Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Мусин, Оценка вероятности локализации диаметра случайного графа преимущественного присоединения, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 3, 34–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:19:46

Оценка вероятности локализации диаметра случайного графа преимущественного присоединения

© 2010 г. М. М. Мусин

Получена оценка вероятности локализации диаметра случайного графа преимущественного присоединений, улучшающая результат Боллобаша и Риордана 2004 г. Отмечены возможные приложения к анализу сложных стохастических цепей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-01-00373а.

1. Введение и формулировка основного результата

Граф преимущественного присоединения — это эволюционный граф, в котором на каждом шаге добавляется новая вершина, случайно соединяемая некоторым количеством ребер со старыми, причем новые ребра с большей вероятностью добавляются к вершинам, уже имеющим большую степень. Основные определения теории графов можно найти, например, в [1–3].

Интерес к графам преимущественного присоединения возник после появления работ [4, 5, 11], где были обнаружены определенные асимптотические закономерности в распределении степеней вершин Интернет-графа, а также некоторых других сложных структур, таких как социальные сети.

В статье [5] было указано, что граф преимущественного присоединения может служить подходящей моделью для вышеупомянутых структур, так как имеет (было приведено эвристическое доказательство) асимптотически степенное распределение степеней вершин. Этот факт был доказан в статье [6]. Следует отметить также статью [17], в которой тот же результат был установлен независимо.

Область стремительно развивалась в последнее десятилетие, в частности, в связи с исследованиями графов Интернет-типа возник новый журнал (см. [7]). Внимание большого числа исследователей данной области сосредоточено главным образом на графах преимущественного присоединения и их различных свойствах.

В [12] рассмотрена модификация графа преимущественного присоединения с широкими возможностями подгонки под реальные модели. Следует отметить серию работ Боллобаша и Риордана [7, 8, 10], посвященных случайному графу преимущественного присоединения, а также работу [18]. В [9] содержится обзор области исследований случайных графов на момент 2003 г.; другой обзор эволюционных моделей с большим уклоном в прикладные и вычислительные задачи содержится в [15]. Следует отметить

также более поздние обзорные статьи [14, 16] и совсем новое критическое исследование истоков модели преимущественного присоединения в [19].

Данная статья посвящена обобщению результата Боллобаша и Риордана [10], установивших, что диаметр случайного графа преимущественного присоединения с вероятностью, стремящейся к единице, имеет асимптотическое поведение $\ln n / \ln \ln n$ при $n \rightarrow \infty$. Мы получили асимптотическую оценку вероятности этого события. В доказательстве широко используются методы, развитые Боллобашем и Риорданом.

Приведем определение графа G_m^n преимущественного присоединения и сформулируем основной результат нашей статьи.

Определение 1 ([10]). Пусть m — натуральное число. Для $m = 1$ зададим граф преимущественного присоединения G_1^n по индукции. Для $n = 1$ пусть G_1^1 состоит из одной вершины и одной петли. При $n \geq 2$ граф G_1^n получается из графа G_1^{n-1} добавлением вершины с номером n и ребра между ней и вершиной со случайным номером t_n , имеющим распределение

$$\mathbf{P}(t_n = l) = \begin{cases} d_l^n / (2n - 1), & 1 \leq l \leq n - 1, \\ 1 / (2n - 1), & l = n, \end{cases}$$

где d_l^n обозначает степень вершины с номером l в графе G_1^{n-1} . Для $m > 1$ граф G_m^n получается из графа G_1^{mn} следующим образом. Соединим вершины $i, j \in G_m^n$ столькоими ребрами, сколькоими соединяются множества вершин $\{m(i-1)+1, \dots, mi\}$, $\{m(j-1)+1, \dots, mj\}$ графа G_1^{mn} . Для вершины $i \in G_m^n$ проведем столько петель, сколько ребер соединяют вершины внутри множества $m(i-1)+1, \dots, mi \in G_1^{mn}$.

Обозначим $\rho(i, j)$ длину наименьшего пути (то есть состоящего из минимального числа ребер), соединяющего вершины i и j рассматриваемого графа. Для набора вершин B введем обозначение

$$\rho(i, B) = \inf_{j \in B} \rho(i, j).$$

Положим

$$\text{diam}(G) = \sup_{i, j \in G} \rho(i, j).$$

Теорема 1. Пусть $m \geq 2$ фиксировано и $0 < \varepsilon < 1/4$. Тогда

$$\mathbf{P}(|\text{diam}(G_m^n) \ln \ln n / \ln n - 1| \geq \varepsilon) \leq n^{-\varepsilon/2}$$

для всех достаточно больших n .

