Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Гришухин, Многогранники Вороного корневой решетки E_6 и ей двойственной, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 2, 133–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 03:13:23

Многогранники Вороного корневой решетки E_6 и ей двойственной

© 2010 г. В. П. Гришухин

Дается подробное описание многогранников Вороного $P_V(E_6)$ корневой решетки E_6 и $P_V(E_6^*)$ решетки E_6^* , двойственной к решетке $P_V(E_6)$. Для этих многогранников приводятся таблицы типов всех граней и число граней каждого типа. Известно, что многогранник Вороного $P_V(E_6)$ есть объединение многогранника Шлефли P_{Schl} и его противоположного многогранника $-P_{\text{Schl}}$. В работе доказано, что $P_V(E_6^*)$ есть пересечение этих многогранников.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-02805.

1. Введение

Многогранник Вороного (или область Дирихле–Вороного) $P_V(L, v)$ некоторой точки v решетки L есть замыкание множества всех тех точек пространства, которые ближе к v , чем к другим точкам решетки. Обычно начало координат 0 считается точкой L и полагается $P_V(L) = P_V(L, 0)$.

В [1] и [2] изучались многогранники Вороного некоторых специальных решеток, в частности, корневой решетки E_6 и ее двойственной решетки E_6^* . Решетка E_6 интересна тем, что она дает наилучшую решеточную упаковку пространства $\mathbf{R}^6$ шарами. Ее двойственная решетка E_6^* дает наилучший известный квантизатор размерности 6.

С. С. Рышков первым указал (см., например, [3]), что каждый многогранник Вороного представим в виде суммы Минковского неразложимых в сумму многогранников Вороного. С. С. Рышков назвал неразложимый многогранник коренным многогранником. Коренные многогранники Вороного соответствуют решеткам (и квадратичным формам), принадлежащим одномерным L -областям Вороного. Многогранники $P_V(E_6)$ и $P_V(E_6^*)$ являются коренными.

Автор этой статьи с удивлением обнаружил, что почти нет подробного описания многогранника Вороного $P_V(E_6)$. Этот многогранник почти правильный. Все грани $P_V(E_6)$ одной размерности конгруэнтны между собой. Ребра имеют два типа. Они параллельны и равны по норме векторам двух систем векторов. Это система корней E_6 , являющаяся множеством $\mathcal{R}$ минимальных векторов решетки E_6 , и множество $\mathcal{M}$, содержащее все 27 пар противоположных минимальных векторов двойственной решетки E_6^* .

Множество $\mathcal{M}$ можно разбить на подмножество $\mathcal{M}_0$ и его противоположное подмножество $-\mathcal{M}_0$ так, что комбинаторная конфигурация $\mathcal{M}_0$ есть известная конфигурация взаимного пересечения 27 прямых на гладкой кубической поверхности в трехмерном проективном пространстве. Эта конфигурация описывается в многих книгах по алгебраической

геометрии (см., например, [4, 5]). Как комбинаторная конфигурация, она является сильно регулярным графом Шлефли, вершины которого представляют прямые так, что если две прямые пересекаются, то соответствующие им вершины несмежны [6].

Многогранник Шлефли P_{Schl} есть выпуклая оболочка 27 концов векторов множества $\mathcal{M}_0$, а $P_V(E_6)$ есть выпуклая оболочка 54 концов векторов множества $\mathcal{M}$. Поэтому $P_V(E_6)$ есть объединение P_{Schl} и $-P_{\text{Schl}}$. Более того, оказывается, что $P_V(E_6^*)$ есть выпуклая оболочка центров всех 720 двумерных граней P_{Schl} , которую обозначим $\text{ambo}_2 P_{\text{Schl}}$, используя определение операции ambo_2 из [2]. Многограннику $P_V(E_6^*)$ посвящена работа [7], но в ней используется неудобное координатное описание. Равенство $P_V(E_6^*) = \text{ambo}_2 P_{\text{Schl}}$ позволяет наглядно описать грани всех размерностей многогранника $P_V(E_6^*)$. В частности, один из двух типов его четырехмерных граней есть многогранник Вороного $P_V(D_4)$ корневой решетки D_4 , являющейся правильным многогранником, называемым 24-ячейкой.

Ниже в статье используются обозначения Кокстера [8] правильных n -мерных многогранников: α_n для симплекса, β_n для ортаэдра (кросс-политопы) и γ_n для n -мерного куба. Термин ортаэдр для многогранника β_n , двойственного кубу γ_n , был предложен Е. П. Барановским [9]. Этот термин естествен, так как октаэдр есть выпуклая оболочка $2n$ концов взаимно ортогональных пар противоположных векторов одинаковой длины. В [2] этот многогранник назван ортоплексом. Выпуклая оболочка 2^{n-1} попарно несмежных вершин куба γ_n называется полукубом и обозначается $h\gamma_n$.

Обычно (см. [1, 2]) решетка E_6 задается в виде сечения унимодулярной 8-мерной корневой решетки E_8 . На наш взгляд, более удобным является предложенное в [9] представление решетки E_6 в виде центрировки прямой суммы $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$ корневых двумерных решеток A_2 . Это представление позволяет просто описать двойственную решетку E_6^* , а также найти минимальные векторы классов смежности $E_6/2E_6$ и $E_6^*/2E_6^*$, необходимые для описания многогранников Вороного $P_V(E_6)$ и $P_V(E_6^*)$.

2. Минимальные векторы классов смежности

Корневая решетка E_6 порождается одной из неприводимых, то есть неразложимых в прямую сумму, систем корней с корнями нормы (квадрата длины) 2. Все такие системы хорошо известны: существуют две бесконечные серии $\mathbf{A}_n$ для размерностей $n \geq 1$ и $\mathbf{D}_n$ для $n \geq 4$, и три специальные системы $\mathbf{E}_n$ для $n = 6, 7, 8$.

Как видно из обозначения, решетка E_6 порождается корневой системой $\mathbf{E}_6$, состоящей, с точностью до знака, из 36 корней. Корневая система $\mathbf{E}_6$ содержит в качестве подсистемы прямую сумму $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$. Из трех корней каждого слагаемого A_2 выбираем по два корня a_i, a_{i^*} , где $i = 1, 2, 3$, таких, что $a_i^T a_{i^*} = 1$ для всех трех i . Тогда $a_i - a_{i^*}$ есть третий корень i -го слагаемого A_2 .

Скалярное произведение векторов-столбцов a и b будем обозначать $a^T b = b^T a$. Скалярное произведение $a^T a$ называется нормой вектора a и обозначается a^2 .

Пусть $N_6 = \{1, 1^*, 2, 2^*, 3, 3^*\} = \{ii^*jj^*kk^*\}$. Иногда удобно считать N_6 произвольным множеством, в котором задана инволюция $i \rightarrow i^*$ такая, что $(i^*)^* = i$ для любого $i \in N_6$. Пару индексов ii^* , где $1 \leq i \leq 3$, будем называть специальной парой. Множество $\mathcal{A} = \{a_i : i \in N_6\}$ есть базис пространства $\mathbf{R}^6$ такой, что

$$a_i^2 = 2, \quad a_i^T a_{i^*} = 1, \quad a_i^T a_j = 0, \quad j \neq i, i^*, \quad i, j \in N_6. \quad (1)$$

Базис $\mathcal{A}$ целочисленно порождает решетку, являющуюся прямой суммой $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$

корневых решеток A_2 . Легко видеть, что вектор

$$h = \frac{1}{3} \sum_{i \in N_6} a_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (a_i + a_{i*})$$

есть корень корневой системы E_6 такой, что $h^T a_i = 1$ для всех $i \in N_6$ и $h^2 = 2$.

