \left(\sum_{j=1}^{n-m-1} \beta_j x_{i+j+1} \right) \right] + L(x).$$

С помощью расчетов на ЭВМ для $n \leq 24$ были найдены все функции f вида (25), являющиеся представителями различных классов эквивалентности $M(f)$ и отвечающие регистрам сдвига с циклом длины $2^n - 1$, и для $25 \leq n \leq 27$ найдены примеры таких функций. Данные результаты приведены в приложении.

В заключение рассмотрим одну более общую конструкцию, которая, возможно, позволит строить эквивалентные функции с разной степенью нелинейности.

Теорема 12. Пусть $\varphi: (F_2)^{n-m+1} \rightarrow F_2$, $\psi: (F_2)^{m-1} \rightarrow F_2$ — произвольные булевы функции от соответствующего числа аргументов,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 + \varphi(\psi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) + x_m, \\ &\quad \dots, \psi(x_{n-m+1}, \dots, x_{n-1}) + x_n) \\ &\quad + \psi(x_{n-m+2}, \dots, x_n), \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 + \psi(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-m+1}) + x_{n-m+2}, \\ &\quad \dots, \varphi(x_{m-1}, \dots, x_{n-1}) + x_n) \\ &\quad + \varphi(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \\ A &= (A_1, A_2, \dots, A_n): (F_2)^n \rightarrow (F_2)^n, \\ A_1 &= \psi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) + x_m, \\ A_{i+1}(x) &= A_i(\delta_i(x)), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Тогда отображение A биективно, и выполняется равенство $A\delta A^{-1} = \delta_g$.

Доказательство. Расписав подробнее координатное представление отображения A , получаем, что

$$\begin{aligned} A_1 &= \psi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) + x_m, \\ A_1 &= \psi(x_2, x_3, \dots, x_m) + x_{m+1}, \\ &\dots \\ A_{n-m+1} &= \psi(x_{n-m+1}, \dots, x_{n-1}) + x_n, \\ A_{n-m+2} &= x_1 + \varphi(A_1, A_2, \dots, A_{n-m+1}), \\ A_{n-m+3} &= x_2 + \varphi(A_2, A_3, \dots, A_{n-m+2}), \\ &\dots \\ A_n &= x_{m-1} + \varphi(A_{m-1}, A_m, \dots, A_{n-1}). \end{aligned} \tag{27}$$

Из последних $m-1$ уравнений системы (27) находятся переменные $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$. После чего оставшиеся переменные последовательно находятся из первых $n-m+1$ уравнений. Тем самым, отображение A биективно. С учетом леммы 1 для доказательства теоремы теперь достаточно убедиться в справедливости равенства

$$g(A(x)) = A_n(\delta_f(x)). \tag{28}$$

Справедливо равенство

$$g(A(x)) = A_1 + \psi(\varphi(A_1, A_2, \dots, A_{n-m+1}) + A_{n-m+2}, \\ \dots, \varphi(A_{m-1}, \dots, A_{n-1}) + A_n) + \varphi(A_m, A_{m+1}, \dots, A_n)$$

С другой стороны, с учетом (27) получаем, что

$$A_n(\delta_f(x)) = x_m + \varphi(A_m, A_{m+1}, \dots, A_n) \\ = A_1 + \psi(\varphi(A_1, A_2, \dots, A_{n-m+1}) \\ + A_{n-m+2}, \dots, \varphi(A_{m-1}, \dots, A_{n-1}) + A_n) \\ + \varphi(A_m, A_{m+1}, \dots, A_n).$$

Следовательно, равенство (28) выполнено, и теорема доказана.

