Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Кожухов, В. А. Ярошевич, О потенциальной делимости матриц над дистрибутивными решетками, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 2, 148–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:46:14

О потенциальной делимости матриц над дистрибутивными решетками

© 2010 г. И. Б. Кожухов, В. А. Ярошевич

Рассматриваются матрицы произвольных размеров (в том числе бесконечных) над дистрибутивной решеткой L . Доказано, что если $L = 2^X$ — решетка подмножеств множества X , то потенциальная делимость матриц (слева или справа) друг на друга равносильна обычной делимости. В частности, в полугруппе квадратных матриц над решеткой 2^X отношение Грина $\mathcal{L}$ совпадает с обобщенным отношением Грина $\mathcal{L}^*$.

Пусть S — полугруппа и $a, b \in S$. Говорят, что элемент b делится на a слева, если $b = sa$ при некотором $s \in S^1$, где $S^1 = S \cup \{1\}$. Элемент b делится слева на a потенциально, если $b = ta$ в некоторой надполугруппе $T \supseteq S$, $t \in T$. Известно, что b делится на a слева потенциально в том и только в том случае, если выполняется условие

$$\forall x, y \in S^1 \quad (ax = ay \implies bx = by) \quad (1)$$

(см. гл.10 в [1] и [2]). Интересным является вопрос, какие полугруппы могут быть взяты в качестве надполугрупп T . В [1, 2] (см. также теоремы 7, 11 в [3]) в качестве полугруппы $T \supseteq S$ была взята полугруппа $\mathcal{T}(S^1)$ всех преобразований множества S^1 . Оказывается в качестве полугруппы T может быть взята любая полугруппа $T \supseteq S$, в которой отношение левой делимости совпадает с отношением потенциальной левой делимости (например, любая регулярная полугруппа). Далее мы изучаем отношение делимости друг на друга матриц над дистрибутивными решетками и отношение потенциальной делимости. При этом матрицы необязательно квадратные, а в случае, когда решетка имеет точные верхние грани любых подмножеств (не только конечных), можно рассматривать и бесконечные матрицы. Доказано, что для широкого класса дистрибутивных решеток L потенциальная делимость матриц над L равносильна обычной делимости над некоторой надрешеткой $\tilde{L} \supseteq L$. Если рассматриваются лишь матрицы конечных размеров, то достаточно дистрибутивности решетки L . Эти результаты мы применяем затем к исследованию отношений Грина $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ на полугруппах матриц над дистрибутивными решетками и обобщенных отношений Грина $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{R}^*$ на этих полугруппах. В частности, показано, что если L изоморфна решетке всех подмножеств некоторого множества, то в полугруппе квадратных матриц над L справедливо равенство $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Следовательно, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ в полугруппе бинарных отношений, так как эта полугруппа изоморфна полугруппе квадратных матриц одного размера над решеткой $L = \{0, 1\}$. Доказано, что необходимым условием равенства $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ в полугруппе матриц над L является наличие в решетке L относительных дополнений у каждого элемента.

Основные сведения из теории полугрупп можно найти в [1, 4], из теории решеток — в [5]. Матрицы над дистрибутивными решетками изучались во многих работах, обзор

результатов которых не является целью данной статьи. Упомянем лишь известную монографию [6], в которой обстоятельно изложена теория булевых матриц. Отношения Грина для матриц над булевыми алгебрами и их связь с рангами матриц изучались в [7].

Пусть S — полугруппа и $a, b \in S$. Отношение левой делимости будем обозначать через $\leq_l$, а потенциальной левой делимости — через $\leq_l^*$, то есть

$$b \leq_l a \iff b = sa \text{ при некотором } s \in S^1, \quad (2)$$

$$b \leq_l^* a \iff b = ta \text{ при некотором } t \in T, \quad (3)$$

где $T \supseteq S$ — некоторая надполугруппа полугруппы S .

Теорема 1. Пусть S — полугруппа, $T \supseteq S$ — такая ее надполугруппа, в которой отношения $\leq_l$ и $\leq_l^*$ совпадают. Тогда для любых $a, b \in S$

$$b \leq_l^* a \iff b \in T^1 a.$$

Доказательство. Импликация $\Leftarrow$ очевидна. Докажем импликацию $\Rightarrow$. Пусть $b \leq_l^* a$. Через S^1 будем обозначать полугруппу, полученную присоединением к S единицы, даже если в S уже была единица: $S^1 = S \cup \{1\}$, $1 \notin S$. Аналогично $T^1 = T \cup \{1\}$, $1 \notin T$. Кроме того, будем считать, что единицы в S^1 и T^1 совпадают. Обозначим через $\mathcal{PT}(X)$ полугруппу частичных отображений $X_1 \rightarrow X_2$, где $X_1, X_2 \subseteq X$, с умножением $(\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta(x))$. При этом $\text{dom}(\alpha\beta) = \text{dom } \beta \cap \beta^{-1}(\text{dom } \alpha)$, где dom обозначает область определения. К естественным вложениям $S \rightarrow T \rightarrow T^1$ добавим вложение $T^1 \rightarrow \mathcal{PT}(T^1)$ и $u \mapsto \varphi_u$, где $\text{dom } \varphi_u = S^1$ и $\varphi_u(x) = ux$ при $x \in S^1$. Так как $b \leq_l^* a$ в S , $(ax = ay \implies bx = by)$ для всех $x, y \in S^1$. Построим отображение $\psi: aS^1 \rightarrow bS^1$, полагая $\psi(ax) = bx$ при $x \in S^1$. Ввиду выполнимости условия (1) отображение ψ определено корректно и $\psi \in \mathcal{PT}(T^1)$. Ясно, что $\psi\varphi_a = \varphi_b$. отождествляя a с φ_a , b с φ_b , получим, что $b \in \mathcal{PT}(T^1)a$. Это означает, что $b \leq_l^* a$ в полугруппе T . Так как в полугруппе T по условию отношения $\leq_l$ и $\leq_l^*$ совпадают, справедливо включение $b \in T^1 a$.

