Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Павлов, Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 3, 20–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:47:02

Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания

© 2010 г. Ю. Л. Павлов

Рассматриваются условные случайные графы Интернет-типа при условии, что число ребер графа известно, а степени вершин не имеют математического ожидания. Доказаны предельные теоремы для максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени.

В работах [1–5] и многих других рассматривались Интернет-графы, которые часто используются в качестве моделей сложных сетей телекоммуникаций, включая Интернет. Такие графы содержат N вершин, занумерованных числами от 1 до N . Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\eta_1, \dots, \eta_N$, такими, что

$$\mathbf{P}\{\eta_1 \geq k\} = k^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где τ — положительный параметр. Если сумма

$$v_N = \eta_1 + \dots + \eta_N$$

нечетна, то для того, чтобы сумма степеней вершин графа была четной, в граф вводится дополнительная вершина с единичной степенью. Построение Интернет-графа происходит в два этапа. На первом этапе в соответствии с распределением (1) определяются степени вершин, при этом считается, что из вершин выходят “полуребра” (см. [3]), то есть ребра, для которых смежные вершины еще не определены. Заметим, что все полуребра графа при этом различимы (занумерованы). На втором этапе образуются ребра путем равномерного соединения полуребер друг с другом.

Получено много результатов о структуре и предельном поведении различных числовых характеристик случайных Интернет-графов при $N \rightarrow \infty$. В [1, 3] показано, что типичные для многих реальных сетей коммуникаций значения параметра τ распределения (1) принадлежат интервалу $(1, 2)$, хотя встречаются случаи и других значений τ . Замечено, что если $\tau > 2$ или $\tau < 1$, то свойства графов существенно отличаются от случая $\tau \in (1, 2)$, следовательно, значения $\tau = 1, 2$ являются точками фазового перехода. Однако именно при этих значениях параметра τ поведение графа наименее изучено в силу возникающих в ходе доказательств соответствующих теорем технических трудностей. Таким образом, представляет интерес исследование Интернет-графов для всех значений τ , особенно в окрестностях точек фазового перехода. При изучении большинства характеристик графов необходимо учитывать распределение суммы v_N , а также максимальной степени

вершин и числа вершин заданной степени, поэтому в статьях [4, 5] основное внимание было уделено этим случайным величинам.

Далее мы будем рассматривать, как и в [4, 5], условные Интернет-графы при условии, что сумма степеней вершин графа ν_N известна и равна n . Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{E}\eta_1 = \zeta(\tau), \quad (2)$$

где

$$\zeta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\tau}$$

— значение дзета-функции Римана в точке τ . Поэтому при изучении структуры и предельного поведения Интернет-графов наибольший интерес представляет зона изменения параметров N, n , в которой $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$.

Обозначим $\eta_{(N)}$ и μ_r максимальную степень и число вершин степени r соответственно. В [4, 5] для рассматриваемого подмножества графов изучалось предельное поведение этих случайных величин при $N, n \rightarrow \infty$. В [4] доказаны предельные теоремы в случае $\tau > 0$ и $1 < n/N < \zeta(\tau)$, однако при $n/N \rightarrow 1$ и $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ некоторые зоны изменения N, n не рассмотрены. Для того, чтобы сформулировать соответствующие результаты в случае, когда $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ так, что $n/N < \zeta(\tau)$, обозначим через λ решение уравнения

$$\frac{\Phi(\lambda, \tau, 1) - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau - 1, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)} = \frac{n}{N}, \quad (3)$$

где

$$\Phi(\lambda, \tau, 1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j+1)^\tau}. \quad (4)$$

Из (1) следует, что

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_1 = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} p_k(\lambda) &= \lambda^k p_k(1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1))^{-1}, \\ \sigma^2(\lambda) &= \frac{2\Phi(\lambda, \tau - 1, 1) - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau - 2, 1) - \Phi(\lambda, \tau, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)} - \left(\frac{n}{N}\right)^2, \\ \sigma_{rr}^2(\lambda) &= p_r(\lambda) \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(n/N - r)^2}{\sigma^2(\lambda)} p_r(\lambda)\right). \end{aligned}$$