Базис $\mathcal{A}$ определяет положительно определенную квадратичную форму

$$f(x) = \left(\sum_{i \in N_6} x_i a_i \right)^2 = 2 \sum_{i \in N_6} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^3 x_i x_{i*}$$

Эта форма есть удвоенная форма ψ_2 , использованная в [9] для описания разбиения Делоне корневой решетки E_6 .

Корневая решетка E_6 порождена базисом $\mathcal{A}$ и вектором h . Таким образом, решетка E_6 есть центрировка векторами h и $2h$ решетки метрической формы f , то есть решетки $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$. В базисе $\mathcal{A}$ координаты вектора решетки E_6 либо все целые числа, либо все являются третью целого числа. Замена в базисе $\mathcal{A}$ любого вектора вектором h дает целочисленный базис E_6 .

Вектор u решетки L называется минимальным в своем классе смежности в $L/2L$, если он имеет минимальную норму среди всех векторов своего класса. Класс смежности называется простым, если он имеет только один (с точностью до знака) минимальный вектор. В противном случае класс смежности называется непростым.

Для вектора $p \in \mathbf{R}^6$ определим полупространство

$$H(p) = \{x \in \mathbf{R}^6 : p^T x \leq p^2/2\}. \quad (2)$$

Очевидно, что опорная гиперплоскость полупространства $H(p)$ делит вектор p пополам. Если вектор p есть вектор решетки L , то согласно определению многогранник Вороного $P_V(L)$ решетки L есть пересечение полупространств $H(p)$ для всех $p \in L$. Но хорошо известно, что в этом пересечении необходимо и достаточно взять только векторы, принадлежащие множеству M минимальных векторов простых классов смежности, то есть

$$P_V(L) = \bigcap_{p \in M} H(p).$$

Поэтому минимальный вектор простого класса смежности и противоположный ему вектор являются фасетными векторами пары параллельных и противоположных фасет многогранника Вороного. Фасетный вектор является ребром двойственного разбиения на многогранники Делоне. Множество всех минимальных векторов непростого класса смежности является множеством всех диагоналей центрально симметричных граней разбиения Делоне. Ради краткости, назовем $(n-1)$ -мерную грань n -мерного многоугольника фасетой, а k -мерную грань k -гранью. Здесь уместно напомнить лемму Барановского (лемма 1 в [9]).

Лемма 1. Пусть $\pm t_i, 1 \leq i \leq k$, суть все минимальные векторы некоторого класса смежности решетки L . Тогда в разбиении Делоне этой решетки есть центрально симметричная p -грань, где $p \leq k$, с $2k$ вершинами. Если центр этой грани взять за начало, то вершины есть концевые точки векторов $\pm t_i, 1 \leq i \leq k$.

Таблица 1. 36 минимальных векторов простых классов $E_6/2E_6$

класс	норма	типы минимальных векторов	n_c
$C(\{i\}, 0), C(\{i\}, 1),$ $C(\{ij\},$	2	$a_i, h - a_i,$ $h - (a_i + a_j), j \neq i^*$	12
$C(\emptyset, 1), C(\{ii^*\}, 0)$	2	$h, a_i - a_{i^*}$	4
$C(\{ijk\}, 1)$	2	$a_i + a_j + a_k - h$	8

Каждый вектор решетки E_6 имеет вид

$$v = \sum_{i \in N_6} x_i a_i = x_0 h,$$

где $x_i \in \mathbf{Z}$, $i \in N_6 \cup \{0\}$ — целые числа. Поэтому в качестве представителя класса смежности $v + 2E_6$ выбирается вектор

$$v_0 = \sum_{i \in N_6} z_i a_i + z_0 h,$$

где $z_i \in \{0, 1\}$, $z_i \equiv x_i \pmod{2}$ для всех $i \in N_6 \cup \{0\}$. Обозначим этот класс смежности через $C(S, \varepsilon)$, где $S = \{i \in N_6 : z_i = 1\} \subseteq N_6$ и $\varepsilon = z_0$. Таким образом, представитель класса $C(S, \varepsilon)$ имеет вид

$$v_0 = \sum_{i \in S} a_i + \varepsilon h.$$

Для $S \subseteq N_6$ положим $\bar{S} = N_6 - S$. Напомним, что $\sum_{i \in N_6} a_i = 3h$. Поэтому v_0 можно переписать в виде

$$v_0 = \sum_{i \in N_6} a_i - \sum_{i \in \bar{S}} a_i + \varepsilon h \equiv \sum_{i \in \bar{S}} a_i + (1 - \varepsilon)h \pmod{2E_6}.$$

Мы видим, что класс $C(S, \varepsilon)$ совпадает с классом $C(\bar{S}, 1 - \varepsilon)$. Поэтому можно рассматривать только классы $C(S, \varepsilon)$ для S мощности $|S| \leq 3$. Иногда для $|S| = 3$ более удобно рассматривать векторы из класса $C(\bar{S}, 1)$, чем из класса $C(S, 0)$.

Типы минимальных векторов 36 простых классов смежности $C(S, \varepsilon)$ в $E_6/2E_6$ приведены (с точностью до знака) в табл. 1. В ней n_c обозначает число классов с минимальным вектором соответствующего вида. Тройка индексов ijk для классов $C(\{ijk\}, 1)$ и пара индексов ij для классов $C(\{ij\}, 1)$ (и $C(\{ij\}, 0)$, см. ниже) не содержат специальных пар. Множество минимальных векторов решетки E_6 есть множество корней $\mathbf{E}_6$, которое удобно переобозначить через $\mathcal{R}$. Попарные скалярные произведения корней принимают значения $0, \pm 1$. Множество минимальных векторов решетки E_6 есть множество минимальных векторов всех простых классов смежности. Поэтому многогранник Вороного $P_V(E_6)$ решетки E_6 имеет 36 пар противоположных фасет.

Классы смежности $C(\{ii^*\}, 1)$, $C(\{ij\}, 0)$, $C(\{ii^*j\}, 0)$ непростые. Их минимальные векторы приведены с точностью до знака в табл. 2. Каждый непростой класс имеет (с точностью до знака) 5 взаимно ортогональных минимальных векторов нормы 4. Эти пять минимальных векторов порождают гиперплоскость в $\mathbf{R}^6$.

Решетка E_6 есть целочисленная решетка (см. [1], гл. 2, §2.4), то есть ее матрица Грама целочисленна. Отсюда следует, что E_6 есть подрешетка своей двойственной решетки

Таблица 2. Непростые классы E_6

класс	норма	векторы	n_c
$C(\{ii^*\}, 1)$	4	$h - (a_i + a_{i^*}), h \pm (a_i - a_{i^*})$ $(a_j - a_{j^*} \pm (a_k - a_{k^*}))$	3
$C(\{ij\}, 0), j \neq i, i^*$	4	$a_i \pm a_j, a_i + a_j - 2h,$ $a_i + a_j + 2a_k - 2h, a_i + a_j + 2a_{k^*} - 2h$	12
$C(\{ii^*j\}, 0) = C(\{j^*kk^*\}, 1)$	4	$a_i + a_{i^*} + a_j, a_i - a_{i^*} \pm a_j,$ $a_{j^*} \pm (a_{k^*} - a_k) - h$	12

E_6^* , решетка E_6^* есть центрировка решетки E_6^* . Но, в терминах статьи [10], эта центрировка недопустима и несвободна, так как минимальная норма $4/3$ решетки E_6^* меньше минимальной нормы 2 центрируемой решетки E_6 . Заметим, что обе решетки E_6 и E_6^* совершенны.