Отношения Грина $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ на полугруппе S определяются следующим образом (см. гл. 2 в [4]):

$$a\mathcal{L}b \iff S^1 a = S^1 b,$$

$$a\mathcal{R}b \iff aS^1 = bS^1.$$

Очевидно, $\mathcal{L} = \leq_l \cap (\leq_l)^{-1}$. Обобщенные отношения Грина $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{R}^*$ — это потенциальные расширения отношений $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, а именно,

$$a\mathcal{L}^*b \text{ в } S \iff a\mathcal{L}b \text{ в некоторой надполугруппе } T \supseteq S,$$

$$a\mathcal{R}^*b \text{ в } S \iff a\mathcal{R}b \text{ в некоторой надполугруппе } T \supseteq S$$

(см. [8]). Таким образом,

$$a\mathcal{L}^*b \iff \forall x, y \in S^1 \quad (ax = ay \iff bx = by),$$

$$a\mathcal{R}^*b \iff \forall x, y \in S^1 \quad (xa = ya \iff xb = yb)$$

и $\mathcal{L}^* = \leq_l^* \cap (\leq_l^*)^{-1}$.

Заметим, что если a — регулярный элемент полугруппы S (то есть $a \in aSa$) и $b \leq_l^* a$, то $b \leq_l a$. Действительно, $a = asa$ при некотором $s \in S$, то есть $a \cdot 1 = a \cdot sa$, что влечет равенство $b \cdot 1 = b \cdot sa$, откуда $b \in Sa$. Из замечания следует, что в регулярной полугруппе отношения $\leq_l^*$ и $\leq_l$ совпадают, а значит, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$.

Теорема 2. Пусть S — подполугруппа полугруппы T и в полугруппе T имеет место равенство $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Тогда для элементов $a, b \in S$

$$(a, b) \in \mathcal{L}^* \iff (a, b) \in \mathcal{L} \text{ в } T.$$

Доказательство. Импликация $\Leftarrow$ очевидна. Докажем, что верна импликация $\Rightarrow$. Пусть $(a, b) \in \mathcal{L}^*$. Вложим T в регулярную полугруппу A (например, в качестве A можно взять полугруппу $\mathcal{T}(T^1)$). Так как $(a, b) \in \mathcal{L}^*$, справедливы соотношения $a \leqslant_l^* b$ и $b \leqslant_l^* a$ в S . По теореме 1 $a \leqslant_l b$ и $b \leqslant_l a$ в полугруппе A . Это означает, что $a \leqslant_l^* b$ и $b \leqslant_l^* a$ в полугруппе T , то есть $(a, b) \in \mathcal{L}^*$ в T . В полугруппе T по условию $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, поэтому $(a, b) \in \mathcal{L}$ в T .

Перейдем теперь к матрицам над дистрибутивными решетками. Мы будем рассматривать матрицы $\sigma = \|\sigma_{ij}\|_{i \in I, j \in J}$ над дистрибутивной решеткой L , то есть $\sigma_{ij} \in L$. Так как матрицы могут быть бесконечными, будем предполагать, что в решетке L любое подмножество $\{x_i \mid i \in I\}$ имеет точную верхнюю грань $\bigvee_{i \in I} x_i$ и выполнен закон бесконечной дистрибутивности

$$y \wedge \bigvee_i x_i = \bigvee_i (y \wedge x_i). \quad (4)$$

Наличие точной нижней грани бесконечного подмножества и выполнение другого закона бесконечной дистрибутивности (двойственного вышеприведенному), вообще говоря, не требуется.

Умножение матриц $\sigma = \|\sigma_{ij}\|_{i \in I, j \in J}$ и $\tau = \|\tau_{jk}\|_{j \in J, k \in K}$ осуществляется по правилу

$$\sigma \tau = \rho = \|\rho_{ik}\|_{i \in I, k \in K},$$

где

$$\rho_{ik} = \bigvee_{j \in J} (\sigma_{ij} \wedge \tau_{jk}).$$

Матрицы необязательно квадратные, то есть мощности множеств I, J, K могут быть различными. Матрица $I \times 1$ называется строкой, а матрица $1 \times I$ — столбцом. Операции на матрицах одного размера определяются покомпонентно: если $a = \|a_{ij}\|$, $b = \|b_{ij}\|$, то

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \|a_{ij} \wedge b_{ij}\|, \\ a \vee b &= \|a_{ij} \vee b_{ij}\|, \\ \lambda \wedge a &= \|\lambda \wedge a_{ij}\|, \quad \lambda \in L. \end{aligned}$$

Полагаем $a \leqslant b$, если $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ для любых $i \in I, j \in J$. Линейной комбинацией строк $a^{(\gamma)}$, $\gamma \in \Gamma$, называется строка $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\lambda^{(\gamma)} \wedge a^{(\gamma)})$, где $\lambda^{(\gamma)} \in L$ при $\gamma \in \Gamma$. Если $M = \{a^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ — множество строк, то множество всех линейных комбинаций этих строк называется линейной оболочкой множества M и обозначается $\text{Span } M$.