Используя (3), нетрудно показать, что если $n/N \uparrow \zeta(\tau)$, то $\lambda \uparrow 1$. Ниже, в виде теорем 1 и 2, приведены результаты, полученные в [4] (см. также [5]). В этих теоремах предполагается, что выполнено одно из следующих условий:

- (1) $\tau > 3$
- (2) $\tau = 3, (\ln(1 - \lambda))/\sqrt{N} \rightarrow 0$;
- (3) $2 < \tau < 3, \sqrt{N}(1 - \lambda)^{3-\tau} \rightarrow \infty$;

$$(4) \tau = 2, N(1 - \lambda)^2 |\ln(1 - \lambda)|^3 \rightarrow \infty;$$

$$(5) 0 < \tau < 2, N(1 - \lambda)^\tau \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$. Пусть $r = r(N, n)$ выбрано так, что

$$\frac{\tau N \lambda^r}{r^{\tau+1}(1 - \lambda)} \rightarrow \gamma,$$

где γ — некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma}.$$

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$, и r — фиксированное натуральное число. Тогда для целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}(\lambda) \sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)).$$

равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}(\lambda) \sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале.

В статье [5] доказаны предельные теоремы для $\eta_{(N)}$ и μ_r в случае, когда $\tau > 1$ и $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ так, что условия 1–5 нарушены. Заметим, что в этих теоремах не предполагается, что $n/N < \zeta(\tau)$.

Теорема 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$, $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$, $r = (N/\gamma)^{1/\tau} (1 + o(1))$, где γ — некоторая положительная постоянная. Пусть также выполнено одно из следующих условий:

$$(1) \tau > 2, n - \zeta(\tau)N = O(\sqrt{N});$$

$$(2) \tau = 2, n - \zeta(2)N = O(\sqrt{N \ln N});$$

$$(3) 1 < \tau < 2, n - \zeta(\tau)N = O(n^{1/\tau}).$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma}.$$

Теорема 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$, $n - \zeta(\tau)N = o(\sqrt{N})$, $\tau > 2$, и r — фиксированное натуральное число. Тогда для целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr} \sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $u_r = (k - Np_r)/(\sigma_{rr} \sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале, где

$$\sigma_{rr}^2 = p_r \left(1 - p_r - \frac{(n/N - r)^2}{\sigma^2} p_r \right),$$

$$\sigma^2 = 2\zeta(\tau - 1) - \zeta(\tau) - \zeta^2(\tau).$$

Теорема 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ и выполнено одно из следующих условий:

$$(1) \tau = 2, n - \zeta(2)N = o(\sqrt{N \ln N});$$

$$(2) 1 < \tau < 2, n - \zeta(\tau)N = o(N^{1/\tau}).$$

Тогда для целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r(1 - p_r)}} \exp \left\{ -\frac{(k - N p_r)^2}{2N p_r(1 - p_r)} \right\}$$

равномерно относительно $(k - N p_r)/\sqrt{N p_r(1 - p_r)}$ в любом фиксированном конечном интервале.

Поскольку $\zeta(\tau) = \infty$ при $\tau \leq 1$, из (2) следует, что при таких τ математическое ожидание распределения (1) не существует. Таким образом, остался нерассмотренным случай $n/N \rightarrow \infty$, $\tau \leq 1$. Ниже доказаны теоремы 6–9 для этого случая. Используя результаты работ [6, 7], нетрудно проверить, что если $\tau = 1$ и $n/(N \ln N) \rightarrow 0$, то $N(1 - \lambda) \rightarrow \infty$, и для описания предельного поведения η_N и μ_r достаточно использовать теоремы 1 и 2. Аналогичная ситуация возникает при $\tau < 1$ и $n/N^{1/\tau} \rightarrow 0$, поскольку $N(1 - \lambda)^\tau \rightarrow \infty$. Поэтому в теоремах 6–9 предполагается, что $n/(N \ln N) \geq C > 0$ при $\tau = 1$ и $n/N^{1/\tau} \geq C > 0$ при $0 < \tau < 1$. Справедливы следующие результаты.

