Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Пирзада, Последовательности меток в мультиграфах, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 1, 89–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm11>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:46:45

Последовательности меток в мультиграфах

© 2007 г. Ш. Пирзада

В работе рассматриваются r -диграфы, то есть ориентированные мультиграфы без петель, в которых число параллельных ребер между любыми двумя вершинами не превосходит r . Получены необходимые и достаточные условия того, чтобы последовательность неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке, была последовательностью меток, приписанных определенным образом вершинам r -диграфа.

1. Введение

Пусть D — r -диграф с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, и $d^+(v_i)$, $d^-(v_i)$ обозначают, соответственно, полустепени захода и исхода вершины v_i , $i = 1, \dots, n$. Положим метку p_i вершины v_i равной

$$p_i = p(v_i) = r(n-1) + d^+(v_i) - d^-(v_i),$$

так что $0 \leq p_i \leq 2r(n-1)$. Последовательность $P = [p_i]_1^n$, расположенная в неубывающем порядке, называется последовательностью меток r -диграфа D .

Можно интерпретировать r -диграф как результат игр между каждой парой игроков, соответствующих вершинам диграфа. Игра игроков, соответствующих произвольным вершинам u и v , состоит из не более r партий и в каждой партии проводится дуга из u в v , если выигрывает игрок u , и из v в u , если выигрывает игрок v , в каждой партии возможен и ничейный исход или некоторые из r возможных партий могут не состояться, в обоих этих случаях дуга не проводится. Игрок получает два очка при каждом выигрыше и одно очко при ничейном исходе или несостоявшейся партии. При такой системе маркировки вершина v получает метку, равную приведенному выше значению p_v .

Последовательность P неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке, называется реализуемой, если существует r -диграф, для которого P является последовательностью меток.

Если в r -диграфе имеется x_1 дуг из вершины v в вершину u и x_2 дуг из вершины v в вершину u , причем $0 \leq x_1, x_2 \leq r$ и $0 \leq x_1 + x_2 \leq r$, то в таком случае мы будем писать $u(x_1 - x_2)v$.

Заметим, что 1-диграф — это ориентированный граф, а полный 1-диграф является турниром. Будем говорить, что r -диграф D является полным, если между любой парой вершин D имеется ровно r дуг.

В r -диграфе r -тройкой называется индуцированный r -поддиграф с тремя вершинами вида $u(x_1 - x_2)v(y_1 - y_2)w(z_1 - z_2)u$, где $0 \leq x_i, y_i, z_i \leq r$, $i = 1, 2$, и

$$0 \leq x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \leq r.$$

В r -диграфе 1-тройкой называется индуцированный 1-поддиграф с тремя вершинами, 1-тройка называется транзитивной, если она имеет вид $u(1-0)v(1-0)w(0-1)u$, или $u(1-0)v(0-1)w(0-0)u$, или $u(1-0)v(0-0)w(0-1)u$, или $u(1-0)v(0-0)w(0-0)u$, или $u(0-0)v(0-0)w(0-0)u$, в остальных случаях она называется нетранзитивной. Транзитивной называется r -тройка, если она содержит только транзитивные 1-тройки, и r -диграф называется транзитивным, если каждая его r -тройка транзитивна.

Турнир — это нереклексивный полный асимметричный диграф, и метка s_v вершины v равна числу дуг, исходящих из этой вершины, последовательность меток $S(T)$ турнира T — это последовательность меток вершин, расположенных в неубывающем порядке. Следующий критерий приведен в [2].

Теорема 1. Последовательность $[s_i]_1^n$ неотрицательных чисел, расположенных в неубывающем порядке, является последовательностью меток турнира тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^k s_i \geq \binom{k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

причем при $k = n$ достигается равенство.

В соответствии с системой маркировки, описанной выше, метка p_v вершины v в турнире равна $p_v = 2s_v + n - 1$ и условия теоремы 1 принимают вид

$$\sum_{i=1}^k p_i \geq k(n + k - 2), \quad k = 1, \dots, n,$$

причем при $k = n$ достигается равенство.