Лемма 1. Пусть $M = \{a^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ — множество строк $a^{(\gamma)} = \|a_i^{(\gamma)}\|_{i \in I}$ и $b = \|b_i\|_{i \in I}$ — строка того же размера. Положим

$$\mu^{(\gamma)} = \bigvee \{x \mid x \wedge a^{(\gamma)} \leqslant b\}. \quad (5)$$

Тогда

$$b \in \text{Span } M \iff b = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\mu^{(\gamma)} \wedge a^{(\gamma)}).$$

Доказательство. Докажем, что верна импликация $\Rightarrow$. Если $b \in \text{Span } M$, то

$$b = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\lambda^{(\gamma)} \wedge a^{(\gamma)})$$

при некоторых $\lambda^\gamma \in L$. Отсюда

$$b_i = \bigvee_{\gamma} (\lambda^{(\gamma)} \wedge a_i^{(\gamma)})$$

при всех $i \in I$. Из (1) получаем, что $\lambda^{(\gamma)} \leq \mu^{(\gamma)}$. Справедливы соотношения

$$b = \bigvee_{\gamma} (\lambda^{(\gamma)} \wedge a^{(\gamma)}) \leq \bigvee_{\gamma} (\mu^{(\gamma)} \wedge a^{(\gamma)}) \leq b.$$

Таким образом,

$$b = \bigvee_{\gamma} (\mu^{(\gamma)} \wedge a^{(\gamma)}).$$

Импликация $\Leftarrow$ очевидна.

Пусть σ и τ — $J \times K$ и $I \times K$ матрицы соответственно с элементами из L . Делимость слева τ на σ означает существование такой $I \times J$ матрицы ρ над L , что $\tau = \rho\sigma$. Из определения произведения матриц видно, что делимость τ на σ имеет место в том и только в том случае, когда каждая строка матрицы τ является линейной комбинацией строк матрицы σ (как в случае матриц над кольцом или полукольцом).

Лемма 2. Пусть σ и τ — $J \times K$ и $I \times K$ матрицы соответственно над дистрибутивной решеткой L , в которой выполнено тождество (4). Для $i \in I$, $j \in J$ положим

$$\mu_{ij} = \bigvee \{x \mid \forall k \in K x \wedge \sigma_{jk} \leq \tau_{ik}\}, \quad \mu = \|\mu_{ij}\|_{i \in I, j \in J}.$$

Если $\tau = \rho\sigma$ для некоторой матрицы ρ , то $\tau = \mu\sigma$.

Доказательство. По лемме 1

$$\tau_{ik} = \bigvee_{j \in J} (\mu_{ij} \wedge \sigma_{jk}),$$

откуда следует, что $\tau = \mu\sigma$.

Замечание 1. Матрица μ , построенная в лемме 2, является наибольшей из всех матриц ρ , удовлетворяющих равенству $\tau = \mu\sigma$, то есть

$$\forall \rho \quad (\tau = \rho\sigma \implies \mu \geq \rho).$$

Пусть L — дистрибутивная решетка с нулем, в которой выполнено условие (4), $b = \|b_i\|_{i \in I}$, $a^{(\gamma)} = \|a_i^{(\gamma)}\|_{i \in I}$, $\gamma \in \Gamma$, — строки над L . Рассмотрим следующее условие на строки $b, a^{(\gamma)}$: для всех ρ, ρ'

$$((\forall \gamma \quad a^{(\gamma)}\rho = a^{(\gamma)}\rho') \implies b\rho = b\rho'), \quad (6)$$

где $\rho = \|\rho_i\|_{i \in I}$ и $\rho' = \|\rho'_i\|_{i \in I}$ — столбцы.

Заметим, что если L — решетка с нулем, в которой существуют точные верхние грани любого подмножества, то в ней существуют и точные нижние грани любого подмножества, то есть L — полная решетка.

Предложение 1. Пусть L — полная дистрибутивная решетка, в которой выполнено тождество (4) и $b = \|b_i\|_{i \in I}$, $a^{(\gamma)} = \|a_i^{(\gamma)}\|_{i \in I}$, $\gamma \in \Gamma$, — строки с элементами из L . Тогда

(1) если $b \in \text{Span}\{a^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$, то выполняется условие (6);

(2) если выполнено условие (6), то

$$b \leq \bigvee \{a^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}. \quad (7)$$

Доказательство. Докажем п. 1. Пусть

$$b = \bigvee_{\gamma} (\lambda^{(\gamma)} \wedge a^{(\gamma)}), \quad a^{(\gamma)} \rho = a^{(\gamma)} \rho'$$

при всех $\gamma \in \Gamma$. Тогда

$$\begin{aligned} b\rho &= \bigvee_i (b_i \wedge \rho_i) = \bigvee_i \left(\bigvee_{\gamma} (\lambda^{(\gamma)} \wedge a_i^{(\gamma)}) \wedge \rho_i \right) = \bigvee_i \bigvee_{\gamma} (\lambda^{(\gamma)} \wedge a_i^{(\gamma)} \wedge \rho_i) \\ &= \bigvee_{\gamma} \bigvee_i (\lambda^{(\gamma)} \wedge a_i^{(\gamma)} \wedge \rho_i) = \bigvee_{\gamma} \left(\lambda^{(\gamma)} \wedge \bigvee_i (a_i^{(\gamma)} \wedge \rho_i) \right) \\ &= \bigvee_{\gamma} \left(\lambda^{(\gamma)} \wedge \bigvee_i (a_i^{(\gamma)} \wedge \rho'_i) \right) = b\rho', \end{aligned}$$

то есть выполнено условие (6).

Докажем п. 2. Пусть условие (7) не выполнено. Тогда

$$b_{i_0} \not\leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} a_{i_0}^{(\gamma)}$$

при некотором $i_0 \in I$. Положим

$$c_{i_0} = \bigvee_{\gamma} a_{i_0}^{(\gamma)}.$$

Очевидно, $b_{i_0} \wedge c_{i_0} < b_{i_0}$. Положим

$$\rho_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq i_0, \\ 1 & \text{при } i = i_0, \end{cases} \quad \rho'_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq i_0, \\ c_{i_0} & \text{при } i = i_0. \end{cases}$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} a^{(\gamma)} \rho &= a_{i_0}^{(\gamma)} \wedge \rho_{i_0} = a_{i_0}^{(\gamma)}, a^{(\gamma)} \rho' = a_{i_0}^{(\gamma)} \wedge \rho'_{i_0} = a_{i_0}^{(\gamma)} \wedge \bigvee_{\delta} a_{i_0}^{(\delta)} \\ &= a_{i_0}^{(\gamma)}, b\rho = b_{i_0} \wedge \rho_{i_0} = b_{i_0}, b\rho' = b_{i_0} \wedge \rho'_{i_0} = b_{i_0} \wedge c_{i_0} < b_{i_0}. \end{aligned}$$

Так как $b\rho \neq b\rho'$, условие (6) не выполнено.

