Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Вычисление предельных вероятностей распределения перманента случайной матрицы в поле $GF(p)$, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 3, 3–7

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 18:10:17

Вычисление предельных вероятностей распределения перманента случайной матрицы в поле $GF(p)$

© 2010 г. Б. А. Севастьянов

Предложен алгоритм вычисления предельных вероятностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\text{per}(A_{mn}) = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

перманента случайной матрицы $A_{mn} = \|\alpha_{ij}\|$ с m строками и n независимыми столбцами в поле $GF(p)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-01-00078, и программы РАН «Математическая теория управления».

1. Предварительные результаты

Перманент матрицы $A_{mn} = \|\alpha_{ij}\|$ с m строками и n столбцами, $n \geq m$, определяется формулой

$$\text{per}(A_{mn}) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_m)} \alpha_{1j_1} \alpha_{2j_2} \dots \alpha_{mj_m}, \quad (1)$$

где сумма берется по всем наборам попарно различных индексов столбцов. Мы будем предполагать, что α_{ij} — элементы поля $GF(p)$. В этом случае $\text{per}(A_{mn})$ принимает значения из множества $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Нам понадобятся следующие обозначения. Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}$ — конечное множество индексов, соответствующих строкам матрицы A_{mn} . Для любого подмножества $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq M$, $1 \leq r \leq m$, введем суммы

$$\xi(I, n) = \sum_{j=1}^n \alpha_{i_1 j} \alpha_{i_2 j} \dots \alpha_{i_r j}, \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Пусть $\mathcal{K}_p = \{K\}$ — множество всех разбиений $K = (K_1, K_2, \dots, K_r)$, у которых $k_i = |K_i| \leq p$, $i = 1, \dots, r$.

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если элементы матрицы $A_{mn} = \|\alpha_{ij}\|$ принадлежат полю $GF(p)$, то

$$\text{per}(A_{mn}) = \sum_{K \in \mathcal{K}_p} c(K) \xi(K_1, n) \xi(K_2, n) \dots \xi(K_r, n), \quad (3)$$

где $K = (K_1, K_2, \dots, K_r)$ — разбиения множества M , $k_i = |K_i|$, $1 \leq k_i \leq p$, $i = 1, 2, \dots, r$, $c(K) = (-1)^{m-r} (k_1 - 1)! (k_2 - 1)! \dots (k_r - 1)!$.

Из этой теоремы следует, что для вычисления $\text{per}(A_{mn})$ достаточно знать только функции $\xi(K_l, n)$, входящие в сумму в правой части формулы (3). Если матрица A_{mn} случайна, то ее перманент также случаен и его закон распределения определяется суммой в правой части формулы (3). Однако даже в случае, когда все элементы матрицы A_{mn} независимы и равномерно распределены на $GF(p)$, вычислить закон распределения $\text{per}(A_{mn})$ затруднительно. Далее мы будем рассматривать последовательность матриц $A_{mn}, A_{mn+1}, A_{mn+2}, \dots$ с фиксированным числом строк и растущим числом столбцов. Обозначим

$$\eta_m(n) = \text{per}(A_{mn}).$$

Тогда формулу (3) можно записать в следующем виде

$$\eta_m(n) = \sum_{K \in \mathcal{K}_p} c(K) \xi(K_1, n) \xi(K_2, n) \dots \xi(K_r, n). \quad (4)$$

Далее нам понадобится следующая теорема.

Теорема 2. Если в последовательности матриц A_{mn} , $n = m + 1, m + 2, \dots$, столбцы независимы и существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех n и всех наборов $i_1, \dots, i_r$, $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$, выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\{\alpha_{i_1 n} \alpha_{i_2 n} \dots \alpha_{i_r n} \neq 0\} > \varepsilon,$$

то все случайные величины $\xi(K_l, n)$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся по распределению к предельным случайным величинам $\xi(K_l)$. Все эти предельные величины равномерно распределены на $GF(p)$ и независимы.