Рассмотрим форму f^* , двойственную форме f . Форма f^* определяется базисом, двойственным базису $\mathcal{A} = \{a_i : i \in N_6\}$. Обозначим двойственный базис через $\mathcal{B} = \{b_i : i \in N_6\}$. Двойственность означает, что $b_i^T a_i = 1, i \in N_6, b_i^T a_j = 0$ для $j \neq i$. Базис $\mathcal{B}$ имеет следующие параметры:

$$b_i^2 = \frac{2}{3}, \quad b_i^T b_{i^*} = -\frac{1}{3}, \quad b_i^T b_j = 0, \quad j \neq i, i^*. \quad (3)$$

Таким образом, с точностью до множителя $1/\sqrt{3}$ базис $\mathcal{B}$ состоит из 6 корней корневой системы $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$ и определяет форму

$$f^*(y) = \frac{2}{4} \sum_{i \in N_6} y_i^2 - \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 y_i y_{i^*},$$

соответствующую решетке $\frac{1}{\sqrt{3}}A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$.

Пусть $b = \sum_{i \in N_6} y_i b_i$ есть вектор решетки E_6^* . По определению двойственности, скалярные произведения $b^T a_i = y_i, i \in N_6, b^T h = \frac{1}{3} \sum_{i \in N_6} y_i$ должны быть целыми. Поэтому для всех $i \in N_6$ величины y_i должны быть такими целыми числами, что сумма $\sum_{i \in N_6} y_i$ делится на 3, то есть

$$\sum_{i \in N_6} y_i \equiv 0 \pmod{3}.$$

Так как каждый решеточный вектор E_6 имеет вид $\sum_{i \in N_6} x_i a_i + x_0 h$, где x_i для $i \in N_6 \cup \{0\}$ целые, это условие на координаты y_i необходимо и достаточно, чтобы вектор $\sum_{i \in N_6} y_i b_i$ принадлежал E_6^* .

Таким образом, получен неожиданный факт, что решетки E_6^* и $E_6 \subset E_6^*$ суть подрешетки решетки $\frac{1}{\sqrt{3}}A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$.

Все 63 класса смежности решетки E_6^* простые. При этом минимальные векторы 27 классов смежности являются абсолютно минимальными векторами решетки E_6^* и имеют норму $4/3$. Минимальные векторы остальных 36 классов имеют норму 2. Они являются корнями и принадлежат подрешетке E_6 . Они приведены в табл. 1, где их нужно выразить в базисе $\mathcal{B}$. Например,

$$a_i = 2b_i + b_{i^*}, \quad a_i - a_{i^*} = b_i - b_{i^*}, \quad i \in N_6, \quad h = \sum_{i \in N_6} b_i.$$

Таблица 3. Множество $\mathcal{M}$ минимальных векторов решетки E_6^*

тип вектора q	допустимые индексы	класс C_q	n_c
$b_i - b_j$	$1 \leq i < j \leq 6, j \neq i, i^*$	$C(\{i^*j^*\}, 0)$	12
$b(S) = b_i + b_{i^*} + b_j$	$S = \{ii^*j\}, j \neq i, i^*$	$C(\{ii^*j^*\})$	12
$b_i + b_{i^*} - (b_j + b_{j^*})$	$1 \leq i < j \leq 3$	$C(\{kk^*\}, 1)$	3

Обозначим $\mathcal{M}$ множество минимальных векторов решетки E_6^* , состоящее из 27 пар противоположных векторов. Существует следующее взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{M}$ и 27 непростыми классами смежности решетки E_6 : пара противоположных минимальных векторов $\pm q \in \mathcal{M}$ соответствует тому непростому классу решетки E_6 , минимальные векторы которого порождают гиперплоскость, ортогональную q . В табл. 3 минимальных векторов E_6^* указан класс смежности C_q в E_6 , соответствующий паре $\pm q \in \mathcal{M}$.

Согласно лемме 1, каждому классу C_q в разбиении Делоне решетки E_6 соответствует центрально симметричная фасета, являющаяся 5-мерным правильным октаэдром, который ниже обозначается $\beta_5(q)$.

Множество векторов $\mathcal{M}$ обладает следующим замечательным свойством: абсолютные значения попарных скалярных произведений непротивоположных векторов из $\mathcal{M}$ принимают лишь два значения. Именно, для $q, q' \in \mathcal{M}$, $q' \neq \pm q$, справедливо включение $|q^T q'| \in \{1/3, 2/3\}$. Более того, из каждой пары противоположных векторов $\pm q$ можно выбрать по одному так, что для любых двух векторов q, q' из выбранного множества $\mathcal{M}_0$, состоящего из 27 векторов, либо $q^T q = 1/3$, либо $q^T q' = -2/3$. Взяв концы $v(q)$ векторов $q \in \mathcal{M}_0$ в качестве вершин графа $\Gamma(\mathcal{M}_0)$, в котором две вершины $v(q)$ и $v(q')$ связаны ребром только, если $q^T q' = 1/3$, получим сильно регулярный граф Шлефли. Именно поэтому выпуклая оболочка 27 концевых точек векторов из $\mathcal{M}_0$ называется многогранником Шлефли P_{Schl} . Поэтому здесь и ниже

$$P_{\text{Schl}} = \text{conv}\{v(q) : q \in \mathcal{M}_0\}.$$

Очевидно, что дополнительное множество $\mathcal{M} - \mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_0$ обладает свойством множества $\mathcal{M}_0$.

3. Грани многогранников Вороного $P_V(E_6)$

Хорошо известно (см. [1, 2, 9]), что разбиение Делоне решетки E_6 состоит из конгруэнтных между собой многогранников Шлефли P_{Schl} . Этот многогранник, который Кокстер [11] обозначает 2_{21} , принадлежит серии полуправильных многогранников p_{21} размерности $p + 4$, где $0 \leq p \leq 4$. Звезда многогранников Делоне, имеющих начало координат в качестве вершины, содержит 54 многогранника Шлефли. Центры этих многогранников суть концы 54 векторов множества $\mathcal{M}$, являющихся вершинами многогранника Вороного.

Для любого объекта X в центрально симметричном многограннике $P_V(E_6)$, например, для вершины, ребра, фасеты или подмногогранника через $-X$ обозначается противоположный к X в $P_V(E_6)$ объект. Для подмногогранника $X \subseteq P_V(E_6)$ через $V(X)$ обозначается множество вершин многогранника X .

Напомним, что корневая решетка E_6 , как целочисленная решетка, есть подрешетка своей двойственной решетки E_6^* , то есть $E_6 \subset E_6^*$. Центр многогранника Делоне звезды

некоторой решетки есть вершина многогранника Вороного этой решетки. Поэтому многогранник Вороного $P_V(E_6)$ решетки E_6 есть выпуклая оболочка концевых точек $v(q)$ всех 54 минимальных векторов q двойственной решетки E_6^* то есть $P_V(E_6)$ есть контактный многогранник решетки E_6^* . С другой стороны, $P_V(E_6)$ есть дипло-многогранник Шлефли. Термин дипло-многогранник введен в [2]. Если P есть многогранник с центром в начале, то дипло- P есть выпуклая оболочка P и его противоположного многогранника $-P$. Если взять центр P_{Schl} за начало, то его 27 вершин задаются 27 векторами множества $\mathcal{M}$. В этом случае P_{Schl} есть подмногогранник $P_V(E_6)$, а выпуклая оболочка остальных 27 вершин есть $-P_{\text{Schl}}$. Поэтому $P_V(E_6)$ есть выпуклая оболочка объединения $P_{\text{Schl}} \cup (-P_{\text{Schl}})$.