В общем случае условие (6) не гарантирует, что $b \in \text{Span}\{a^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$. Приведем соответствующий пример.

Пример 1. Пусть $L = \{0, p, 1 \mid 0 < p < 1\}$ — трехэлементная цепь, $b = (1, 0)$, $a^{(1)} = (p, 0)$, $a^{(2)} = (1, p)$. Нетрудно проверить, что для этих строк выполнено условие (6). Однако строка b не является линейной комбинацией строк $a^{(1)}$, $a^{(2)}$. Проверим это. По лемме 1, если $b \in \text{Span}(a^{(1)}, a^{(2)})$, то

$$b = (\mu^{(1)} \wedge a^{(1)}) \vee (\mu^{(2)} \wedge a^{(2)}),$$

где

$$\mu^{(1)} = \bigvee \{x \mid x \wedge p \leq 1, x \wedge 0 \leq 0\}, \quad \mu^{(2)} = \bigvee \{y \mid y \wedge 1 \leq 1, y \wedge p \leq 0\}.$$

Ясно, что $\mu^{(1)} = 1$, $\mu^{(2)} = 0$, но

$$(\mu^{(1)} \wedge a^{(1)}) \vee (\mu^{(2)} \wedge a^{(2)}) = (1 \wedge (p, 0)) \vee (0 \wedge (1, p)) = (p, 0) \neq b.$$

Хотя b не является линейной комбинацией строк $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ с коэффициентами из L , но решетку L можно расширить до решетки $\tilde{L}$ так, что строка b будет являться линейной комбинацией строк с коэффициентами из $\tilde{L}$. Действительно, пусть

$$\tilde{L} = \{0, p, q, 1 \mid 0 < p < 1, 0 < q < 1\}.$$

Очевидно, q является дополнением в $\tilde{L}$ элемента p : $p \wedge q = 0$, $p \vee q = 1$. Так как $(1, 0) = (1 \wedge (p, 0)) \vee (q \wedge (1, p))$, справедливо включение $b \in \text{Span}_{\tilde{L}}(a^{(1)}, a^{(2)})$.

Построенный выше пример инициирует введение следующего определения. Пусть $b = \|b_i\|_{i \in I}$ и $a^{(\gamma)} = \|a_i^{(\gamma)}\|_{i \in I}$, $\gamma \in \Gamma$, — строки с элементами из L . Будем говорить, что строка b является линейной комбинацией строк $a^{(\gamma)}$, $\gamma \in \Gamma$, в потенциальном смысле, если существует такая надрешетка $\tilde{L} \supseteq L$, что

$$b = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\xi^{(\gamma)} \wedge a^{(\gamma)})$$

для некоторых $\xi^{(\gamma)} \in \tilde{L}$. Часть 1 предложения 1 может быть усилена. А именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Если строка $b = \|b_i\|_{i \in I}$ является линейной комбинацией строк $a^{(\gamma)} = \|a_i^{(\gamma)}\|_{i \in I}$ в потенциальном смысле, то для этих строк выполнено условие (6).

Доказательство не отличается от доказательства утверждения 1 предложения 1.

Интересен вопрос о возможности обращения предложения 2, а именно, верно ли, что из условия (6) следует, что строка b является линейной комбинацией в потенциальном смысле строк $a^{(\gamma)}$, $\gamma \in \Gamma$. Мы не знаем ответа на этот вопрос в общем случае. Ниже будет доказано, что ответ положителен для решеток L , имеющих полное вложение в решетку 2^X всех подмножеств какого-либо множества X (под полным вложением здесь мы будем понимать вложение, сохраняющее решеточные пересечения конечных подмножеств и объединения произвольных подмножеств). Если решетка L изоморфна решетке всех подмножеств множества X , то справедливо более сильное утверждение: условие (6) выполняется тогда и только тогда, когда b является линейной комбинацией (в обычном, а не только в потенциальном смысле) строк $a^{(\gamma)}$.

Возвращаясь к примеру 1, покажем, что он на самом деле имеет весьма общий характер. Элемент p в этом примере не имел дополнения. Покажем, что необходимым условием

эквивалентности условия (6) и условия $b \in \text{Span}\{a^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ является наличие в решетке L относительных дополнений.

Напомним, что решетка L называется решеткой с относительными дополнениями, если для любого интервала $[x, y]$ этой решетки для каждого элемента $p \in [x, y]$ существует такое $q \in [x, y]$, что $p \wedge q = x$, $p \vee q = y$.

Пусть L — дистрибутивная решетка, в которой существуют точные верхние грани любых подмножеств и выполнено условие (4). Будем говорить, что решетка L обладает свойством (A), если для любых строк $b, a^{(\gamma)}$, $\gamma \in \Gamma$, условие (6) влечет справедливость включения $b \in \text{Span}\{a^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Предложение 3. Если решетка L обладает свойством (A), то L — решетка с относительными дополнениями.