Замечание 1. С минимальными изменениями в доказательстве можно получить утверждение теоремы 1 с заменой диаметра на средний диаметр (то есть на среднее расстояние между двумя случайно выбранными вершинами), используемый, например, в [13]. В отличие от $\text{diam } G$, данная характеристика имеет существенно больше приложений в статистике (см., например, [13]). В формулировке со средним диаметром теорема 1 может быть использована для проверки адекватности модели графа преимущественного присоединения тем или иным реальным объектам (частям сети интернета, социальным сетям и другим).

Автор благодарен своему научному руководителю А. В. Булинскому за помощь и внимание, а также признателен М. Митценмахеру, любезно согласившемуся предоставить электронные версии своих статей.

2. Доказательство

Нижняя оценка в утверждении теоремы 1 вытекает из следующего результата.

Лемма 1. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$, любого $m \in \mathbb{N}$ и всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\mathbf{P}(\text{diam}(G_m^n), (1 - \varepsilon) \ln n / \ln \ln n) \leq n^{3\varepsilon/4}. \quad (1)$$

Доказательство этой леммы проводится аналогично рассуждениям работы [10] и поэтому здесь не приводится.

Обратимся к верхней оценке. Положим $N = mn$. Введем набор $X_1, \dots, X_{2N}$ независимых случайных величин, равномерно распределенных на $(0, 1)$. Пусть

$$Y_i = \min(X_{2i-1}, X_{2i}), \quad Z_i = \max(X_{2i-1}, X_{2i}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Рассмотрим вариационный ряд $Z_{(1)}, \dots, Z_{(N)}$, построенный по случайным величинам $Z_i, i = 1, \dots, N$. Положим

$$R_i = Z_{(i)}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Если $Z_{(i)}(\omega) = Z_{j_k(\omega)}(\omega)$, то пусть $L_i(\omega) = Y_{j_k(\omega)}(\omega)$, где $\omega \in \Omega$. Другими словами, мы перенумеровали правые концы интервалов (Y_i, Z_i) и в итоге получили набор интервалов $(L_i, R_i), i = 1, \dots, N$.

Рассмотрим случайные величины

$$W_0 = 0, \quad W_k = R_{m_k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad w_k = W_k - W_{k-1}.$$

Для каждого $k = 1, \dots, n$ введем набор случайных величин $l_{k,1}, \dots, l_{k,m}$ по правилу

$$\{l_{k,i} = j\} = \{W_{j-1} < L_{m(k-1)+i} \leq W_j\}, \quad j = 1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим граф с n вершинами, в котором каждая вершина i посылает ребра к вершинам с номерами $l_{i,1}, \dots, l_{i,m}$. Боллобаш и Риордан показали, что данный граф является графом преимущественного присоединения G_m^n . Случайную величину ω_i мы будем называть весом вершины $i \in G_m^n$.

Введем ряд новых обозначений. Пусть $a \in \mathbb{N}$ — это минимальное число такое, что $2^a \geq (\ln n)^\kappa$ для некоторой постоянной $\kappa > 6$. Зададим $b \in \mathbb{N}$ как максимальное число такое, что $2^b \leq 2n/3$. Пусть

$$I_t = [2^t + 1, 2^{t+1}] \cap \mathbb{N}, \quad a \leq t \leq b.$$

Определение 2 ([10]). Вершина i называется полезной, если $i < n/(\ln n)^5$ и ее вес $w_i \geq (\ln n)^2/n$. Множество $U_n \subseteq \{1, \dots, n\}$ будет обозначать множество полезных вершин. Пусть $\delta_g > 0$ — постоянная, значение которой будет выбрано позднее.

Определение 3 ([10]). Вершина i называется хорошей, если ее вес $w_i \geq \delta_g/\sqrt{in}$. Множество хороших вершин обозначим G_n .