Каждый вектор $q \in \mathcal{M}$ определяет разбиение решетки E_6 на 5-мерные слои, параллельные подрешетке $L = \{v \in E_6: q^T v = 0\}$. Эта подрешетка изоморфна 5-мерной корневой решетке D_5 . Это согласуется с тем, что E_6 есть слоистая решетка (в смысле [1]) со слоями D_5 , а разбиение Делоне решетки D_5 содержит ортаэдр. В терминологии русской школы E_6 получена из D_5 наложением слоев (см. [9], раздел 3.3).

Разбиение решетки E_6 , определяемое вектором q , порождает разбиение P_{Schl} на три слоя: вершина $v(q)$ и два многогранника Делоне решетки D_5 , именно, полукуб

$$h\gamma_5(q) = \text{conv}\{v(q'): q' \in \mathcal{M}_0, q^T q' = 1/3\}$$

и ортаэдр

$$\beta_5(q) = \text{conv}\{v(q'): q' \in \mathcal{M}_0, q^T q' = -2/3\}.$$

Пятимерный правильный ортаэдр $\beta_5(q)$ является фасетой P_{Schl} . Так как $q^2 = 4/3$, согласно определению (2) полупространства, многогранники P_{Schl} и $-P_{\text{Schl}}$ лежат соответственно в полупространствах $H(-q)$ и $H(q)$ для всех $q \in \mathcal{M}_0$.

Соответственно этому разбиению P_{Schl} многогранник Вороного $P_V(E_6)$ разбивается на 6 следующих слоев: две концевые вершины $v(\pm q) = \pm v(q)$ векторов $\pm q$, два ортаэдра $\beta_5(\pm q) = \pm \beta_5(q)$ и два полукуба $h\gamma_5(\pm q) = \pm h\gamma_5(q)$. В этом разбиении ортаэдры уже не являются фасетами, так как они лежат между вершинами $\pm v(q)$. Все вершины $P_V(E_6)$, кроме вершин $\pm v(q)$, принадлежат множествам вершин двух ортаэдров $\beta_5(\pm q)$ и двух полукубов $h\gamma_5(\pm q)$.

Все ребра многогранника P_{Schl} имеют одинаковую норму, равную 2. Каждое его ребро параллельно некоторому корню $r \in \mathcal{R}$. Эти ребра являются также и ребрами P_{Schl} , назовем эти ребра r -ребрами. Ребра $P_V(E_6)$ соединяют вершины P_{Schl} и $-P_{\text{Schl}}$. Они имеют норму $4/3$. Каждое такое ребро параллельно и равно по норме некоторому вектору $q \in \mathcal{M}$, они называются m -ребрами. Вершина $v(q)$ соединена с вершиной $v(q')$ r -ребром или m -ребром тогда и только тогда, когда $q^T q' = 1/3$ или $q^T q' = 2/3$ соответственно. Эти ребра параллельны векторам $q - q' \in \mathcal{R}$ или $q - q' \in \mathcal{M}$.

Каждый корень $r \in \mathcal{R}$ определяет еще одно разбиение решетки E_6 на 5-мерные слои, изоморфные 5-мерной корневой решетке A_5 . Это разбиение решетки порождает другое разбиение многогранника P_{Schl} на три слоя: две параллельные симплексные фасы $\alpha_5(r)$, ортогональные корню r , и средний слой, являющийся многогранником, реберный остов которого есть граф Джонсона $J(6, 2)$ на 15 вершинах (см. [6]). Оба разбиения P_{Schl} описаны в [2].

Итак, многогранник Шлефли P_{Schl} имеет фасы двух типов: правильные 5-мерные ортаэдры β_5 и правильные симплексы α_5 . Существует 36 пар симплексных фасет $F_r = \alpha_5(r)$ и $F'_r = \alpha_5(-r)$, соответствующих 36 парам противоположных корней $\pm r \in \mathcal{R}$. Фасы F_r этой пары суть сдвиг на корень r фасеты F'_r , то есть $F_r = F'_r + i$. Поэтому фасы F_r и

$F - R'$ лежат в опорных гиперплоскостях полупространств $H(r)$ и $H(-r)$ соответственно. Ребра каждой симплексной фасеты суть r -ребра. Так как все фасеты P_{Schl} определяются фасетными векторами $-q$, где $q \in \mathcal{M}_0$, и $r \in \mathcal{R}$, справедливы равенства

$$\pm P_{\text{Schl}} = \bigcap_{q \in \mathcal{M}} H(\mp q) \bigcap_{r \in \mathcal{R}} H(r), \quad (4)$$

где знаки $\pm$ и $\mp$ берутся одновременно либо верхние, либо нижние.

Нетрудно видеть, что каждая пара F_r, F'_r симплексных фасет многогранника P_{Schl} порождает в многограннике $\text{diplo} - P_{\text{Schl}}$ пару $F(r)$ и $-F(r) = F(-r)$ противоположных фасет типа $\text{diplo} - \alpha_5(r)$. Фасеты $F(r)$ и $F(r')$ имеют непустое пересечение только, если $r^T r' \in \{0, 1\}$. При этом $F(r) \cap F(r')$ есть 4-грань обеих фасет, если $r^T r' = 1$, и $F(r) \cap F(r')$ есть m -ребро, если $r^T r' = 0$.

Обозначим симплекс, противоположный в фасете $F(r)$ симплексу $\alpha_5(r)$, через $\alpha_5^*(r)$. Тогда

$$F(r) = \text{diplo} - \alpha_5(r) = \alpha_5 \cup \alpha_5^*(r).$$

Аналогично, пусть v, v^* есть пара противоположных в F вершин. Итак, $P_V(E_6)$ имеет 36 пар $F(r), -F(r)$ противоположных фасет типа $\text{diplo} - \alpha_5(r)$, определенных фасетными векторами $r \in \mathcal{R}$, и это суть все фасеты $P_{\text{Schl}}(E_6)$.

Многогранник типа $\text{diplo} - \alpha_5$ подробно описан Е. П. Барановским (см. [9], раздел 5.2). В $\text{diplo} - \alpha_5$ существует два типа ребер: $2 \cdot 15$ r -ребер, являющихся ребрами двух симплексов α_5 и α_5^* , и $6 \cdot 6 - 6 = 30$ m -ребер, соединяющих непротивоположные вершины разных симплексов α_5 и α_5^* . Противоположные в $\text{diplo} - \alpha_5$ вершины $v \in V(\alpha_5)$ и $v^* \in V(\alpha_5^*)$ не соединены ребром. По утверждению Е. П. Барановского, если ребра симплекса α_5 имеют норму p , то ребра второго типа имеют норму $2p/3$. В нашем случае p есть норма корней $r \in \mathcal{R}$, то есть $p = 2$. Поэтому вторая норма равна $4/3$. Все 30 m -ребер фасеты $F(r)$ разбиты на 15 пар параллельных ребер (u, v^*) и (v, u^*) , где $v, u \in V(\alpha_5)$. Здесь и ниже через (x, y) обозначается отрезок в P_{Schl} с концевыми вершинами x и y .

Каждый правильный симплекс α_{2k+1} нечетной размерности $2k + 1$ есть выпуклая оболочка двух правильных k -мерных симплексов S_1^k и S_2^k типа α_k , являющихся k -гранями симплекса α_{2k+1} . Центры c_1 и c_2 разделены отрезком (c_1, c_2) . На симплексы S_1^k и S_2^k натянуты два взаимно ортогональных аффинных k -мерных подпространства. Оба эти подпространства ортогональны отрезку (c_1, c_2) .