Теорема 6. Пусть $\tau = 1$, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/(N \ln N) \geq C > 0$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P}\{(n - \eta_{(N)})/N \leq z\} \rightarrow G(z),$$

где $G(x)$ — функция устойчивого распределения с показателем 1 и характеристической функцией

$$f(t) = \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}|t| \left(1 + i \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \ln |t| \right) \right\}. \quad (6)$$

Теорема 7. Пусть $0 < \tau < 1$, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^{1/\tau} \rightarrow y$, где y — некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)}/n \leq z\} \rightarrow g^{-1}(y) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k!)^{-1} I_k(zy, y),$$

где $g(x)$ — плотность устойчивого распределения с параметром τ и характеристической функцией

$$f_\tau(t) = \exp \left\{ -\Gamma(1 - \tau)|t|^\tau \left(1 + i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2} \right) \cos \frac{\pi\tau}{2} \right\}, \quad (7)$$

$$I_0(u, v) = g(v),$$

$$I_k(u, v) = \int_{X_k(u, v)} \frac{\tau^k g(v - x_1 - \dots - x_k)}{(x_1 \dots x_k)^{\tau+1}} dx_1 \dots dx_k,$$

$$X_k(u, v) = \{x_i \geq u, i = 1, \dots, k, x_1 + \dots + x_k \leq v\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Теорема 8. Пусть $0 < \tau < 1$, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^{1/\tau} \rightarrow \infty$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P}\{(n - \eta_{(N)})/N^{1/\tau} \leq z\} \rightarrow G(z),$$

где $G(x)$ — функция устойчивого распределения с параметром τ и характеристической функцией (7).

Заметим, что теорема 8 была доказана в магистерской диссертации Е. Н. Дертишниковой (Петрозаводский университет, 2009 г.). В настоящей статье приводится другое доказательство этой теоремы.

Теорема 9. Пусть $0 < \tau \leq 1$, а $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/(N \ln N) \geq C > 0$ при $\tau = 1$ и $n/N^{1/\tau} \geq C > 0$ при $\tau < 1$. Тогда для целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r (1 - p_r)}} e^{-u_r^2/2}$$

равномерно относительно $u_r = (k - N p_r)/\sqrt{N p_r (1 - p_r)}$ в любом фиксированном конечном интервале.

Основным методом доказательства представленных результатов, как и в работах [4, 5], является обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, введенная и исследованная В. Ф. Колчиным (см., например, [8]). Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = p_k = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Легко видеть, что распределения $\xi_1, \dots, \xi_N$ совпадают с (1) и отличие от $\eta_1, \dots, \eta_N$ состоит только в том, что на рассматриваемом множестве графов последние являются зависимыми, поскольку $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$. Из (5) и (8) очевидным образом следует, что

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \quad (9)$$

Это равенство означает, что условия обобщенной схемы размещения выполнены. Ниже приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–8), с помощью которых далее будут доказаны теоремы 6–9.

Введем два набора вспомогательных независимых случайных величин $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$ и $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ таких, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k \mid \xi_i \leq r\}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k \mid \xi_i \neq r\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \zeta_N &= \xi_1 + \dots + \xi_N, & \zeta_N^{(r)} &= \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)}, \\ \tilde{\zeta}_N^{(r)} &= \tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)}, & P_r &= \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}. \end{aligned}$$

Из равенства (9) легко вывести известные (см. [8]) свойства обобщенной схемы размещения.

Лемма 1. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} &= (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}, \\ \mathbf{P}\{\mu_r = k\} &= \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}. \end{aligned}$$

Из леммы 1 ясно, что для доказательства теорем 6–9 достаточно знать предельное поведение вероятностей $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$, $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}$, $\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_N^{(r)} = n - kr\}$, бинома $(1 - P_r)^N$ и биномиальной вероятности $\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k}$.