Лемма 2. Пусть $0 < \delta < 1/2$, $0 < \gamma < 1$, $\varepsilon_1 < 1/6$ — постоянные, значения которых будут выбраны далее,

$$E_1 = \{ |W_i - \sqrt{i/n}| \leq \delta \sqrt{i/n} \text{ для всех } i, (\ln n)^{1+\gamma} \leq i \leq n \},$$

$$E_2 = \{ |I_t \cup G_n| \geq 2^{t-1} \text{ для всех } t, a \leq t \leq b \},$$

$$E_3 = \{ w_i \leq n^{-1/2-\varepsilon_1} \text{ для всех } i, i > n/(\ln n)^5 \},$$

$$E_4 = \{ i \in U_n \text{ для всех } i, i < n^{2\varepsilon_1} \}.$$

Тогда справедливы оценки

$$\mathbf{P}(\bar{E}_1) \leq n^{-\alpha}, \quad \mathbf{P}(\bar{E}_i \cap E_1) \leq n^{-\alpha}$$

для любого $\alpha < 1/2 - 3\varepsilon_1$, $i = 2, 3, 4$, и всех достаточно больших n .

Доказательство. Покажем, что событие $\bar{E}_1$ выполняется с малой вероятностью. Для этого оценим вероятности событий

$$A_1^i = \{W_i \leq (1 - \delta)\sqrt{i/n}\}, \quad A_2^i = \{W_i \geq (1 + \delta)\sqrt{i/n}\}$$

при $(\ln n)^{1+\gamma} \leq i \leq n$.

Рассмотрев величину

$$\xi = |W_i - (1 - \delta)\sqrt{i/n}|$$

и оценив хвост биномиального распределения, легко показать, что

$$\mathbf{P}(A_1^i) = \mathbf{P}(\xi \geq im) \leq \exp(-\delta(2 - \delta)im)$$

Аналогично можно получить верхнюю оценку $\mathbf{P}(A_2^i)$. Отсюда, с учетом того, что $\gamma > 0$, легко получить оценку вероятности события $\bar{E}_1$ для любого $\alpha > 0$.

Оценим теперь вероятность события E_2 . Аналогично оценке вероятности E_2 в лемме 5 из [10], для любого $y > 0$ получаем неравенство

$$\mathbf{P}(w_i \leq y \mid W_i) \leq 2n(2(1 + \delta)y\sqrt{i/n} + y^2).$$

Таким образом, при $2^\alpha + 1 \leq i \leq 2n/3$, $y = \delta_g/\sqrt{in}$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(w_i < \delta_g/\sqrt{in} \mid W_{i-1}) \leq 4(1 + \delta)\delta_g + \delta_g^2/(\ln n)^\alpha.$$

Для δ_g , δ таких, что $8(1 + \delta)\delta_g < 1$ и для всех $v_1 < 8(1 + \delta)\delta_g$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(w_i < \delta_g/\sqrt{in} \mid W_{i-1}) \leq (1 - v_1)/2/$$

Введем обозначение

$$B_i = \{w_i < \delta_g/\sqrt{in}\}.$$

В силу определения события E_1 справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(B_i \cap E_1 \mid W_{i-1}) \leq (1 - v_1)/2.$$

Аналогично оценкам из [10], для случайной величины

$$\zeta_t = |\{i \in I_t : w_i < \delta_g/\sqrt{in}\}|I_{E_1}$$

приходим к неравенству

$$\mathbf{P}(\zeta_t > 2^t) \leq \exp(-2^{t-1}v_1).$$

Следовательно, для всех достаточно больших n и любого $\alpha > 0$

$$\mathbf{P}(\bar{E} \cap E_1) \geq \sum_{t=a}^{b-1} \exp(-2^{t-1}v_1) \leq n^{-\alpha}.$$

Оценим $\mathbf{P}(\bar{E}_3 \cap E_1)$. Пусть выполняется $E_3 \cap E_1$. Положим $v_2 = n^{-1/2-\varepsilon_1}$. Тогда для некоторых $x \in ((\ln n)^{-3}, 1 - v_2)$ интервал $[x, x + v_2]$ не содержит W_i и, следовательно, содержит не более $m - 1$ случайных величин R_i . Положим $v_3 = v_2/(m + 1)$. Каждый интервал $[x, x + v_2]$ содержит m непересекающихся интервалов вида $[tv_3, (t + 1)v_3]$, где $(\ln n)^{-3} \leq t \leq (1 - v_2)/v_3$, один из которых должен не содержать ни одного Z_i . Отсюда для любого $\alpha > 0$ легко получить оценку вероятности $\mathbf{P}(\bar{E}_3 \cap E_i)$, приведенную в утверждении леммы.