Двумерные грани S_1^2 и S_2^2 в α_5 суть треугольники Δ_1 и Δ_2^* . Центры c_1 и c_2^* треугольников Δ_1 и Δ_2^* в многограннике $\text{diplo} - \alpha_5 = \alpha_5 \cup \alpha_5^*$ совпадают, то есть $c_1 = c_2$. Так как на треугольники Δ_1 и Δ_2 натянуты взаимно ортогональные 2-плоскости, выпуклая оболочка вершин Δ_1 и Δ_2^* есть многогранник типа V_{22}^4 . Он является фасетой многогранника $\text{diplo} - \alpha_5$, и эта фасета противоположна другой его фасете, являющейся выпуклой оболочкой вершин противоположных треугольников Δ_1^* и Δ_2 . Все эти 4-мерные грани многогранника Вороного $P_V(E_6)$ конгруэнтны между собой. Многогранник V_{22}^4 принадлежит классу многогранников переделывания, которые подробно описаны в [12] (см. также [13]).

Предложение 1. Числа $n(G)$ k -граней G многогранника Вороного $P_V(E_6)$, где $0 \leq k \leq 6$, приведены в табл. 4. Для $0 \leq k \leq 6$ все k -грани $P_V(E_6)$ — симплексы. Все грани одной и той же размерности k конгруэнтны между собой, если $0 \leq k \leq 5, k \neq 1$.

Доказательство. Так как множество вершин $P_V(E_5)$ есть $\{v(q): a \in \mathcal{M}\}$, число вершин равно $|\mathcal{M}| = 54$.

Таблица 4. Грани G размерностей $\dim G = k$, $0 \leq k \leq 6$, многогранника Вороного $P_V(E_6)$

$\dim G$	тип G	$(k-1)$ -подграницы	$n(G)$
0	вершина		54
1	r -ребро	2 вершины	432
1	m -ребро	2 вершины	270
2	треугольник	1 r -ребро 2 m -ребра	2160
3	тетраэдр	4 треугольника	2160
4	V_{22}^4	9 тетраэдров	720
5	diplo $-\alpha_5$	$20V_{22}^4$	72
6	$P_V(E_6)$	72 diplo $-\alpha_5$	1

Зафиксируем вектор $q \in \mathcal{M}_0$ и определенное им разбиение $P_V(E_6)$ на слои. Вершина $v(q)$ в многограннике $P_V(E_6)$ соединена m -ребрами с 10 вершинами ортаэдра $\beta_5(-q)$ и r -ребрами с 16 вершинами полукуба $h\gamma_5(q)$. Поэтому $P_V(E_6)$ имеет $(1/2)(54 \cdot 10) = 270$ m -ребер, которые разбиты на 27 классов из 10 ребер, параллельных некоторому $q \in \mathcal{M}_0$, и $(1/2)(54 \cdot 16) = 432$ r -ребер, которые разбиты на 36 классов, каждый из которых содержит 12 ребер, параллельных некоторому корню $r \in \mathcal{R}$.

Любая пара непротивоположных вершин ортаэдра $\beta_5(-q)$ соединена r -ребром, которое вместе с вершиной $v(q)$ образует 2-грань. Поэтому вершина $v(q)$ принадлежит $\binom{10}{2} - 5 = 40$ двумерными гранями. В каждой из этих 2-граней вершина $v(q)$ инцидентна двум m -ребрам, и каждая 20-грань $P_V(E_6)$ определяет однозначно ту ее вершину в $P_V(E_6)$, которая инцидентна двум m -ребрам. Отсюда вытекает, что многогранник Вороного $P_V(E_6)$ имеет $50 \cdot 40 = 2160$ двумерных граней. Так как каждая 2-грань содержит одно r -ребро, а $P_V(E_6)$ имеет 432 r -ребра, каждое r ребро содержится в $2160/432 = 5$ двумерных гранях.

Если две вершины $v = v(q)$ и $v' = v(q')$ соединены r -ребром, то соответствующие ортаэдры $\beta_5(-q)$ и $\beta_5(-q')$ смежны четырехмерной симплексной гранью $\alpha_4(q, q') = \beta_5(-q) \cap \beta_5(-q')$, все 10 ребер которой суть r -ребра. Пять вершин симплекса $\alpha_4(q, q')$ вместе с r -ребром (v, v') образуют 5 двумерных граней, содержащих это ребро. Выпуклая оболочка вершин v, v' с каждой из 10 пар вершин u, u' симплекса $\alpha_4(q, q')$ (смежных r -ребром) есть 3-грань многогранника $P_V(E_6)$. Поэтому r -ребро (v, v') однозначно определяет 10 трехмерных граней $P_V(E_6)$. Так как 3-грань имеет два r -ребра, а $P_V(E_6)$ имеет 432 r -ребра, многогранник $P_V(E_6)$ имеет $(1/2)(10 \cdot 432) = 2160$ 3-граней.

Существует $\frac{1}{2}\binom{6}{3} = 10$ разбиений симплекса α_5 на два треугольника. Поэтому многогранник $F(r) = \text{diplo} - \alpha_5(r)$ имеет 10 пар противоположных фасет типа V_{22}^4 . Так как каждая из 72 фасет типа $\text{diplo} - \alpha_5$ многогранника $P_V(E_6)$ имеет 10 пар противоположных четырехмерных граней типа V_{22}^4 , а каждая грань типа V_{22}^4 принадлежит двум фасетам, многогранник Вороного $P_V(E_6)$ имеет $72 \cdot 10 = 720$ четырехмерных граней типа V_{22}^4 .

Очевидно, что число фасет равно $|\mathcal{R}| = 72$.

Заметим, что на вершинах $P_V(E_6)$ нет правильных треугольников с m -ребрами или r -ребрами, являющихся 2-гранями, то есть все такие треугольники лежат внутри $P_V(E_6)$.

Каждая 4-грань типа V_{22}^4 имеет 6 вершин и 15 ребер двух типов: 6 r -ребер (три ребра Δ_1 и три ребра Δ_2^*) и 9 m -ребер между вершинами различных треугольников Δ_1 и Δ_2^* . Каждый многогранник типа V_{22}^4 имеет $3 \cdot 6 = 18$ двумерных треугольных 2-граней и 9 симплициальных 3-граней. Поэтому 740 4-граней имеют $9 \cdot 720 = 6480$ 3-граней.

Многогранник $P_V(E_6)$ имеет 2160 3-граней, поэтому по каждой 3-грані смежны три 4-грани.

4. Многогранник Вороного $P_V(E_6)$

Вспомним двойственность разбиений n -пространства на многогранники Вороного и Делоне. Эта двойственность влечет ортогональность каждой k -грани одного разбиения $(n - k)$ -грани другого. Для решетки E_6 разбиение Делоне состоит только из многогранников Шлефли P_{Schl} . Ребра P_{Schl} параллельны корням корневой системы E_6 и являются фасетными векторами некоторого многогранника Вороного $P_V(E_6)$ разбиения Вороного.

Многогранник P_{Schl} имеет два типа фасет: ортаэдры β_5 и симплексы α_5 , фасетными векторами которых являются m -ребра и r -ребра многогранников Вороного соответственно. Двумерные грани P_{Schl} суть правильные треугольники, ребра которых параллельны и равны по величине корням E_6 . Каждая 2-грань Δ многогранника P_{Schl} ортогональна некоторой 4-грани G многогранника $P_V(E_6)$. Центры треугольника Δ и ортогональной ему грани G совпадают. Так как тип грани G есть V_{22}^4 , эта выпуклая оболочка есть многогранник V_{222}^6 , тип которого является единственным типом многогранников Делоне решетки E_6^* (см. [2, 9]).