Лемма 2. Пусть $\tau = 1$, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/(N \ln N) \geq C > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = N/n^2(1 + o(1)).$$

Доказательство. Мы воспользуемся идеей доказательства теоремы 4.2.3 книги [8]. Введем обозначение

$$\alpha = \frac{1}{3 \ln(n/N)}. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_i \leq n(1 - \alpha), i = 1, \dots, N\} + N\mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_N > n(1 - \alpha)\}. \quad (13)$$

Из (8) следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \tau/k^{\tau+1}(1 + o(1)), \quad (14)$$

и это соотношение справедливо равномерно относительно k при $n(1 - \alpha) \leq k \leq n$. Поэтому при $\tau = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_N > n(1 - \alpha)\} &= \sum_{k > n(1 - \alpha)} \mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = n - k, \xi_N = k\} \\ &= n^{-2} \mathbf{P}\{\zeta_{N-1} \leq n\alpha\}(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (15)$$

Из теорем 2.1.1, 2.6.1 книги [9] следует, что при $\tau = 1$ распределение ζ_N/N слабо сходится к устойчивому закону с показателем 1. Из (12) и условия $n/(N \ln N) \geq C > 0$ получаем, что $n\alpha/N \rightarrow \infty$, следовательно,

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} \leq n\alpha\} \rightarrow 1.$$

Отсюда и из (15) находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_N > n(1 - \alpha)\} = n^{-2}(1 + o(1)). \quad (16)$$

Рассмотрим сумму

$$R(\omega) = \sum_{k \leq n(1 - \alpha)} p_k \exp\{\omega k\}. \quad (17)$$

Из (8) следует, что для натуральных l и любом $\tau > 0$

$$\sum_{k > l} p_k = (l + 1)^{-\tau}, \quad (18)$$

а при $\tau = 1$

$$\sum_{k \leq l} k p_k \leq C_1 \ln l, \quad (19)$$

здесь и далее во всех доказательствах символы $C_1, C_2, \dots$ означают некоторые положительные постоянные. При $x \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$$e^x = 1 + O(x),$$

поэтому из (17)–(19) и условия $n/(N \ln N) \geq C > 0$ находим, что

$$R(1/(n(1-\alpha))) = 1 + O((\ln n)/n) = 1 + O(N^{-1}). \quad (20)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1(\alpha), \dots, \xi_N(\alpha)$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\alpha) = k\} = \exp\{k/(n(1-\alpha))\} p_k / R(1/(n(1-\alpha))), \quad k \leq n(1-\alpha).$$

Обозначим

$$\zeta_N(\alpha) = \xi_1(\alpha) + \dots + \xi_N(\alpha).$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_i \leq n(1-\alpha), i = 1, \dots, N\} = R^N(1/(n(1-\alpha))) e^{-1/\alpha} \mathbf{P}\{\zeta_N(\alpha) = n\}. \quad (21)$$

Докажем, что при достаточно больших n

$$\mathbf{P}\{\zeta_N(\alpha) = n\} \leq C_2 N^{-1}. \quad (22)$$

Обозначим $\varphi^{(\alpha)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_1(\alpha)$. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_N(\alpha) = n\} = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi N}^{\pi N} \exp\left\{-\frac{itn}{N}\right\} \left(\varphi^{(\alpha)}\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N dt. \quad (23)$$

Рассмотрим выражение

$$(\varphi^{(\alpha)}(t))^N = \left(\frac{R(1/(n(1-\alpha))) + it}{R(1/(n(1-\alpha)))}\right)^N. \quad (24)$$

Если $k \leq n(1-\alpha)$, то

$$\exp\{k/(n(1-\alpha))\} = 1 + \delta k/n, \quad \delta < 2,$$

поэтому

$$R(1/(n(1-\alpha))) + it = \sum_{k \leq n(1-\alpha)} p_k e^{itk} + n^{-1} \sum_{k \leq n(1-\alpha)} \delta k p_k e^{itk},$$