Доказательство. Пусть $x < y$ и $x \leq p \leq y$. Положим $a^{(1)} = (p, x)$, $a^{(2)} = (y, p)$, $b = (y, x)$. Проверим, что

$$(a^{(1)}\rho = a^{(1)}\rho' \ \& \ a^{(2)}\rho = a^{(2)}\rho') \implies b\rho = b\rho'.$$

Вложим решетку L в какую-нибудь дистрибутивную решетку $\tilde{L}$ с относительными дополнениями, например, в решетку 2^X (см. теорему 1 в разделе 4 гл. 2 в [5]). Пусть q — дополнение элемента p в интервале $[x, y]$ решетки $\tilde{L}$. Нетрудно проверить, что

$$(y, x) = (y \wedge (p, x)) \vee (q \wedge (y, p)),$$

поэтому строка b является потенциальной линейной комбинацией строк $a^{(1)}$, $a^{(2)}$. Из предложения 2 следует, что для этих строк выполнено условие (6). Решетка L обладает свойством (A), поэтому

$$(y, x) = (\xi \wedge (p, x)) \vee (\eta \wedge (y, p))$$

для некоторых $\xi, \eta \in L$.

Отсюда получаем, что

$$y = (\xi \wedge p) \vee (\eta \wedge y), \quad x = (\xi \wedge x) \vee (\eta \wedge p).$$

Положив $\xi' = \xi \wedge y$, $\eta' = \eta \wedge y$, получим, что

$$y = (\xi' \wedge p) \vee (\eta' \wedge y), \quad x = (\xi' \wedge x) \vee (\eta' \wedge p).$$

Далее положим $\xi'' = \xi' \vee x$, $\eta'' = \eta' \vee x$. Тогда

$$y = (\xi'' \wedge p) \vee (\eta'' \wedge y), \quad x = (\xi'' \wedge x) \vee (\eta'' \wedge p).$$

Очевидно, $\xi'', \eta'' \in [x, y]$. Поэтому

$$y = (\xi'' \wedge p) \vee \eta'', \quad x = x \vee (\eta'' \wedge p).$$

Отсюда получаем, что $p \vee \eta'' \geq (\xi'' \wedge p) \vee \eta'' = y$, поэтому $p \vee \eta'' = y$. Кроме того, $\eta'' \wedge p \leq x$, поэтому $p \wedge \eta'' = x$. Следовательно, элемент $\eta'' \in L$ является дополнением элемента p в интервале $[x, y]$ решетки L .

Следствие 1. Конечная дистрибутивная решетка L обладает свойством (A) в том и только в том случае, если L изоморфна решетке всех подмножеств некоторого множества.

Лемма 3. Если решетки L_v , $v \in N$, с нулем обладают свойством (A), то их прямое произведение

$$L = \prod_{v \in N} L_v$$

также обладает свойством (A).

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из того факта, что операции в решетке $\prod_{v \in N} L_v$ осуществляются покомпонентно. Действительно, пусть строки $a^{(\gamma)}$, $\gamma \in \Gamma$, и b с элементами из L таковы, что $(\forall \gamma a^\gamma \rho = a^\gamma \rho') \implies b\rho = b\rho'$ для любых столбцов ρ и ρ' . Зафиксируем $v_0 \in N$. Пусть δ, δ' — столбцы с элементами из L_{v_0} такие, что $a_{v_0}^{(\gamma)} \delta = a_{v_0}^{(\gamma)} \delta'$ для всех γ . Положим

$$\rho_v = \begin{cases} \delta, & \text{если } v = v_0, \\ 0, & \text{если } v \neq v_0, \end{cases} \quad \rho'_v = \begin{cases} \delta', & \text{если } v = v_0, \\ 0, & \text{если } v \neq v_0. \end{cases}$$

Тогда $a^{(\gamma)} \rho = a^{(\gamma)} \rho'$. Отсюда следует, что $b\rho = b\rho'$. Это влечет равенство $b_{v_0} \delta = b_{v_0} \delta'$. Решетка L_{v_0} обладает свойством (A), поэтому

$$b_{v_0} = \bigvee_{\gamma} (\lambda_{v_0}^{(\gamma)} \wedge a_{v_0}^{(\gamma)})$$

при некоторых $\lambda_{v_0}^{(\gamma)} \in L_{v_0}$. Составим из коэффициентов $\lambda_{v_0}^{(\gamma)}$, $v_0 \in N$, элемент $\lambda^{(\gamma)} \in L$. Тогда получим, что

$$b = \bigvee_{\gamma} (\lambda^{(\gamma)} \wedge a^{(\gamma)}).$$

Таким образом, L обладает свойством (A).

Лемма 4. Двухэлементная решетка $L = \{0, 1\}$ обладает свойством (A).

Доказательство. Предположим, что строки $b = \|b_i\|_{i \in I}$ и $a^{(\gamma)} = \|a_i^{(\gamma)}\|_{i \in I}$, $\gamma \in \Gamma$, из 0 и 1 удовлетворяют условию (6). Надо доказать, что $b \in \text{Span}\{a^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$. Лемма будет доказана, если мы покажем, что $b = \bigvee \{a^{(\gamma)} \mid a^{(\gamma)} \leq b\}$. Предположим обратное, что $b \neq \bigvee \{a^{(\gamma)} \mid a^{(\gamma)} \leq b\}$. Тогда найдется $i_0 \in I$ такое, что $\bigvee \{a_{i_0}^{(\gamma)} \mid a^{(\gamma)} \leq b\} < b_{i_0}$. Это означает, что $b_{i_0} = 1$, а $\bigvee \{a_{i_0}^{(\gamma)} \mid a^{(\gamma)} \leq b\} = 0$. Положим $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma \mid a^{(\gamma)} \leq b\}$, $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$. Очевидно, что $a_{i_0}^{(\gamma)} = 0$ при $\gamma \in \Gamma_1$. Положим $\rho_i = 1 - b_i$ при всех $i \in I$,

$$\rho'_i = \begin{cases} \rho_i & \text{при } i \neq i_0, \\ 1 & \text{при } i = i_0. \end{cases}$$