Каждый многогранник Делоне P типа V_{222}^6 состоит из трех треугольников Δ_s , $s = 1, 2, 3$, двумерные плоскости которых взаимно ортогональны и пересекаются в центре P . Ребра треугольника Δ_s — это корни нормы 2, то есть они суть r -ребра. Поэтому эти три треугольника дают пространственное представление одной из прямых сумм $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$ двумерных корневых систем A_2 , содержащихся в корневой системе E_6 . Выпуклая оболочка вершин любых двух треугольников Δ_s в V_{222}^6 есть многогранник V_{22}^4 , четырехмерное пространство которого ортогонально двумерному пространству третьего треугольника Δ_s .

Итак, при переходе от решетки E_6 к ее двойственной решетке E_6^* центры 4-граней многогранника Вороного $P_V(E_6)$ становятся центрами многогранников Делоне решетки E_6^* , которые все имеют тип V_{222}^6 . Это согласуется с равенством числа 4-граней многогранника Вороного $P_V(E_6)$ и числа многогранников Делоне в звезде решетки E_6^* (оба числа равны 720, см. раздел 3 этой статьи, а также раздел 6.3 в [9]). Так как вершины любого многогранника Вороного суть центры многогранников Делоне звезды решетки этого многогранника, отсюда вытекает, что выпуклая оболочка центров 4-граней есть многогранник Вороного $P_V(E_6^*)$ решетки E_6^* .

Итак, $P_V(E_6^*)$ содержится в $P_V(E_6)$, что естественно, так как E_6 есть подрешетка E_6^* . Многогранник $P_V(E_6^*)$ имеет, кроме 72 фасетных векторов многогранника $P_V(E_6)$, являющихся корнями $r \in \mathcal{R}$, еще 54 фасетных вектора q , принадлежащих множеству $\mathcal{M}$. Эти векторы определяют фасеты $F^*(r)$ и $F^*(q)$ соответственно.

Выше было показано, что для всех $q \in \mathcal{M}_0$ опорная гиперплоскость полупространства $H(q)$, являющаяся опорной гиперплоскостью фасеты $F^*(q)$ многогранника Вороного $P_V(E_6^*)$, является также опорной гиперплоскостью фасеты $\beta_5(-q)$ многогранника $-P_{\text{Schl}}$. Напомним, что $P_V(E_6)$ есть выпуклая оболочка $P_{\text{Schl}} \cup (-P_{\text{Schl}})$, в которой вершина $v(q)$ многогранника P_{Schl} соединена m -ребрами с вершинами фасеты $\beta_5(-q)$ многогранника $-P_{\text{Schl}}$. Поэтому многогранник $P_V(E_6^*)$ получается из $P_V(E_6)$ отрезанием каждой вершины $v(q)$ многогранника опорной гиперплоскостью полупространства $H(q)$, которая проходит через все вершины $P_V(E_6)$, связанные m -ребрами с $v(q)$.

Предложение 2. *Справедливо равенство*

$$P_V(E_6^*) = P_{\text{Schl}} \cap (-P_{\text{Schl}}).$$

Доказательство. Так как $\mathcal{R} \cup \mathcal{M}$ есть множество фасетных векторов многогранника Вороного $P_V(E_6^*)$, справедливо равенство

$$P_V(E_6^*) = \bigcap_{r \in \mathcal{R}} H(r) \bigcap_{q \in \mathcal{M}_0} H(q) \cap H(-q).$$

Учитывая представления для P_{Schl} и $-P_{\text{Schl}}$ из (4), получаем искомый результат.

Представление $P_V(E_6^*)$ в виде пересечения многогранника Шлефли и ему противоположного полезно для описания его граней. Например, каждая вершина $P_V(E_6^*)$ есть пересечение 2-граней P_{Schl} и $-P_{\text{Schl}}$, которое есть центр обеих 2-граней.

Каждая 2-грань $\Delta(T)$ многогранника P_{Schl} есть выпуклая оболочка концов трех векторов подмножества $T \subset \mathcal{M}_0$ такого, что $p^T p' = 1/3$ для любых $p, p' \in T$. Нетрудно проверить, что центр 2-граней $\Delta(T)$ есть конец вектора $(1/3) \sum_{p \in T} p$. Обратно, всякая тройка T векторов $q \in \mathcal{M}_0$ с попарными скалярными произведениями, равными $1/3$, определяет как 2-грань $\Delta(T)$ многогранника P_{Schl} , так и вершину $v(T)$ многогранника $P_V(E_6^*)$. Заметим, что тройки $T \subset \mathcal{M}_0$ и $T' \subset -\mathcal{M}_0$ соответствуют одной вершине $vT = v(T')$ только, если $p^T p' = 2/3$ для всех $p \in T, p' \in T'$. Действительно, нетрудно проверить, что только в этом случае

$$\left(\sum_{p \in T} p - \sum_{p' \in T'} p' \right)^2 = 0$$

и $\text{conv}(\Delta(T) \cup \Delta(T'))$ есть 4-грань $P_V(E_6)$ типа V_{22}^4 .

В [2] выпуклая оболочка центров всех k -граней некоторого достаточно правильного многогранника P называется амбо-многогранником k -порядка. Обозначим такой многогранник $\text{ambo}_k P$. Многогранник P называется достаточно правильным, если его группа изометрии транзитивна на парах $[v, e]$, где $e = (v, u)$ есть ребро P , инцидентное вершине v . Например, P_{Schl} — достаточно правильный многогранник.

Пусть многогранник P имеет размерность n . Очевидно, что $\text{ambo}_n P$ есть точка и $\text{ambo}_0 P = P$. Многогранник $\text{ambo}_{n-1} P$ конгруэнтен двойственному к P многограннику. Так как размерность двойственного многогранника $\text{ambo}_{n-1} P$ равна размерности P , из вложений

$$\text{ambo}_{k+1} P \subset \text{ambo}_k P, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

вытекает, что размерность $\text{ambo}_k P$ равна n , если $k < n$.

Предложение 3. *Справедливы равенства*

$$P_V(E_6^*) = \text{ambo}_2 P_{\text{Schl}} = \text{ambo}_2 (-P_{\text{Schl}}).$$

Доказательство. Каждая вершина $P_V(E_6^*)$ есть центр 4-граней $P_V(E_6)$, являющейся выпуклой оболочкой пересекающихся в центре 2-граней P_{Schl} и $-P_{\text{Schl}}$. Иными словами, каждая вершина $P_V(E_6^*)$ есть центр некоторой 2-граней P_{Schl} . Так как число вершин $P_V(E_6^*)$, равное 720, есть и число 2-граней P_{Schl} (см. [2]), верно и обратное, что центр любой 2-граней P_{Schl} есть вершина $P_V(E_6^*)$. Это же справедливо и для $-P_{\text{Schl}}$.