и из (18), (19), (20), (24) находим, что

$$|\varphi^{(\alpha)}|^N \leq C_3 |\varphi(t)|^N, \quad (25)$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_1 . Используя (8), нетрудно получить, что при всех τ

$$\varphi(t) = 1 + (e^{it} - 1)\Phi(e^{it}, \tau, 1), \quad (26)$$

где функция $\Phi(e^{it}, \tau, 1)$ определена в (4). Из полученных в [6, 7] результатов следует, что при $t \rightarrow 0$

$$\Phi(e^{it}, 1, 1) = -(1 - it) \ln(-it) - it/2 + O(t^2 \ln t),$$

поэтому из (26) получаем, что

$$\varphi(t) = 1 - it \ln t - (t^2 \ln t)/2 + O(t^2). \quad (27)$$

Учитывая, что при $0 < \varepsilon \leq t \leq \pi$ для любой характеристической функции $\psi(t)$ решетчатого распределения с единичным максимальным шагом справедливо неравенство

$$|\psi(t)| \leq e^{-C_4}, \quad (28)$$

из (23), (25) и (27) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_N(\alpha) = n\} &= \frac{1}{2\pi N} \int_{|t| < \varepsilon N} \exp\left\{-\frac{itn}{N}\right\} \left(\varphi^{(\alpha)}\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi N} \int_{\varepsilon N \leq |t| \leq \pi N} \exp\left\{-\frac{itn}{N}\right\} \left(\varphi^{(\alpha)}\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N dt \\ &< \frac{1}{2\pi N} \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt + 2\pi N e^{-C_4 N}\right), \end{aligned}$$

откуда и следует (22).

Из (12) и (20)–(22) вытекает, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_i \leq n(1 - \alpha), i = 1, \dots, N\} \leq C_2 N^2 / n^3 = o(N/n^2), \quad (29)$$

поэтому из (13) и (16) получаем утверждение леммы 2.

Из теорем 2.2.2, 2.6.1 и 4.2.1 книги [9] следует такое утверждение.

Лемма 3. Пусть $0 < \tau < 1$, $N \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sup_k |N^{1/\tau} \mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - g(k/N^{1/\tau})| \rightarrow 0,$$

где $g(x)$ — плотность устойчивого распределения с показателем τ и характеристической функцией (7).

Рассмотрим теперь предельное поведение вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$ при $0 < \tau < 1$ в области больших уклонений.

Лемма 4. Пусть $0 < \tau < 1$, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^{1/\tau} \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \tau N n^{-(\tau+1)} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Мы будем следовать схеме доказательства леммы 2. Обозначим

$$\alpha = \frac{N^2}{n^{\tau+1}}. \quad (30)$$

Из (14) находим, по аналогии с (15), что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_N \geq n(1 - \alpha)\} = \tau n^{-(\tau+1)} \mathbf{P}\{\xi_{N-1} \leq n\alpha\} (1 + o(1)). \quad (31)$$

Из (30) и леммы 3 следует, что $n\alpha/N^{1/\tau} \rightarrow \infty$, поэтому $\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} \leq n\alpha\} \rightarrow 1$ и, согласно (31),

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_N \geq n(1-\alpha)\} = \tau n^{-(\tau+1)}(1+o(1)). \quad (32)$$

Легко проверить, что в условиях леммы 4 равенство (20) остается верным, при этом вместо (19) можно использовать оценку

$$\sum_{k \leq l} k p_k \leq C_1 l^{1-\tau}.$$

Вводя случайные величины $\xi_1(\alpha), \dots, \xi_N(\alpha)$, как и при доказательстве леммы 2, убеждаемся в справедливости соотношений (21), (23)–(25). Используя известную (см. [7]) асимптотику функции (4) при $z \rightarrow 1$ и $0 < \tau < 1$

$$\Phi(z, \tau, 1) = \Gamma(1-\tau)(1-z)^{\tau-1}(1+o(1)), \quad (33)$$

из (25), (26) находим, что при $t \rightarrow 0$

$$|\varphi^{(\alpha)}(t)| \leq \exp\{-C_1|t|^\tau\}.$$

Учитывая это неравенство, как и в лемме 2, нетрудно получить оценку типа (22). Поэтому из (20), (21) и (30) находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_i \leq n(1-\alpha), i = 1, \dots, N\} = o(Nn^{-(\tau+1)}).$$

Отсюда и из (13), (32) следует справедливость леммы 4.