Пусть выполняется событие $\bar{E}_4 \cap E_i$ и $v_4 = (\ln n)^2/n$. Тогда из E_1 следует, что $W_{\lceil n^{\varepsilon_1} \rceil} \leq (1 + \delta)n^{-1/2+\varepsilon_1}$, а из $\bar{E}_4$ следует, что некоторый интервал $[x, x + v_4]$ для $0 \leq x < (1_\delta)n^{-1/2} + \varepsilon_1$ содержит значения не менее двух случайных величин W_i и W_j , $i \neq j$, и следовательно, как минимум значения двух величин из набора $Z_1, \dots, Z_N$. Каждый такой интервал содержится в одном из интервалов $J_t = [tv_4, (t + 2)v_4]$, $0 \leq t \leq n^{1/2+\varepsilon_1}$.

Вероятность того, что Z_i лежит в J_t есть в точности $(4t + 4)v_4^2$, то есть вероятность того, что как минимум две величины из набора $Z_1, \dots, Z_N$ лежат в J_t , не превосходит

$$mn(mn - 1)(4t + 4)^2 v_4^4 / 2 < 8m^2 (\ln n)^8 (t + 1)^2 / n^2.$$

Отсюда легко получить оценку

$$\mathbf{P}(\bar{E}_4 \cap E_1) \leq (\ln n)^9 / n^{1/2-3\varepsilon_1} \leq n^{-\alpha}$$

для $\alpha < 1/2 - \varepsilon_1$ и всех достаточно больших n , что и требовалось доказать.

Напомним, что $\lceil x \rceil$ означает наименьшее целое число, большее или равное $X \in \mathbf{R}$.

Лемма 3. Пусть выполняется событие E_1 и постоянная $S > 0$ фиксирована. Тогда для γ , введенного в лемме 2, и всех достаточно больших n существует $i \leq \lceil (\ln n)^{1+r} \rceil$ такое, что $w_i \geq S/(\sqrt{n} \ln n)$.

Доказательство. Наступление события E_1 влечет выполнение соотношения

$$W_{\lceil (\ln n)^{1+\gamma} \rceil} > \frac{(1 - \delta)(\ln n)^{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}$$

для всех достаточно больших n .

Зафиксируем произвольную постоянную $S > 0$. Предположим, что справедливы неравенства

$$w_i < \frac{S}{\sqrt{n} \ln n}, \quad 1 \leq i \leq \lceil (\ln n)^{1+\gamma} \rceil.$$

Заметим, что

$$W_k = w_1 + \dots + w_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Поэтому для всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$W_{\lceil (\ln n)^{1+\gamma} \rceil} < \frac{2}{\sqrt{n}} S (\ln n)^\gamma.$$

При $0 < \gamma < 1$ последнее неравенство противоречит полученному ранее. Лемма 3 доказана.

Положим случайную величину ξ_n равной первому числу $i \leq \lceil (\ln n)^{1+\nu} \rceil$ такому, что $w_i \geq S/(\sqrt{n} \ln n)$. Если такого числа нет, то полагаем ξ_n равной нулю. Положим

$$E_5 = \{\forall v \in G_m^n, \rho(v, U_n) \leq 6 \ln \ln n\}.$$

Лемма 4. При всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(\bar{E}_5, E_1, \dots, E_4) \leq 2n^{-\varepsilon},$$

где ε введено в лемме 2.

Доказательство леммы опирается на следующие два вспомогательных утверждения (леммы 5 и 6), которые могут быть доказаны при помощи методов, примененных в доказательствах лемм 7 и 8 в [10]. Чтобы не увеличивать объем статьи, мы опускаем их доказательства.

Лемма 5. Пусть наступили события E_1, E_3, E_4 . Для $v, 1 \leq v \leq 2^b$, рассмотрим растущую последовательность множеств $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ такую, что

$$D_0 = \{v\}, \quad D_{k+1} = \{j: j = l_{i,t}, i \in D_k, t = 1, \dots, m\} (D_0 \cup \dots, D_k).$$

Тогда для любых $1 \leq k \leq 6 \ln \ln n$ и $1 \leq c \leq |D_k|$

$$\mathbf{P}(|D_{k+1}| \leq 2|D_k| - c, (D_0 \cup \dots \cup D_{k+1}) \cap U_n = \emptyset \mid D_0, \dots, D_k, R_1, \dots, R_n) \leq n^{(1-\varepsilon_1)c/2}.$$