Многогранник $\text{ambo}_k \alpha_n$ конгруэнтен сечению гиперплоскостью $\sum_{i=1}^n x_i = k+1$ единичного $(n+1)$ -мерного куба γ_{n+1} , имеющего вершину в начале 0. Поэтому граф

реберного остова многогранника $\text{ambo}_k \alpha_n$ есть граф Джонсона $J(n+1, k+1)$ (см. с. 114 в [6]). Такое $(k+1)$ -сечение одинаково с $(n-k)$ -сечением, поэтому

$$\text{ambo}_k \alpha_n \cong \text{ambo}_{n-(k+1)} \alpha_n,$$

где знак $\cong$ означает конгруэнтность. В частности, $\alpha_n = \text{ambo}_0 \alpha_n \cong \text{ambo}_{n-1} \alpha_n$, что соответствует тому, что симплекс α_n самодвойствен. Отсюда вытекают первые две конгруэнтности в (5) ниже, третья конгруэнтность легко проверяется:

$$\text{ambo}_1 \alpha_4 \cong \text{ambo}_2 \alpha_4, \quad \text{ambo}_2 \alpha_3 \cong \alpha_3 \quad \text{ambo}_1 \alpha_3 \cong \beta_3. \quad (5)$$

Так как β_n и γ_n — пара двойственных друг другу многогранников, справедливы равенства

$$\text{ambo}_{n-1} \gamma_n = \beta_n, \quad \text{ambo}_{n-1} \beta_n = \gamma.$$

Кроме того, $\text{ambo}_1 \beta_4$ есть правильный четырехмерный многоугольник с символом Шлефли $\{4, 4, 3\}$, иногда называемый 24-ячейкой (см. [8]). Используя свойства системы корней D_4 , равенство $\text{ambo}_1 \beta_4 = 24$ -ячейка легко проверяется. Оно приведено на с. 90 в [2]. Многогранник $\text{ambo}_1 \beta_4 = 24$ -ячейка есть многогранник Вороного 4-мерной корневой решетки D_4 . Все его 3-границы суть октаэдры β_3 .

Лемма 2. Если G есть k -грань многогранника P и $t \leq k-1$, то $\text{ambo}_t G$ есть k -грань многогранника $\text{ambo}_t P$.

Доказательство. Ясно, что любая t -грань P , пересекающаяся с гранью G по внутренней точке, полностью лежит в G . Поэтому в аффинном пространстве грани G , порожденном G , лежат центры только t -граней грани G . Так как для $t \leq k-1$ размерность $\text{ambo}_t G$ равна k , пространство многогранника $\text{ambo}_t G$ совпадает с пространством грани G . Отсюда вытекает, что $\text{ambo}_t G$ есть k -грань многогранника $\text{ambo}_t P$.

Фасета $\beta_5(q)$ многогранника P_{Schl} пересекается с 16 симплексными фасетами $\alpha_5(r)$ для r таких, что $(-q)^T r = 1$, и с 16 фасетами $\beta_5(r)$ для p таких, что $q^T p = 1/3$. Все эти пересечения суть 4-границы типа α_4 . Согласно лемме 2, $\text{ambo}_2 \beta_5$ и $\text{ambo}_2 \alpha_5$ являются фасетами $\text{ambo}_2 P_{\text{Schl}}$, а $\text{ambo}_2 \alpha_k$ являются k -гранями при $k = 3/4$. Нетрудно подсчитать, что многогранники $\text{ambo}_2 \alpha_5$ и $\text{ambo}_2 \beta_5$ имеют 20 и 80 вершин соответственно.

Но кроме граней вида $\text{ambo}_2 G$ многогранник P_{Schl} имеет грани вида $\text{ambo}_1 \alpha_n$ и $\text{ambo}_1 \beta_n$.

Если P есть достаточно правильный многогранник, то вторые вершины u всех ребер (v, u) , инцидентных v , лежат в некоторой гиперплоскости H . Пересечение $P \cap Y$ есть многогранник, обозначаемый $Et_v P$, $(k-1)$ -границ которого для $k \geq 1$ суть пересечения k -граней P , содержащих v , с гиперплоскостью H . Так как многогранники $Et_v P$ конгруэнтны между собой для всех v , индекс v можно опустить. Заметим, что

$$Et \alpha_n = \alpha_{n-1}, \quad Et \beta_n = \beta_{n-1}, \quad Et \gamma_n = \text{ambo}_1 \alpha_{n-1}, \quad Et P_{\text{Schl}} = h \gamma_5.$$

Напомним, что $P_V(E_6^*)$ получается отсечением вершин как P_{Schl} так и $-P_{\text{Schl}}$. Отсекающие гиперплоскости порождают фасеты усеченного многогранника. То, что при этом остается от старых фасет, описано ниже в лемме 3. Напомним также, что для $n = 3$

$$\text{ambo}_2 \alpha_3 \cong \alpha_3, \quad \text{ambo}_2 \beta_3 \cong \gamma_3.$$

Таблица 5. Грани размерностей $\dim G = k$, $0 \leq k \leq 6$, многогранника P_{Schl}

$\dim G$	0	1	2	3	4	5	5	6
тип G	вершина α_0	ребро α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	β_5	P_{Schl}
$n(G)$	27	216	720	1080	648	72	27	1

Лемма 3. Пусть достаточно правильный n -многогранник P имеет t вершин и все его 2-границ являются треугольниками. Пусть $n \geq 3$ и $t = 1, 2$. Многогранник $\text{ambo}_t P$ имеет t фасет, конгруэнтных многограннику $\text{ambo}_{t-1} EtP$.

Доказательство. Очевидно, что выпуклая оболочка Q центров t -граней P , имеющих общую вершину, есть фасета $\text{ambo}_t P$. Каждая из t -граней P , имеющих общую вершину v , опирается на $(t - 1)$ -грань многогранника EtP . Стереографическая проекция выпуклой оболочки Q из вершины v на плоскость H многогранника EtP есть многогранник $\text{ambo}_{t-1} EtP$. Поэтому многогранник Q конгруэнтен $\text{ambo}_{t-1} EtP$, а многогранник $\text{ambo}_t P$ имеет t фасет типа $\text{ambo}_{t-1} EtP$.

Грани G многогранника P_{Schl} и их числа описаны в табл. 5 (см. [2]).

Так как α_n и β_n имеют по $n + 1$ и $2n$ вершин и по $n + 1$ и 2^n фасет типа α_{n-1} , соответственно, из лемм 2 и 3 вытекают следующие утверждения.

Лемма 4. Пусть $n \geq 3$.

- (1) Многогранник $\text{ambo}_2 \alpha_n$ имеет $(n + 1)$ фасет: по $n + 1$ фасет типа $\text{ambo}_2 \alpha_{n-1}$ и типа $\text{ambo}_1 \alpha_{n-1}$.
- (2) Многогранник $\text{ambo}_2 \beta_n$ имеет 2^n фасет типа $\text{ambo}_2 \alpha_{n-1}$ и $2n$ фасет типа $\text{ambo}_1 \beta_{n-1}$.
- (3) Многогранник $\text{ambo}_2 P_{\text{Schl}}$ имеет 72 фасет типа $\text{ambo}_2 \alpha_5$ и 27 фасет типа $\text{ambo}_2 \beta_5$ и $\text{ambo}_1 h\gamma_5$.

Напомним, что $\text{ambo}_2 P_{\text{Schl}} = \text{ambo}_2(-P_{\text{Schl}})$. Поэтому фасеты типа $\text{ambo}_1 h\gamma_5$ многогранника $\text{ambo}_2 P_{\text{Schl}}$ суть фасеты типа $\text{ambo}_2 \beta_5$ многогранника $\text{ambo}_2 P_{-\text{Schl}}$. Отсюда вытекает равенство $\text{ambo}_1 h\gamma_5 = \text{ambo}_2 \beta_5$, которое можно проверить непосредственно. Например, $h\gamma_5$ и β_5 имеют по 80 ребер и 2-граней соответственно.