Далее описывается асимптотика сумм $\zeta_N^{(r)}$ и $\tilde{\zeta}_N^{(r)}$.

Лемма 5. Пусть $\tau = 1$, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/(N \ln N) \geq C > 0$, $r = n - zN$, где z — некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} = Nn^{-2} \int_z^\infty g(x) dx (1+o(1)),$$

где $g(x)$ — плотность устойчивого распределения с показателем 1 и характеристической функцией (6).

Доказательство. Очевидно, что справедливо равенство, аналогичное (13):

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} = \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n, \xi_i^{(r)} \leq n(1-\alpha), i = 1, \dots, N\} + N\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n, \xi_N^{(r)} > n(1-\alpha)\}, \quad (34)$$

где величина α определена в (12). Из (8), (10), (14) и (18) следует, что при $\tau = 1$ и $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = p_k / (1 - P_r) = k^{-2}(1+o(1)),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n, \xi_N^{(r)} \geq n(1-\alpha)\} &= \sum_{n(1-\alpha) \leq k \leq r} \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(r)} = n-k, \xi_N^{(r)} = k\} \\ &= n^{-2} \mathbf{P}\{n-r \leq \zeta_{N-1}^{(r)} \leq n\alpha\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Обозначим $\varphi_r(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_1^{(r)}$, тогда

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{1 - P_r} \left(\varphi(t) - \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk} \right). \quad (36)$$

В силу (8),

$$\left| \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk} \right| \leq P_r = r^{-1}(1 + o(1)) = o(N^{-1}),$$

поэтому из (36) получаем, что

$$\varphi_r^{N-1}(t/N) = \varphi^{N-1}(t/N)(1 + o(1)).$$

Отсюда, из леммы 3 и (35) следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi_N^{(r)} = n, \xi_N^{(r)} \geq n(1 - \alpha)\} = n^{-2} \int_z^{\infty} g(x) dx (1 + o(1)). \quad (37)$$

Учитывая условие $n/(N \ln N) \geq C > 0$, нетрудно получить, аналогично (29), что

$$\mathbf{P}\{\xi_N^{(r)} = n, \xi_i^{(r)} \leq n(1 - \alpha), i = 1, \dots, N\} = o(N/n^2),$$

поэтому из (34) и (37) следует справедливость леммы 5.

Лемма 6. Пусть $0 < \tau < 1$, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^{1/\tau} \rightarrow y$, где y — некоторая положительная постоянная. Пусть $v = j/N^{1/\tau}$, где j — натуральное число. Если $r = zn + O(1)$, где z — фиксированное положительное число, то

$$N^{1/\tau} \mathbf{P}\{\xi_N^{(r)}/N^{1/\tau} = v\} \rightarrow e^{E(0,z)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k!)^{-1} I_k(zy, v)$$

равномерно относительно v , $0 < v_0 \leq v \leq v_1$, для любых конечных v_0, v_1 , где

$$E(t, z) = \tau \int_{zy}^{\infty} x^{-(\tau+1)} e^{itx} dx,$$

а интегралы $I_k(u, v)$ определены в теореме 7.

Доказательство. Обозначим $\Psi_r(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_N^{(r)}/N^{1/\tau}$. Из (8), (10) и (26) следует, что

$$\Psi_r(t) = (1 - P_r)^{-N} \left(\varphi(t/N^{1/\tau}) - \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k \exp\{itk/N^{1/\tau}\} \right)^N. \quad (38)$$

Отсюда и из леммы 3 получаем, что при любом фиксированном t

$$\Psi_r(t) = (1 - P_r)^{-N} f_{\tau}(t) \left(1 - (1 + o(1)) \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k \exp\{itk/N^{1/\tau}\} \right)^N, \quad (39)$$

где характеристическая функция $f_\tau(t)$ определена в (7). Используя (14), нетрудно получить, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k \exp\{itk/N^{1/\tau}\} = N^{-1} E(t, z)(1 + o(1)). \quad (40)$$