В работе [2] доказана аналогичная теорема при более слабых условиях. Иногда вместо $\xi(K_l)$, где $K_l = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq M$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m$, $1 \leq r \leq m$, будем писать ξ_{K_l} , либо $\xi_{i_1 i_2 \dots i_r}$. Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Если выполняются условия теорем 1 и 2, то при $n \rightarrow \infty$ случайная величина $\eta_m(n)$ сходится по распределению к случайной величине

$$\eta_m = \sum_{K \in \mathcal{K}_p} c(K) \xi(K_1) \xi(K_2) \dots \xi(K_r). \quad (5)$$

Из независимости и равномерности распределения случайных величин $\xi(K_1), \xi(K_2), \dots, \xi(K_r)$ в формуле (5) следует, что там можно убрать множитель $c(K)$. Далее мы будем использовать формулу

$$\eta_m = \sum_{K \in \mathcal{K}_p} \xi(K_1) \xi(K_2) \dots \xi(K_r) \quad (6)$$

в том смысле, что в этом равенстве совпадают законы распределения правой и левой части. Из формулы (6) следует, что вероятности $\mathbf{P}\{\eta_m = l\}$ при $l = 1, 2, \dots, p - 1$ принимают одинаковые значения и

$$\mathbf{P}\{\eta_m = 0\} = 1 - (p - 1)\mathbf{P}\{\eta_m = 1\}.$$

В частном случае при $p = 3$ формула (6) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \xi_1, \\ \eta_2 &= \xi_1\xi_2 + \xi_{12}, \\ \eta_3 &= \xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_{23} + \xi_2\xi_{13} + \xi_3\xi_{12} + \xi_{123}, \\ \eta_4 &= \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_2\xi_{34} + \xi_1\xi_3\xi_{24} + \xi_1\xi_4\xi_{23} + \xi_{12}\xi_3\xi_4 + \xi_{13}\xi_2\xi_4 + \xi_{14}\xi_2\xi_3 \\ &\quad + \xi_{12}\xi_{34} + \xi_{13}\xi_{24} + \xi_{14}\xi_{23} + \xi_{123}\xi_4 + \xi_{124}\xi_3 + \xi_{134}\xi_2 + \xi_{234}\xi_1,\end{aligned}$$

и так далее.

2. Рекуррентные формулы

Далее будем использовать обозначение

$$a_m = \mathbf{P}\{\eta_m = 1\}.$$

Как было отмечено выше, при любом простом числе p вероятность a_m определяет все распределение $\mathbf{P}\{\eta_m = k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$. Для каждого простого числа p введем целые числа

$$b_m(k) = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{m-1}{l}, \quad 1 \leq k < p < m. \quad (7)$$

Иначе числа (7) можно вычислять последовательно

$$b_m(k) = b_m(k-1) + \binom{m-1}{k-1}, \quad 1 \leq k \leq m-1, \quad b_m(0) = 0. \quad (8)$$

Теорема 4. Если справедлива формула (6), то при любом $m > p$ имеет место рекуррентная формула

$$a_m = \sum_{k=1}^p (\gamma^{b_m(k-1)} - \gamma^{b_m(k)}) a_{m-k}, \quad m > p, \quad (9)$$

где $b_m(0) = 0$, $a_1 = a_2 = \dots = a_p = \gamma$, $\gamma = 1/p$.

Доказательство. Для простоты вычислений доказательство проведем при $p = 3$. В этом случае выкладки будут короче, а суть доказательства в общем случае аналогична. При $p = 3$ формула (9) имеет вид

$$a_m = (1 - \gamma)a_{m-1} + (\gamma - \gamma^m)a_{m-2} + (\gamma^m - \gamma^{\binom{m}{2}+1})a_{m-3}, \quad m > 3, \quad (10)$$

$a_1 = a_2 = a_3 = \gamma$, $0 = b_m(0)$, $m = b_m(1)$, $\binom{m}{2} + 1 = b_m(2)$. Переобозначим случайные величины ξ_m, ξ_{im} , $1 \leq i \leq m-1$, ξ_{ijm} , $1 \leq i < j \leq m-1$, и положим

$$\theta_1 = \xi_m, \quad \theta_k = \xi_{ikm}, \quad 2 \leq k \leq m-1, \quad \theta_k = \xi_{ikjkm}, \quad m \leq k \leq \binom{m}{2} + 1.$$

В этих обозначениях события $S_k = \{\theta_k = 0\}$, $1 \leq k \leq \binom{m}{2} + 1$, независимы,

$$\mathbf{P}\{S_k\} = \gamma, \quad \mathbf{P}\{\bar{S}_k\} = 1 - \gamma, \quad 1 \leq k \leq \binom{m}{2} + 1.$$