Ориентированный граф есть диграф без пар одинаково направленных дуг и без петель. В [1] была введена величина

$$a_v = n - 1 + d^+(v) - d^-(v), \quad 0 \leq a_v \leq 2n - 2,$$

как метка вершины v в ориентированном графе D . Пусть $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ — последовательность меток в D , расположенных в порядке неубывания. В [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Последовательность $A = [a_i]_1^n$ неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке, является последовательностью меток ориентированного графа тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^k a_i \geq k(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

причем при $k = n$ достигается равенство.

В [3] доказано следующее утверждение о реализуемости последовательности меток в 2-диграфе.

Теорема 3. Последовательность $P = [p_i]_1^n$ неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке есть последовательность меток некоторого 2-диграфа тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^k p_i \geq 2k(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

причем при $k = n$ достигается равенство.

Эта теорема является одним из следствий доказываемой ниже теоремы 4.

2. Критерий реализуемости

В этом разделе мы докажем теорему о реализуемости последовательности целых неотрицательных чисел в виде последовательности меток r -диграфа. Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Последовательность меток P в r -диграфе остается неизменной если,*

- (а) *нетранзитивная 1-тройка $u(1-0)v(1-0)w(1-0)u$ заменяется транзитивной 1-тройкой $u(0-0)v(0-0)w(0-0)u$ или наоборот,*
- (б) *нетранзитивная 1-тройка $u(1-0)v(1-0)v(0-0)u$ заменяется на транзитивную 1-тройку $u(0-0)v(0-0)w(0-1)u$ или наоборот.*

Доказательство. Для 1-тройки, образованной вершинами u, v и w в r -диграфе, величины $d^+(u) - d^-(u)$, $d^+(v) - d^-(v)$, $d^+(w) - d^-(w)$ не изменяются при преобразованиях (а) и (б), откуда следует утверждение леммы 1.

Теорема 4. *Последовательность $P = [p_i]_1^n$ неотрицательных целых чисел расположенных в неубывающем порядке есть последовательность меток некоторого r -диграфа тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^k p_i \geq rk(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

причем при $k = n$ достигается равенство.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть D — r -диграф с множеством вершин V , имеющий последовательность меток P . Пусть D_1 — r -поддиграф диграфа D , индуцированный подмножеством k вершин $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ диграфа D . Пусть α — число дуг диграфа D , направленных из W в $V - W$, β — число дуг в D , направленных из $V - W$ в W , и γ — число дуг в D_1 . Ясно, что для любой вершины w из W и для любой вершины v из $V - W$ имеется не более r дуг из v в w , откуда следует, что $\beta \leq rk(n-k)$, то есть $\beta \leq rnk - rk^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k p_{w_i} &= \sum_{i=1}^k (rn - r + d_D^+(w_i) - d_D^-(w_i)) = k(rn - r) + \sum_{i=1}^k d_D^+(w_i) - \sum_{i=1}^k d_D^-(w_i) \\ &= k(rn - r) + \left(\sum_{i=1}^k d_D^+(w_i) + \alpha \right) - \left(\sum_{i=1}^k d_D^-(w_i) + \beta \right) \\ &= krn - kr + \gamma + \alpha - \gamma - \beta \geq krn - kr = \alpha - \beta \geq krn - kr - \beta \\ &= krn - kr - (rnk - rk^2) = rk(k-1). \end{aligned} \quad (2)$$

Применяя этот результат к k вершинам с метками $p_1, p_2, \dots, p_k$, получаем требуемое неравенство. Если $k = n$, то $\alpha = \beta = 0$ и требуемое равенство следует из (2).