Проверим, что $a^{(\gamma)} \rho = a^{(\gamma)} \rho'$. Пусть вначале $\gamma \in \Gamma_1$. Тогда $a^{(\gamma)} \leq b$ и, следовательно, $a^{(\gamma)} \rho \leq b\rho = \bigvee_i b_i(1 - b_i) = 0$. Кроме того, $a^{(\gamma)} \rho' = \bigvee_i a_i^{(\gamma)} \rho_i \vee a_{i_0}^{(\gamma)} \rho_{i_0} = 0 \vee 0 = 0$. Пусть теперь $\gamma \in \Gamma_2$. Тогда $a^{(\gamma)} \not\leq b$, поэтому найдется такое $i \in I$, что $a_i^{(\gamma)} = 1$, $b_i = 0$. Справедливы соотношения $a^{(\gamma)} \rho \geq a_i^{(\gamma)} \rho_i = 1$, $a^{(\gamma)} \rho' \geq a^{(\gamma)} \rho = 1$. Следовательно, $a^{(\gamma)} \rho = a^{(\gamma)} \rho' = 1$. Итак, $a^{(\gamma)} \rho = a^{(\gamma)} \rho'$ при всех $\gamma \in \Gamma$. Вместе с тем справедливы равенства $b\rho = \bigvee_i b_i(1 - b_i) = 0$, $b\rho' \geq b_{i_0} \rho'_{i_0} = 1$, то есть $b\rho \neq b\rho'$. Мы видим, что условие (6) не выполнено.

Предложение 4. Решетка 2^X всех подмножеств множества X обладает свойством (A).

Доказательство. Хорошо известно, что решетка 2^X является прямым произведением $|X|$ решеток $\{0, 1\}$. Поэтому предложение следует из лемм 3, 4.

Вернемся теперь к матрицам над дистрибутивными решетками. Как и ранее, мы будем предполагать решетки дистрибутивными, имеющими супремум любых подмножеств и удовлетворяющими условию (4). Пусть $\sigma = \|\sigma_{kj}\|_{k \in K, j \in J}$, и $\tau = \|\tau_{ij}\|_{i \in I, j \in J}$, — матрицы над дистрибутивной решеткой L , которая удовлетворяет вышеприведенным требованиям. Будем говорить, что τ делится (слева) на σ , и писать $\tau \leq_l \sigma$, если существует такая $I \times K$ матрица μ над L , что $\tau = \mu\sigma$.

Теорема 3. Пусть L — решетка всех подмножеств некоторого множества X , σ и τ — $K \times J$ и $I \times J$ матрицы над L . Тогда $\tau \leq_l \sigma$ в том и только в том случае, если

$$\forall \rho, \rho' \quad (\sigma\rho = \sigma\rho' \implies \tau\rho = \tau\rho'), \quad (8)$$

где $\rho = \|\rho_j\|_{j \in J}$ и $\rho' = \|\rho'_j\|_{j \in J}$ — столбцы.

Доказательство. Если $\tau = \mu\sigma$, то условие (8), очевидно, выполняется. Обратно, пусть выполнено (8). Пусть $b = \|\tau_{ij}\|_{j \in J}$ — i -я строка матрицы τ , $a^{(k)} = \|\sigma_{kj}\|_{j \in J}$, $k \in K$, — строки матрицы σ . Из (8) следует, что $(\forall k a^{(k)}\rho = a^{(k)}\rho') \implies b\rho = b\rho'$. По предложению 4, $b \in \text{Span}\{a^{(k)} \mid k \in K\}$. Все строки матрицы τ линейно выражаются через строки матрицы σ , поэтому $\tau = \mu\sigma$.

Обозначим через $B_I(L)$ множество квадратных $I \times I$ матриц над полной дистрибутивной решеткой L . Очевидно, что $B_I(L)$ — полугруппа.

Предложение 5. Если L — решетка всех подмножеств некоторого множества X , а I — произвольное множество, то в полугруппе $B_I(L)$ имеют место равенства $\leq_l^* = \leq_l$, $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать равенство $\leq_l^* = \leq_l$. Для этого достаточно установить, что $\leq_l^* \subseteq \leq_l$. Пусть $\sigma, \tau \in B_I(L)$ таковы, что $\tau \leq_l^* \sigma$. Тогда $\sigma\beta = \sigma\beta' \implies \tau\beta = \tau\beta'$ для любых $\beta, \beta' \in B_I(L)$. Отсюда $\sigma\rho = \sigma\rho' \implies \tau\rho = \tau\rho'$ для любых столбцов ρ, ρ' , и (8) выполнено. Из теоремы 3 следует, что $\tau \leq_l \sigma$.

Рассмотрим следующее условие (B) на решетку L : L — полная дистрибутивная решетка, имеющая полное вложение $L \rightarrow \tilde{L}$ в решетку $\tilde{L}$ всех подмножеств некоторого множества X , при котором $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$; будем отождествлять решетку L с ее образом при этом вложении, то есть считать, что $L \subseteq \tilde{L}$.

Теорема 4. Пусть L — решетка, удовлетворяющая условию (B), I — произвольное множество, $B_I(L)$ — полугруппа $I \times I$ матриц над L и $\sigma, \tau \in B_I(L)$. Тогда эквивалентны следующие условия:

- (i) $\sigma\rho = \sigma\rho' \implies \tau\rho = \tau\rho'$ для любых столбцов ρ, ρ' размера $I \times 1$;
- (ii) $\sigma\beta = \sigma\beta' \implies \tau\beta = \tau\beta'$ для любых матриц $\beta, \beta' \in B_I(L)$;
- (iii) $\tau = \mu\sigma$ для некоторой матрицы $\mu \in B_I(\tilde{L})$.