Введем события

$$H_1 = \bar{S}_1,$$

$$H_k = S_1 S_2 \dots S_{k-1} \bar{S}_k, \quad 2 \leq k \leq \binom{m}{2},$$

$$H_{\binom{m}{2}+1} = S_1 S_2 \dots S_{\binom{m}{2}+1}.$$

Далее воспользуемся формулой полной вероятности

$$\mathbf{P}\{\eta_m = 1\} = \sum_{k=1}^{\binom{m}{2}+1} \mathbf{P}\{H_k\} \mathbf{P}\{\eta_m = 1 \mid H_k\}. \quad (11)$$

Легко видеть, что

$$\sum_{k=1}^{\binom{m}{2}+1} \mathbf{P}\{H_k\} = 1,$$

$$\mathbf{P}\{\eta_m = 1 \mid H_1\} = a_{m-1},$$

$$\mathbf{P}\{\eta_m = 1 \mid H_k\} = a_{m-2}, \quad 2 \leq k \leq m,$$

$$\mathbf{P}\{\eta_m = 1 \mid H_k\} = a_{m-3}, \quad m < k \leq \binom{m}{2},$$

$$\mathbf{P}\{\eta_m = 1 \mid H_{\binom{m}{2}+1}\} = 0.$$

Отсюда вытекает формула (10). Начальные значения $a_1 = a_2 = a_3 = \gamma$ следуют из формулы (6). Теорема доказана.

Введем обозначения

$$\Delta a_m = a_m - a_{m-1}, \quad m = 2, 3, \dots$$

Легко видеть, что $\Delta a_m = 0$ при $2 \leq m \leq p$. Очевидны также равенства

$$a_{m_2} = a_{m_1} + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \Delta a_k, \quad m_2 > m_1,$$

в частности,

$$a_m = a_{m-1} + \Delta a_m,$$

$$a_m = a_1 + \sum_{k=2}^m \Delta a_k,$$

$$a_m = a_p + \sum_{k=p+1}^m \Delta a_k, \quad m > p.$$

Далее для вычисления вероятностей a_m более удобно вместо формулы (9) использовать некоторую ее модификацию.

Теорема 5. Если выполнены условия теоремы 4, то при $m > p$ справедлива формула

$$\Delta a_m = - \sum_{k=1}^{p-1} \gamma^{b_m(k)} \Delta a_{m-k} - \gamma^{b_m(p)} a_{m-p}, \quad (12)$$

где $\Delta a_k = 0$ при $k = 2, 3, \dots, p$.

Эквивалентность формул (9) и (12) проверяется элементарно.

3. Вычисление вероятностей a_m

При $p = 2$ в работе [1] с помощью формулы (6) были вычислены вероятности

$$a_{2m-1} = a_{2m} = \prod_{k=1}^m (1 - \gamma^{2^k-1}), \quad \gamma = 1/2.$$

С помощью формулы (12) и равенства

$$a_m = a_{m-1} + \Delta a_m$$

можно последовательно вычислять a_m , $m = 1, 2, \dots$. Например, при $p = 3$ формула (12) имеет вид

$$\Delta a_m = -\gamma \Delta a_{m-1} - \gamma^m \Delta a_{m-2} - \gamma^{\binom{m}{2}+1} a_{m-3}, \quad m > 3, \quad (13)$$

где $\gamma = 1/3$, $a_1 = a_2 = a_3 = \gamma$. Подставляя $m = 4, 5, 6$ в (12) и используя равенство $a_m = a_{m-1} + \Delta a_m$, получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta a_4 &= -\gamma^8, & \Delta a_5 &= \gamma^9 - \gamma^{12}, & \Delta a_6 &= -\gamma^{10} + \gamma^{13} + \gamma^{14} - \gamma^{17}, \\ a_4 &= \gamma - \gamma^8, & a_5 &= \gamma - \gamma^8 + \gamma^9 - \gamma^{12}, & a_6 &= \gamma - \gamma^8 + \gamma^9 - \gamma^{12} - \gamma^{10} \\ & & & & & + \gamma^{13} + \gamma^{14} - \gamma^{17}, \end{aligned}$$

где $\gamma = 1/3$. В работе [2] вероятности a_5 и a_6 вычислялись с помощью сложной формулы (6) и результат был ошибочным.

Список литературы

1. Ляпков Л. А., Севастьянов Б. А., Распределение вероятностей перманента случайной булевой матрицы. *Дискретная математика* (1990) **2**, №2, 138–144.
2. Ляпков Л. А., Севастьянов Б. А., Предельное распределение вероятностей перманента случайной матрицы в поле $GF(p)$. *Дискретная математика* (1996) **8**, №2, 3–13.

Статья поступила 25.03.2010.