Лемма 6. Пусть i — фиксированная вершина. Если наступают $E_1, \dots, E_4$, то выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(i \in U_n \text{ или } l_{i,1} \in U_n \mid R_1, \dots, R_n) \geq (\ln n)^{-3}.$$

Доказательство леммы 4. Зафиксируем вершину v . Положим

$$K = 6 \ln \ln n - 1.$$

Пусть реализуются события $E_1, \dots, E_4$. По лемме 5, с вероятностью $1 - n^{-1-\varepsilon_1}$ либо $\rho(v, U_n) \leq K$, либо $|D_k| = 2|D_{k-1}| - 1$ для всех $k, 1 \leq k \leq K$, за исключением, возможно, одного значения, и $|D - k| \geq 2|D_{k-1}|$ для всех $k, 1 \leq k \leq K$. В первом случае все доказано. Предположим, что выполняется второй случай, тогда

$$|D_k| \geq 2^{K-1} = 2^{6 \ln \ln n - 2} = (\ln n)^{6 \ln 2 / 2}.$$

Заметим, что для любых множеств $H_{i,j} \in \{1, 2, \dots, n\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(l_{i,j} \in H_{i,j}, i \in D_k, j = 1, \dots, m \mid D_0, \dots, D_k, R_1, \dots, R_N) \\ = \prod_{i \in D_k} \prod_{j=1}^m \mathbf{P}(l_{i,j} \in H_{i,j} \mid R_1, \dots, R_N). \end{aligned}$$

Если D_k не содержит полезной вершины, то в силу леммы 6 вероятность события

$$A = \{\text{ни одна вершина в } D_k \text{ не имеет полезного соседа}\}$$

допускает оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \mid D_0, \dots, D_k, R_1, \dots, R_N) &\leq \exp(|D_k|/(\ln n^3)) \\ &\leq \exp(-(\ln n)^{6 \ln 2} / (4(\ln n)^3)) \leq n^{-\alpha} \end{aligned}$$

для любого $\alpha > 0$ и всех достаточно больших n . Отсюда следует утверждение леммы 4.

Лемма 7. Пусть $m \geq 2$ и

$$E_6 = \{\forall v \in U_n, \rho(v, \xi_n) \leq (1/2 + \varepsilon/3) \ln n / \ln \ln n\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\bar{E}_6, e_1, \dots, E_4) \leq n^{-3\varepsilon/4}$$

при всех достаточно больших n .

Для доказательства нам потребуется следующее вспомогательное утверждение, которое может быть получено методами, использованными при доказательстве леммы 10 в [10].

Лемма 8. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть $f_0, f_1, \dots$ — последовательность чисел такая, что $f_0 \geq (\ln n)^2/n$ и выполняется соотношение

$$f_{k+1} \geq \delta_1 \min(2 \log_2(f_k n / \ln n) - \delta_2, b - a - 1) f_k \quad (2)$$

для $k \geq 0$. Тогда при всех достаточно больших n

$$l = \min(k: f_k \geq (\ln n)^2 / \sqrt{n}) < M = (1/2 + \varepsilon/3) \ln n / \ln \ln n.$$

Доказательство леммы 7. Рассмотрим вершину $v \in U_n$. Положим $\Gamma_0 = \{v\}$, и пусть Γ_{k+1} состоит из тех $j \in G_n \setminus (\Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_k)$, $2^a \leq j \leq 2^b$, для которых либо $l_{j,2} \in \Gamma_k$, либо существует $i \in \Gamma_k$ такое, что $l_{i,1} = j$. Введем обозначение

$$N_k = \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_k.$$

Введем идеальный вес вершины

$$f_k = \sum_{i \in \Gamma_k} \frac{1}{\sqrt{in}}, \quad k > 0, \quad f_0 = w_v.$$

Следует подчеркнуть, что для $k \geq 1$ множество Γ_k состоит лишь из хороших вершин, поэтому реальный вес этого множества

$$\sum_{i \in \Gamma_k} w_i \geq \delta_g f_k.$$

Назовем интервал I_t заполненным на шаге k , если $|N_k \cap I_t| \geq 2^{t-2}$. Если некоторый интервал I_t заполнен на некотором шаге k , $1 \leq k \leq M = (1/2 + \varepsilon_3) \ln n / \ln \ln n$, то в $N_k \cap I_t$ имеется как минимум $2^{t-2} - 1$ хороших вершин. Отсюда для $x > 6$ приходим к неравенствам

$$f_1 + \dots + f_M \geq \delta_g \frac{2^{t-2} - 1}{\sqrt{2^{t+1}n}} \geq \frac{\delta_g \sqrt{2^t}}{8\sqrt{2n}} \geq \frac{\delta_g (\ln n)^{x/2}}{8\sqrt{2n}} > \frac{(\ln n)^3}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

С учетом оценки $M < \ln n$, применяя метод от противного, легко получить, что $f_l \geq (\ln n)^2 / \sqrt{n}$ для некоторого l .