Полагая в (40) $t = 0$, из (39) находим, что

$$\Psi_r(t) = f_\tau(t) \exp\{-E(t, z) + E(0, z)\} + o(1). \quad (41)$$

Поскольку $E(t, z)$ является преобразованием Фурье функции $t^{-(\tau+1)}$, разлагая $\exp\{-E(t, z)\}$ в ряд по степеням $E(t, z)$ и учитывая, что $f_\tau(t)$ является характеристической функцией устойчивого закона с показателем τ , имеющего плотность $g(x)$ (см. теорему 7), находим, что $\Psi_r(t)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью

$$q(x) = e^{E(0, z)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k!)^{-1} I_k(z y, x). \quad (42)$$

По формуле обращения представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = j\}$ в виде

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)}/N^{1/\tau} = v\} = (2\pi N^{1/\tau})^{-1} \int_{-\pi N^{1/\tau}}^{\pi N^{1/\tau}} e^{-i v t} \Psi_r(t) dt. \quad (43)$$

Из (7) ясно, что

$$|f_\tau(t) \exp\{-E(t, z) + E(0, z)\}| \leq C_1 \exp\{-C_2 |t|^\tau\}. \quad (44)$$

Отсюда следует, что $f_\tau(t) \exp\{-E(t, z) + E(0, z)\}$ интегрируема по t и для плотности (42) мы можем применить формулу обращения:

$$q(v) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i v t} f_\tau(t) \exp\{-E(t, z) + E(0, z)\} dt,$$

поэтому из (43) находим, что

$$2\pi N^{1/\tau} \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)}/N^{1/\tau} = v\} - 2\pi q(v) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-i v t} (\Psi_r(t) - f_\tau(t) \exp\{-E(t, z) + E(0, z)\}) dt, \\ I_2 &= \int_{A < |t| \leq \varepsilon N^{1/\tau}} e^{-i v t} \Psi_r(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon N^{1/\tau} < |t| \leq \pi N^{1/\tau}} e^{-i v t} \Psi_r(t) dt, \\ I_4 &= - \int_{A < |t|} f_\tau(t) \exp\{-i v t - E(t, z) + E(0, z)\} dt; \end{aligned}$$

положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Очевидно, что для доказательства леммы достаточно показать, что каждый из интегралов I_1, I_2, I_3, I_4 может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно больших N, n . Из (41) следует, что $I_1 \rightarrow 0$. Используя (44), получаем неравенство

$$|I_4| \leq 2C_1 \int_A^\infty e^{-C_2|t|^\tau} dt,$$

а последнее выражение может быть сделано сколь угодно малым выбором достаточно большого A . Из (26) и (33) нетрудно найти, что если $|t| \leq \varepsilon$ и ε достаточно мало, то

$$|\varphi(t)| \leq \exp\{-C_3|t|^\tau\}.$$

Отсюда и из (39) следует, что при достаточно больших N

$$|I_2| \leq 2 \left(\frac{1 + 2P_r}{1 - P_r} \right)^N \int_A^\infty e^{-C_3|t|^\tau} dt,$$

поэтому из (40) получаем, что

$$|I_2| \leq C_4 \int_A^\infty e^{-C_3|t|^\tau} dt,$$

а этот интеграл оценивается так же, как и I_4 . Наконец, используя (28) и (38), находим, что

$$|I_3| \leq C_5 N^{1/\tau} \left(\frac{e^{-C_6} + P_r}{1 - P_r} \right)^N \rightarrow 0.$$

Лемма 6 доказана.

Следуя доказательствам лемм 4, 5 и задавая α по формуле (30) и учитывая (31), (35), получаем такой результат.

Лемма 7. Пусть $0 < \tau < 1$, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^{1/\tau} \rightarrow \infty$, $r = n - zN^{1/\tau}$, где z — фиксированное положительное число. Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_N^{(r)} = n\} = \tau N n^{-(\tau+1)} \int_z^\infty g(x) dx (1 + o(1)),$$

где $g(x)$ — плотность устойчивого распределения с показателем τ и характеристической функцией (7).