Достаточность докажем методом от противного. Предположим, что все последовательности неотрицательных чисел, расположенных в неубывающем порядке, длины, меньшей n , удовлетворяющие (1), являются последовательностями меток. Пусть n — наименьшее число, при котором не выполняется это предположение, и при таком выборе n пусть p_1 — наименьшее среди тех, при которых $P = [p_1]_1^n$ не является последовательностью меток. Рассмотрим два случая:

- (а) равенство в (1) выполняется при некотором $k < n$,
- (б) все неравенства в (1) строгие при $k < n$.

В случае (а) пусть k — наименьшее число такое, что

$$\sum_{i=1}^k p_i = rk(k-1).$$

Ясно, что последовательность $[p_1, p_2, \dots, p_k]$ удовлетворяет (1) и ее длина меньше n . Поэтому по предположению $[p_i]_1^k$ — последовательность меток некоторого r -диграфа, скажем, D_1 . Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (p_{k+i} - 2rk) &= \sum_{i=1}^{m+k} p_i - \sum_{i=1}^k p_i - 2mrk \\ &\geq r(m+k)(m+k-1) - rk(k-1) - 2mrk = rn(m-1) \end{aligned}$$

для всех m , $1 \leq m \leq n-k$, с равенством при $m = k$.

Поскольку $m < n$, последовательность $[p_{k+1} - 2rk, p_{k+2} - 2rk, \dots, p_n - 2rk]$ в силу минимальности n есть последовательность меток для некоторого r -диграфа D_2 . Ясно, что r -диграф D , являющийся объединением копий диграфов D_1 и D_2 таким, что $u(r-0)v$ для любой вершины $u \in D_2$ и любой вершины $v \in D_1$, имеет последовательность меток $P = [p_i]_1^n$, получаем противоречие.

Рассмотрим теперь случай (б), то есть пусть все неравенства в (1) являются строгими при $k < n$. Пусть последовательность $P' = [p'_i]_1^n$, определяется для $i = 1, \dots, n$ равенствами

$$p'_i = \begin{cases} p_i - 1, & \text{если } i = 1, \\ p_i + 1, & \text{если } i = n, \\ p_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k p'_i &= \sum_{i=1}^k p_i - 1 > rk(k-1) - 1 \geq rk(k-1), \quad 1 \leq k < n, \\ \sum_{i=1}^n p'_i &= \sum_{i=1}^n p_i - 1 + 1 = rn(n-1). \end{aligned}$$

Это показывает, что последовательность $P' = [p'_i]_1^n$ удовлетворяет условиям (1) и поэтому является последовательностью меток некоторого r -диграфа D . Пусть теперь u и v — вершины с метками $p'_1 = p_1 - 1$ и $p'_n = p_n + 1$ соответственно. Если в D

$$u(x-y)v, \quad 0 \leq x \leq r-1, \quad 1 \leq y \leq r, \quad 0 \leq x=y \leq r,$$

то заменяя $u(x - y)v$ на $u(x - (y - 1))$, получаем r -диграф с последовательностью меток P и приходим к противоречию.

Пусть теперь $u(r - 0)v$. Ясно, что $p'_v \geq p'_u + 2$. Предположим, что существует хотя бы одна вершина $w \in D - \{u, v\}$ такая, что среди r -троек, образованных вершинами u, v и w содержится нетранзитивная 1-тройка вида $u(1 - 0)v(1 - 0)w(1 - 0)u$, или $u(1 - 0)v(1 - 0)w(0 - 0)u$, или $u(1 - 0)v(0 - 0)w(1 - 0)u$. Преобразуя их соответственно в 1-тройки вида $u(1 - 0)v(0 - 0)w(1 - 0)u$, $u(1 - 0)v(0 - 0)w(0 - 1)u$, $u(1 - 0)v(0 - 1)w(0 - 0)u$ получаем r -диграф с последовательностью меток P , и вновь приходим к противоречию.