Пусть теперь для всех $a \leq t \leq b$, $1 \leq k \leq M$ интервалы I_t не являются заполненными на шаге k . В этом случае нам потребуется проверить условия леммы 8. Введем случайную величину

$$\mu_{k,t} = \frac{\delta_g \sqrt{2^t}}{(1+\delta)4\sqrt{2}} \sum_{i \in \Gamma_k \cap I_t} \frac{1}{\sqrt{i}}. \quad (4)$$

Положим $\varepsilon_2 = 3\varepsilon/4$. Следуя доказательству Боллобаша и Риордана, выводим, что

$$\mathbf{P}(|\Gamma_{k=1} \cap I_t| \leq \min\{\mu_{k,t}/4, 2^{t-2} - |n_k \cap I_t|\} | \Gamma_0, \dots, \Gamma_k, R_1, \dots, \mathbf{R}_N) \leq n^{-1-\varepsilon_2} \quad (5)$$

для $\mu_{k,t} \geq C \ln n$, где $C = C(\varepsilon)$.

Заметим, что для всех t , кроме, возможно, одного значения, выполняется неравенство

$$\mu_{k,t} = \frac{\delta_g \sqrt{2^t}}{(1+\delta)4\sqrt{2}} \sum_{i \in \Gamma_k \setminus I_t} \frac{1}{f_k} \geq \frac{\delta_g \sqrt{2^t}}{8\sqrt{2}(1+\delta)} \sqrt{n} f_k. \quad (6)$$

Введем случайное множество

$$V_k = \{t: a \leq t \leq b, \delta_g \sqrt{2^t n} f_k (8\sqrt{2}(1+\delta)) \geq 2C \ln n\}.$$

Прямым подсчетом проверяется, что

$$|V_k| \geq \min\{2 \log_2(f_k n / \ln n) - \delta_{V_k}, b - a\},$$

где $\delta_{V_k} = \delta_{V_k}(\delta_g, \delta, C)$.

Пусть $V'_k \subseteq V_k$ — это случайное множество индексов t , для которых выполняется (6). Выше было показано, что $|V'_k| \geq |V_k| - 1$. Для всех k, t таких, что $t \in V'_k$ верно соотношение (5).

Объединим все те события, для которых вероятности оценены в (5) при всех $A \leq t \leq b$, $0 \leq k \leq M$. Для полученного объединения E_7 справедлива оценка

$$\mathbf{P}(E_7) < 2(\ln n)^2 n^{-1-\varepsilon_3} < n^{-1-\varepsilon_3}$$

при некотором ε_3 таком, что $\varepsilon/2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$, и всех достаточно больших n .

Таким образом, для любого $t \in V'_k$ при осуществлении события $\bar{E}_7$ выполняется соотношение

$$|\Gamma_{k+1} \cap I_t| \geq \delta_g \sqrt{2^t n} f_r / (64\sqrt{2}(1+\delta)).$$

Тогда

$$\sum_{\Gamma_{k+1} \cap I_t} 1/\sqrt{in} \geq \delta_g \sqrt{2^t n} f_k / (64\sqrt{2}(1+\delta)\sqrt{2^{t+1}n}) = \delta_g f_k / (128(1+\delta)),$$

откуда легко получаем оценку

$$f_{k+1} \geq \frac{|V'_k f_k|}{64(1-\delta)} \delta_g \geq \delta_1 \min\{2 \log_2(f_k n \setminus \ln n) - \delta_{V_k}, b - a\} f_k. \quad (7)$$