Лемма 8. Пусть $0 < \tau \leq 1$, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/(N \ln N) \geq C > 0$ при $\tau = 1$ и $n/N^{1/\tau} \geq C > 0$ при $\tau < 1$. Пусть r — фиксированное натуральное число,

$$S = N(1 - p_r)(1 + o(1)).$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(r)} = n\} = \tau N n^{-(\tau+1)} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Аналогично (13) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(r)} = n\} = \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(r)} = n, \tilde{\xi}_i^{(r)} \leq n(1 - \alpha), i = 1, \dots, S\} + S\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(r)} = n, \tilde{\xi}_S^{(r)} > n(1 - \alpha)\}, \quad (45)$$

где α задается равенством (12) при $\tau = 1$ и равенством (30) в случае $\tau < 1$. Из (11) и (14) следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\} = \tau(k^{\tau+1}(1 - p_r))^{-1}(1 + o(1)),$$

откуда находим, аналогично (15), (16), что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(r)} = n, \tilde{\xi}_S^{(r)} > n(1 - \alpha)\} = \tau(n^{\tau+1}(1 - p_r))^{-1}(1 + o(1)). \quad (46)$$

Оценка вероятности $\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(r)} = n, \tilde{\xi}_i^{(r)} \leq n(1 - \alpha), i = 1, \dots, S\}$ проводится так же, как и в (29), поэтому из (45), (46) следует справедливость леммы 8.

Теперь мы можем доказать теоремы 6–9. Из (18) следует, что в условиях теорем 6, 8 при $r = n - zN$, $0 < z < \infty$,

$$(1 - P_r)^N \rightarrow 0. \quad (47)$$

Отсюда и из лемм 1, 2, 5 получаем утверждение теоремы 6. Теорему 7 легко доказать, полагая $r = zn + O(1)$ и используя леммы 1, 3, 6 и (40), а теорема 8 вытекает из лемм 1, 4, 7 и (47).

В условиях теоремы 9 положим $S = N - k$, где

$$k = Np_r + u_r \sqrt{Np_r(1 - p_r)}.$$

Тогда из леммы 8 находим, что при $\tau = 1$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = N/n^2(1 + o(1)),$$

поэтому из леммы 2 следует, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{N-k}^{(r)} = n - kr\} / \mathbf{P}\{\xi_N = n\} \rightarrow 1. \quad (48)$$

Пусть $0 < \tau < 1$, $n/N^{1/\tau} \rightarrow y$, $0 < y < \infty$. Нетрудно видеть, что для сумм $\tilde{\xi}_{N-k}^{(r)}$ из теорем 2.2.2, 2.6.1, 4.2.1 из [9] вытекает утверждение, аналогичное лемме 3, следовательно,

$$N^{1/\tau} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = g(y)(1 + o(1)),$$

поэтому соотношение (48) сохраняет силу. Если же $n/N^{1/\tau} \rightarrow \infty$, то (48) следует из лемм 4 и 8. Согласно нормальному приближению биномиального распределения,

$$\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1 - p_r)}} e^{-u_r^2/2}$$

равномерно относительно u_r в любом фиксированном конечном интервале, поэтому теорема 9 следует из леммы 1 и (48).

Список литературы

1. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M., On power-law relationships of the Internet topology. *Computer Communications Rev.* (1999) **29**, 251–262.
2. Janson S., Luczak T., Rucinski A., *Random graphs*. Wiley, New York, 2000.
3. Reittu H., Norros I., On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation* (2004) **55**, 3–23.
4. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А., Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения. *Дискретная математика* (2008) **20**, №3, 3–18.
5. Павлов Ю. Л., О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах. *Дискретная математика* (2009) **21**, №3, 14–23.
6. Robinson J. E., Note on the Bose–Einstein integral functions. *Phys. Rev. 2* (1951) **83**, 678–679.
7. Wood D., *Techn. Rep. 15-20*, Univ. Kent, 1992.
8. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
9. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., *Независимые и стационарно связанные величины*. Наука, Москва, 1965.

Статья поступила 1.04.2009.