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из определения матричного умножения. Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) очевидна. Докажем эквивалентность (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Пусть выполнено (ii). Тогда $\tau \leqslant_l^* \sigma$ в полугруппе $B_I(L)$. Так как $B_I(L)$ — подполугруппа полугруппы $B_I(\tilde{L})$, а в полугруппе $B_I(\tilde{L})$ ввиду предложения 5 $\leqslant_l^* = \leqslant_l$, по теореме 1 $\tau = \mu\sigma$ для некоторой матрицы $\mu \in B_I(\tilde{L})$.

Предложение 6. Пусть L — удовлетворяющая условию (B) решетка, $b = \|b_j\|_{j \in J}$ и $a^{(k)} = \|a_j^{(k)}\|_{j \in J}$, $k \in K$, — строки с элементами из L . Тогда эквивалентны следующие условия:

- (i) $(\forall k a^{(k)} \rho = a^{(k)} \rho') \implies b\rho = b\rho'$ для любых столбцов ρ, ρ' размера $J \times 1$;
- (ii) $b \in \text{Span}\{a^{(k)} \mid k \in K\}$, если строки $a^{(k)}$ ($k \in K$) и b рассматривать как строки с элементами из $\tilde{L}$.

Доказательство. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна. Докажем импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii). Рассмотрим матрицу $\sigma = \|a_j^{(k)}\|_{k \in K, j \in J}$. Если $|K| < |J|$, то добавим к матрице σ нулевые строки так, чтобы получилась квадратная матрица $\hat{\sigma}$; если $|K| > |J|$, то удлиним строки матрицы σ , добавив в эти строки справа нулевые элементы для получения квадратной матрицы $\hat{\sigma}$; если $|K| = |J|$, то полагаем $\hat{\sigma} = \sigma$. Далее, матрица $\hat{\tau}$ — это матрица, у которой все строки равны b , если $|K| \leqslant |J|$, и все строки равны удлиненной строке b , если $|K| > |J|$. Мы получили матрицы $\hat{\sigma}, \hat{\tau} \in B_M(L)$, где M равно K или J .

Пусть выполнено условие (i). Тогда $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}\beta' \implies \hat{\tau}\beta = \hat{\tau}\beta'$ при всех $\beta, \beta' \in B_M(L)$. Используя теорему 4, получаем, что $\hat{\tau} = \hat{\mu}\hat{\sigma}$ для некоторой матрицы $\hat{\mu} \in B_M(\tilde{L})$. Отсюда следует, что $b \in \text{Span}\{a^{(k)} \mid k \in K\}$ над решеткой $\tilde{L}$.

Теорема 5. Пусть L — решетка, удовлетворяющая условию (B), σ и $\tau = K \times J$ и $I \times J$ матрицы над L . Тогда эквивалентны следующие условия:

- (i) $\sigma\rho = \sigma\rho' \implies \tau\rho = \tau\rho'$ для любых столбцов ρ, ρ' размера $J \times 1$ над L ;
- (ii) $\tau = \mu\sigma$ для некоторой $K \times I$ матрицы μ над решеткой $\tilde{L}$.

Доказательство. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна. Докажем обратную импликацию. Пусть выполнено условие (i). Тогда по предложению 6 каждая строка матрицы τ является линейной комбинацией строк матрицы σ с коэффициентами из решетки $\tilde{L}$. Следовательно, $\tau = \mu\sigma$ для некоторой матрицы μ над $\tilde{L}$.

Разберем теперь подробно случай матриц конечного размера над дистрибутивной решеткой L . Теперь никаких требований на решетку L , кроме дистрибутивности, не налагается.

Пусть L — дистрибутивная решетка, $b = (b_1, \dots, b_n)$ и $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, m$, — строки с элементами из L . Рассмотрим следующее условие на эти строки, являющееся частным случаем условия (6): для всех столбцов $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\rho' = (\rho'_1, \dots, \rho'_n)$ с элементами из L

$$(\forall i a^{(i)} \rho = a^{(i)} \rho') \implies b\rho = b\rho'. \quad (9)$$

Предложение 7. Если условие (9) при некотором $n \geqslant 2$ влечет условие $b \in \text{Span}(a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$ для всех строк длины n , то L — решетка с относительными дополнениями. Обратно, если L — решетка с относительными дополнениями, то для любого $n \geqslant 1$ и любых строк $b, a^{(i)}, \dots, a^{(m)}$ длины n условие (9) влечет условие $b \in \text{Span}(a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$.

Доказательство. Первая часть предложения доказывается так же, как предложение 3. Докажем вторую часть. Пусть $b, a^{(1)}, \dots, a^{(m)}$ — строки, удовлетворяющие условию (9). Обозначим через L_0 решетку, порожденную всеми элементами строк $b, a^{(1)}, \dots, a^{(m)}$. Тогда L_0 — конечная решетка. Пусть θ — наименьший, а ω — наибольший элемент решетки L_0 . Обозначим через L_1 решетку, порожденную элементами решетки L_0 и их дополнениями в интервале $[\theta, \omega]$. Тогда L_1 — конечная булева алгебра, поэтому L_1 изоморфна решетке всех подмножеств конечного множества. Так как условие (9) выполняется для всех столбцов с элементами из L , оно выполняется и для столбцов с элементами из L_1 . Теперь из предложения 4 следует, что $b \in \text{Span}(a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$.

Замечание 2. Так как условие $b \in \text{Span}(a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$ влечет условие (9) для любой решетки, в формулировке предложения 7 слово влечет можно заменить словом эквивалентно.

Предложение 8. Пусть L — произвольная дистрибутивная решетка, σ и τ — $p \times n$ и $m \times n$ матрицы над L . Тогда эквивалентны следующие условия:

- (i) $\sigma\rho = \sigma\rho' \implies \tau\rho = \tau\rho'$ для любых столбцов длины n над L ;
- (ii) $\sigma\beta = \sigma\beta' \implies \tau\beta = \tau\beta'$ для любых матриц $n \times t$ над L ;
- (iii) $\tau = \mu\sigma$ для некоторой $m \times p$ матрицы с элементами из некоторой надрешетки $\tilde{L} \supseteq L$.