Введем обозначение

$$L = \min\{l: f_l \geq (\ln n)^2 / \sqrt{n}\}.$$

Так как $v \in U_n$, справедливо неравенство $f_0 = w_v \geq (\ln n)^2/n$. Поскольку (7) выполняется для всех k , $0 \leq k < L$, лемма 8 влечет неравенство

$$L < (1/2 + \varepsilon/3) \ln n / \ln \ln n - 1.$$

Итак, если ни один интервал I_t не заполнен ни на каком шаге k , то с вероятностью $1 - n^{-1-\varepsilon_3}$ выполняется соотношение

$$f_L \geq (\ln n)^2 / \sqrt{n}.$$

По построению,

$$\Gamma_L \cap [1, \lceil (\ln n)^{1+\nu} \rceil] = \emptyset,$$

следовательно, так как E_1 выполняется, по лемме 3 для каждого $i \in \Gamma_L$ и любой константы $S = S(\delta, \varepsilon_2)$

$$\mathbf{P}(l_{i,1} = \xi_n \mid \Gamma_0, \dots, \Gamma_L, R_1, \dots, R_N) = \mathbf{P}(l_{i,1} = \xi_n \mid R_1, \dots, R_N) \geq S / ((1 + \delta) \sqrt{i} \ln n).$$

Пусть

$$B = \{\text{вершины из } \Gamma_L \text{ не посылают ни одного ребра к вершине } \xi_n\}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B \mid \Gamma_0, \dots, \Gamma_L, R_1, \dots, R_N) &\leq \prod_{i \in \Gamma_L} \left(1 - \frac{S}{(1 + \delta) \sqrt{i} \ln n} \right) \\ &\leq \exp \left(- \frac{f_L S \sqrt{n}}{(1 + \delta) \ln n} \right) \leq n^{-1-\varepsilon_2} \end{aligned}$$

для $S = S(\delta, \varepsilon_2) \geq (1 + \varepsilon_2)(1 + \delta)$ и всех достаточно больших n . Следовательно,

$$\rho(v, \xi_n) \leq L \leq M = (1/2 + \varepsilon/3) \ln n / \ln \ln n$$

с вероятностью, большей $1 - n^{-1-\varepsilon_2} - n^{-1-\varepsilon_3}$, где $\varepsilon_3 > \varepsilon/2$. Отсюда легко получить утверждение леммы 7.

Из лемм 2, 4 и 7 вытекает верхняя оценка из утверждения теоремы 1.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2004.
2. Оре О., *Теория графов*. Либрикон, Москва, 2009.
3. Bollobas B., *Random graphs*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
4. Albert R., Barabasi A.-L., Emergence of scaling in random networks. *Science* (1999) **286**, 509–512.
5. Albert R., Barabasi A.-L., Power-law distribution of the world wide web. *Science* (2000) **287**, 2115.
6. Bollobas B., Riordan O., Spencer J., Tusnady G., The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures and Algorithms* (2000) **18**, 279–290.
7. Bollobas B., Riordan O., Robustness and vulnerability of scale-free random graphs. *Internet Math.* (2003) **1**, 1–35.

8. Bollobas B., Riordan O., Coupling of scale-free and classical random graphs. *Internet Math.* (2003) **1**, 215–225.
9. Bollobas B., Riordan O., Mathematical results on scale-free random graphs. In: *Hand Book of Graphs and Networks*. Wiley, Weinheim, 2003, pp. 1–34.
10. Bollobas B., Riordan O., The diameter of a scale-free graph. *Combinatorics* (2004) **24**, 1–34.
11. Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos C., On power-law relationships of internet topology. *Computer Communications Rev.* (1999) **29**, 251–262.
12. Cooper C., Frieze A., A general model of web graphs. *Random Structures and Algorithms* (2003) **22**, 311–335.
13. Kumar R., Novak J., Tomkins A., Structure and evolution of online social networks. In: *Proc. 12th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. ACM, New York, 2006, pp. 611–617.
14. Li L., Anderson D., Doyle J. C., Willinger W., Toward a theory of scale free graphs definition properties and implications. *Internet Math.* (2006) **2**, 431–524.
15. Mitzenmacher M., A brief history of generative models for power law and lognormal distributions. *Internet Math.* (2003) **1**, 226–251.
16. Mitzenmacher M., Editorial: The future of power law research. *Internet Math.* (2006) **2**, 552–534.
17. Mori T., On random trees. *Stud. Sci. Math. Hung.* (2003) **39**, 143–155.
18. Mori T., The maximum degree of the Barabasi–Albert random tree. *Comb. Probab. Comput.* (2005) **14**, 339–348.
19. Willinger W., Anderson D., Doyle J. C., Mathematics and the Internet: A source of enormous confusion and great potential. *Notes of the AMS* (2009) **56**, 586–599.

Статья поступила 5.06.2009.