Если для любой вершины $w \in D - \{u, v\}$ индуцированный вершинами u, v, w поддиграф содержит только 1-тройки вида

- (i) $u(1 - 0)v(1 - 0)w(0 - 1)u$,
- (ii) $u(1 - 0)v(0 - 1)w(1 - 0)u$,
- (iii) $u(1 - 0)v(0 - 1)w(0 - 1)u$,
- (iv) $u(1 - 0)v(0 - 0)w(0 - 1)u$,
- (v) $u(1 - 0)v(0 - 1)w(0 - 0)u$,
- (vi) $u(1 - 0)v(0 - 0)w(0 - 0)u$,

то ясно, что $p'_v < p'_u + 2$, так как $d^+(u) > d^+(v)$ и $d^-(u) < d^-(v)$. Получаем противоречие с тем, что $p'_v \geq p'_u + 2$.

Если случай (i) возникает для любой вершины $w \in D - \{u, v\}$, так что r -тройка образованная вершинами u, v, w , имеет вид $u(r - 0)v(x - 0)w(0 - y)u$, где $2 \leq x \leq r$, $1 \leq y \leq r - 1$, $x > y$, то

$$p'_v = r(n - 1) + d^+(v) - d^-(v) = r(n - 1) + x(n - 2) - r = rn - 2r + xn - 2x,$$

$$p'_u = r(n - 1) + d^+(u) - d^-(u) = r(n - 1) + r + y(n - 2) = rn + yn - 2y.$$

Поэтому $p'_v - p'_u = (n - 2)(x - y) - 2r$, так что $p'_v = p'_u = (n - 2)(x - y) - 2r$.

При $n - 2 < (2 + 2r)/(v - y)$ ясно, что $p'_v \leq p'_u + 1$. Получаем противоречие.

При $n - 2 \geq (2 + 2r)/(x - y)$ ясно, что $p'_v \geq p'_u + 2$, тогда $u(r - 0)v(x - 0)w(0 - y)u$ можно заменить на $u(r - 0)v((x - 1) - 0)w(0 - (y + 1))u$ и получить r -диграф с последовательностью меток P . Приходим к противоречию.

Если случай (ii) возникает для любой вершины $w \in D - \{u, v\}$, так что r -тройка, образованная вершинами u, v, w , имеет вид $u(r - 0)v(0 - y)w(x - 0)u$, где $2 \leq x \leq r$, $1 \leq y \leq r - 1$, $x > y$, то

$$p'_v = r(n - 1) + d^+(v) - d^-(v) = r(n - 1) + y(n - 2) = rn - 2r + yn - 2,$$

$$p'_u = r(n - 1) + d^+(u) - d^-(u) = r(n - 1) + r + x(n - 2) = rn - xn - 2.$$

Поэтому $p'_v - p'_u = n(x - y) - r$.

При $n < (r + 2)/(x - y)$ ясно, что $p'_v \leq p'_u + 1$. Получаем противоречие.

При $n \geq (r + 2)/(x - y)$ ясно, что $p'_v \geq p'_u + 2$, но тогда $u(r - 0)v(0 - y)w(x - 0)u$ можно заменить на $u(r - 0)v(0 - (y + 1))w((x - 1) - 0)u$ и получить r -диграф с последовательностью меток P . Приходим к противоречию.

Это завершает доказательство достаточности.

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. Если в теореме 4 положить $r = 1$, то получим теорему 2, аналогично, полагая $r = 2$, получим теорему 3.

Список литературы

1. Avey P., Score sequences of oriented graphs. *J. Graph Theory* (1991) **15**, 251–257.
2. Landau M. G., On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score structure. *Bull. Math. Biophys.* (1953) **15**, 143–148.
3. Pirzada S., Samee U., Mark sequences in digraphs. *Seminare Lotharingien de Combinatoire* (2006) **55**, Art.B55c.
4. Pirzada S., Naikoo T. A., Inequalities on marks in digraphs. *J. Math. Inequalities Appl.* (2006) **9**, №2, 189–198.

Статья поступила 8.06.2005.

Переработанный вариант поступил 1.12.2006.