7. Приложение

Ниже приведен перечень классов $M(f)$ квадратичных функций обратной связи регистров сдвига, обладающих циклом длины $2^n - 1$, где n — длина регистра, L — число, определяющее линейную часть функции обратной связи.

n	L
4	1
5	1, 2, 11
7	1, 37, 55
8	13, 47, 59
9	26, 44, 133
10	87, 351
11	8
12	481, 575, 577, 995
13	949, 1822, 1838, 2225
14	206, 5827
15	6453, 9059, 12839
16	21237
17	12269
18	18662, 31118, 68519, 93839
19	20796, 34476, 84057, 174551
20	82642
21	849314
22	765840
23	1788112
24	2946962, 3375584, 6852738, 6901516, 7970725, 8065036
25	6529570
26	5105416
27	11750144

Замечание 4. Для $n \leq 24$ в приложении приведены результаты полного перебора всех возможных вариантов для L .

Для $25 \leq n \leq 27$ эксперименты проводились до первого успеха, то есть до первого нахождения линейной части L соответствующей функции обратной связи регистра сдвига, обладающего циклом длины $2^n - 1$.

При $n = 6$ искомое множество оказалось пустым.

Замечание 5. Пусть двоичный вектор $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ отвечает двоичной записи числа L , то есть

$$L = b_1 + b_2 2 + b_3 2^2 + \dots + b_{n-1} 2^{n-2}.$$

Тогда линейная булева функция $L_* = L_*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, соответствующая числу L , имеет вид

$$L_*(x_2, x_3, \dots, x_n) = b_1 x_2 + b_2 x_3 + \dots + b_{n-1} x_n.$$

Функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, отвечающая классу эквивалентности $M(f)$, имеет вид

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+1} \right) \left(\sum_{i=1}^m a_i x_{i+2} \right) + b_1 x_2 + b_2 x_3 + \dots + b_{n-1} x_n + x_1,$$

где

$$\lambda(z) = \sum_{i=1}^m a_i z - i - 1 = (1+z)^{n-3} \in F_2[z], \quad m = n-2.$$

При этом мощность соответствующего класса эквивалентных функций оказалась равной $4(n-2)$, так как для найденных чисел L соответствующие функции $L_*(x_2, x_3, \dots, x_n)$ и $L_*(x_n, x_{n-1}, \dots, x_2)$ всегда различны.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. Наука, Москва, 1988.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. Наука, Москва, 1972.
3. Холл М., *Комбинаторика*. Мир, Москва, 1970.
4. Berlekamp E. R., Distribution of cyclic matrices in finite field. *Duke Math. J.* (1966) **33**, 45–48.
5. Dickson L. E., *Linear groups with an exposition of the Galois field theory*. Teubner, Leipzig, 1901.
6. Fredricksen H., A class of nonlinear de Bruijn cycles. *J. Comb. Theory* (1975) **A19**, 192–199.
7. Golomb S. W., *Shift Register Sequences*. Aegean Park, Laguna Hills, California, 1982.
8. Games R. A., Chan A. H., A fast algorithm for determining the complexity of a binary sequence with period 2^n . *IEEE Trans. Inf. Theory* (1983) **29**, 144–146.
9. Games R. A., There are no de Bruijn sequences of span n with complexity $2^{n-1} + n + 1$. *J. Comb. Theory* (1983) **A34**, 248–251.
10. Kjeldsen K., On the cycle structure of a set of nonlinear shift registers with symmetric feedback functions. *J. Comb. Theory* (1976) **A20**, 154–169.
11. Lempel A., On a homomorphism of the de Bruijn graph and its application to the design of feedback shift registers. *IEEE Trans. Comput.* (1970) **19**, 1204–1209.
12. Lempel A., Etzion T., On the distribution of de Bruijn sequences of given complexity. *IEEE Trans. Inf. Theory* (1984) **30**, 611–614.
13. Lempel A., Etzion T., Construction of de Bruijn sequences of minimal complexity. *IEEE Trans. Inf. Theory* (1984) **30**, 705–709.
14. Zurawiecki J., Boolean shift-registers. *Demonstr. Math.* (1977) **10**, 405–415.
15. Солодовников В. И., О полугруппе, порожденной автоматными отображениями обратимого автомата. *Труды по дискретной математике* (2001) **4**, 231–242.
16. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А., *Алгебра*. Гелиос АРВ, Москва, 2003.

Статья поступила 21.01.2008.