Доказательство. Эквивалентность (i) $\iff$ (ii) следует из определения матричного умножения. Импликация (iii) $\implies$ (i) очевидна. Докажем импликацию (i) $\implies$ (iii). Вложим решетку L в какую-нибудь булеву алгебру $\tilde{L}$ (например, в решетку всех подмножеств множества). Обозначим через L_1 булеву алгебру, порожденную в $\tilde{L}$ всеми элементами матриц σ и τ . Очевидно, условие (i) будет выполняться для любых столбцов ρ, ρ' с элементами из L_1 . Так как L_1 — конечная булева алгебра, она изоморфна решетке всех подмножеств конечного множества. В силу теоремы 3 тогда $\tau = \mu\sigma$ для некоторой $m \times p$ матрицы над L_1 . Элементы матрицы μ принадлежат $L_1 \subseteq \tilde{L}$.

Заметим, что если L — конечная решетка, то решетка $\tilde{L}$ в предложении 8 может быть также выбрана конечной.

Полугруппу матриц размера $n \times n$ над дистрибутивной решеткой L будем обозначать $B_n(L)$.

Предложение 9. Пусть L — дистрибутивная решетка, n — натуральное число и $\sigma, \tau \in B_n(L)$. Тогда $\tau \leq_l^* \sigma$ в том и только том случае, если существует такая надрешетка $\tilde{L} \supseteq L$ и матрица $\mu \in B_n(\tilde{L})$ такая, что $\tau = \mu\sigma$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.

Заметим, что если L — конечная решетка, то решетку $\tilde{L}$ в предложении 9 также можно считать конечной.

Теорема 6. Пусть L — дистрибутивная решетка и $n \geq 2$ — натуральное число. Тогда эквивалентны следующие условия:

- (i) L — решетка с относительными дополнениями;
- (ii) в полугруппе $B_n(L)$ совпадают отношения $\leq_l^*$ и $\leq_l$;

(iii) в полугруппе $B_n(L)$ справедливо равенство $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$.

Доказательство. Докажем импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть L — решетка с относительными дополнениями и $\tau \leq_l^* \sigma$. Обозначим через L_1 конечную булеву алгебру, порожденную всеми элементами матриц σ и τ . Так как $\tau \leq_l^* \sigma$, выполнено условие (8). Отсюда по теореме 3 $\tau \leq_l \sigma$. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна. Докажем импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть L — дистрибутивная решетка, не все элементы которой имеют относительные дополнения. Для простоты будем считать, что $0, 1 \in L$ и элемент $p \in L$ не имеет дополнения. Проверим, что для матриц $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix}$ и $\tau = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix}$ выполняются соотношения $(\sigma, \tau) \in \mathcal{L}^*$, $(\sigma, \tau) \notin \mathcal{L}$. Действительно, в примере 1 было показано, что строка $(1, 0)$ матрицы σ не является линейной комбинацией строк $(p, 0)$ и $(1, p)$ матрицы τ , поэтому $(\sigma, \tau) \notin \mathcal{L}$. Вместе с тем, если погрузить L в дистрибутивную решетку, в которой элемент p имеет дополнение q , то равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix}$$

покажут, что $(\sigma, \tau) \in \mathcal{L}^*$. Небольшим усложнением этого примера можно построить такие матрицы σ и τ в любом интервале $[x, y]$ решетки L , если там есть элемент, не имеющий относительного дополнения, причем по 2×2 матрицам можно построить матрицы любого размера, принадлежащие $\mathcal{L}^* \setminus \mathcal{L}$. Таким образом, существование относительных дополнений является и необходимым условием равенства $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$.

Заметим, что утверждение, аналогичное теореме 6, справедливо и для двойственных отношений $\leq_r, \leq_r^*, \mathcal{R}, \mathcal{R}^*$.

Следствие 2. В полугруппе $B_n(\{0, 1\})$ всех $n \times n$ матриц из 0 и 1 справедливы равенства $\leq_l^* = \leq_l, \mathcal{L}^* = \mathcal{L}$, а значит, и двойственные к ним равенства $\leq_r^* = \leq_r, \mathcal{R}^* = \mathcal{R}$.

В заключение отметим, что в нашей работе рассматривалась только делимость матриц над решетками друг на друга слева или справа. Мы ничего не можем сказать о двусторонней делимости (то есть о представлении τ в виде $\tau = \alpha\sigma\beta$). Распознавание двусторонней делимости даже для матриц конечного размера из 0 и 1 является NP -полной задачей (см. [9]).

Список литературы

1. Ляпин Е. С., *Полугруппы*. Физматлит, Москва, 1960.
2. Шутов Э. Г., Потенциальная делимость элементов в полугруппах. *Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. Герцена* (1958) **166**, 75–103.
3. Clark C. E., Carruth J. H., Generalized Green's theories. *Semigroup Forum* (1980) **20**, 95–127.
4. Клиффорд А., Престон Г., *Алгебраическая теория полугрупп*. Мир, Москва, 1972.
5. Гретцер Г., *Общая теория решеток*. Наука, Москва, 1982.
6. Kim K. H., *Boolean matrix theory and applications*. Marcel Dekker, New York, 1982.
7. Поплавский В. Б., О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц. *Дискретная математика* (2008) **20**, №4, 42–60.
8. Fountain J. B., Abundant semigroups. *Proc. London Math. Soc.* (1982) **44**, №3, 103–129.
9. Markowsky G., Ordering D -classes and computing Schein rank is hard. *Semigroup Forum* (1992) **44**, №3, 373–375.

Статья поступила 1.06.2009.