Предложение 4. Грани G многогранника Вороного $P_V(E_6^*)$ размерности k , $0 \leq k \leq 6$, и их число $n(G)$ приведены в табл. 6.

Доказательство. Воспользуемся двойственным разбиением, состоящим из многогранников Делоне единственного типа V_{222}^6 . Многогранник V_{222}^6 симплицален, то есть каждая его грань есть симплекс. Пусть P_D есть один из многогранников Делоне, центр которого есть вершина $P_V(E_6^*)$. Тогда каждая k -грань G_D многогранника P_D , имеющая начало 0 в качестве вершины, ортогональна $(n - k)$ -грани G_V многогранника $P_V(E_6^*)$, инцидентной той его вершине, которая есть центр P_D . Грань G_V есть пересечение $(n - k + 1)$ -граней, каждая из которых ортогональна некоторой $(k - 1)$ -грани k -грани G_D , содержащей начало. Так как грань G_d — симплекс, она имеет k таких $(k - 1)$ -граней с вершиной в начале. Поэтому $(n - k)$ -грань G_V содержится ровно в k гранях размерности $n - k + 1$. Так как все многогранники Делоне решетки E_6^* симплицальны, но не симплексы, только для $k > 0$ каждая k -грань G_v многогранника Вороного $P_V(E_6^*)$ содержится в $n - k$ гранях

Таблица 6. Грани G_k размерностей $\dim G_k = k$, $0 \leq k \leq 6$, многогранника Вороного $P_V(E_6^*)$

k	тип G_k	$t(G_{k-1}, G_k)$	$n(G_k)$
0	вершина α_0		720
1	ребро α_1	2 вершины α_0	6480
2	правильный треугольник α_2	3 ребра α_1	10800
3	тетраэдр α_3	4 треугольника α_2	2160
3	октаэдр β_3	8 треугольников α_2	4320
4	$\text{ambo}_1 \alpha_4 = \text{ambo}_2 \alpha_4$	$5\alpha_3$ и $5\beta_3$	1296
4	$\text{ambo}_1 \alpha_4 = P_V(D_4)$ =24-ячейка	24 β_3	270
5	$\text{ambo}_1 h\gamma_5 = \text{ambo}_2 \alpha_5$	12 $\text{ambo}_2 \alpha_4$	72
5	$\text{ambo}_2 \beta_5$	10 $\text{ambo}_1 \beta_4$ 32 $\text{ambo}_2 \alpha_4$	54
6	$P_V(E_6^*) = \text{ambo}_2 P_{\text{Schl}}$	73 $\text{ambo}_2 \alpha_5$ 54 $\text{ambo}_2 \beta_5$	1

размерности $k + 1$. Это свойство позволяет рекуррентно найти числа $n(G)$ граней типа G многогранника $P_V(E_6^*)$ по следующей формуле. Пусть $t(G_k, G_{k+1})$ означает число k -граней типа G_k в $(k + 1)$ -грани типа G_{k+1} . Тогда

$$n(G_k) = \frac{1}{n - k} \sum_{G_{k+1} \supset G_k} t(G_k, G_{k+1}) n(G_{k+1}), \quad (6)$$

где сумма берется по всем типам G_{k+1} граней размерности $k + 1$, имеющим k -грани типа G_k .

Начнем с фасет. Согласно п.3 леммы 4, многогранник $\text{ambo}_2 P_{\text{Schl}}$ имеет 72 фасеты типа $\text{ambo}_2 \alpha_5$ и 27 фасет типа $\text{ambo}_2 h\gamma_5 = \text{ambo}_2 \beta_5$.

По той же лемме $\text{ambo}_2 \alpha_5$ имеет по 6 фасет типа $\text{ambo}_1 \alpha_4$ и $\text{ambo}_2 \alpha_4$. Согласно (5) эти фасеты конгруэнтны, то есть $t(\text{ambo}_2 \alpha_4, \text{ambo}_2 \beta_r) = 32$. Отсюда и из формулы (6) для $k = n - 2$ получаем, что $P_V(E_6^*)$ имеет $n(\text{ambo}_2 \alpha_4) = \frac{1}{2}(12 \cdot 72 \cdot 32 \cdot 54) = 1296$ 4-граней типа $\text{ambo}_2 \alpha_4$ и $n(\text{ambo}_1 \beta_4) = (1/2)10 \cdot 54 = 270$ 4-граней типа $\text{ambo}_1 \beta_4$.

Лемма 4 утверждает, что $\text{ambo}_2 \alpha_4$ имеет по 5 фасет типа $\text{ambo}_1 \alpha_3$ и $\text{ambo}_2 \alpha_3$. Согласно (5), эти многогранники конгруэнтны β_3 и α_3 соответственно. Правильный 4-многогранник 24-ячейка имеет 24 фасеты типа β_3 . Таким образом,

$$t(\alpha_3, \text{ambo}_2 \alpha_4) = 5, \quad t(\beta_3, \text{ambo}_2 \alpha_4) = 5, \quad t(\beta_3, \text{ambo}_2 \beta_4) = 5.$$

Формула (6) дает

$$b(\alpha_3) = (1/4)(4 \cdot 2160 + 8 \cdot 4320) = 10800.$$

Аналогично для ребер α_1 справедливо равенство

$$n(\alpha_1) = (1/5)3 \cdot 10800 = 6480.$$

Многогранник P_{Schl} имеет 720 2-граней, каждая из которых есть правильный треугольник (см. [2]). Так как множество вершин $P_V(E_6)$ есть множество центров 2-граней P_{Schl} , число его вершин равно 720.

Табл. 6 дополняет и расшифровывает табл. 2 из [7].

Список литературы

1. Конвей Дж., Слоэн Н., *Упаковки шаров, решетки и группы*. Мир, Москва, 1990.
2. Conway J. H., Sloane N. J. A., *The cell structures of certain lattices*. Springer, Berlin, 1991.
3. Рышков С. С., Большакова Е. А., К теории коренных параллелездров. *Изв. РАН, сер. матем.* (2005) **69**, №6, 187–210.
4. Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии*. Наука, Москва, 1988.
5. Рид М., *Алгебраическая геометрия для всех*. Мир, Москва, 1991.
6. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A., *Distance-regular graphs*. Springer, Berlin, 1989.
7. Worley R. T., The Voronoi region of E_6^* . *J. Austral. Math. Soc.* (1987) **A43**, 268–276.
8. Coxeter H. S. M., *Regular polytopes*. Dover, New York, 1973.
9. Барановский Е. П., Разбиение евклидовых пространств на L -многогранники некоторых совершенных решеток. *Труды Математического института им. В. А. Стеклова* (1991) **196**, 27–46.
10. Рышков С. С., Барановский Е. П., Совершенные решетки как допустимые центрировки. В сб.: *Итоги науки. Проблемы геометрии*, **17**. ВИНТИ, Москва, 1985, с. 3–49.
11. Coxeter H. S. M., The polytope 2_{21} whose 27 vertices correspond to the lines on the general cubic surface. *Amer. J. Math.* (1940) **62**, 457–486.
12. Рышков С. С., Барановский Е. П., C -типы n -мерных решеток и пятимерные примитивные параллелездры (с приложением к теории покрытий). *Труды Математического института им. В. А. Стеклова*, (1976) **137**.
13. Ryshkov S. S., Baranovskii E. P., Repartitioing complexes in n -dimensional lattices (with full description for $n \leq 6$). In: *Voronoi's impact of modern science*, **2**. Inst. Math., Kyiv, 1998, pp. 115–124.

Статья поступила 21.11.2007.