Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Рожков, Суммирование марковских последовательностей на конечной абелевой группе, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 3, 44–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:27:11

Суммирование марковских последовательностей на конечной абелевой группе

© 2010 г. М. И. Рожков

Работа посвящена исследованию условий, при которых сумма независимых марковских последовательностей на конечной абелевой группе G также является простой однородной цепью Маркова на группе G с некоторой матрицей переходных вероятностей. В математическом плане рассматриваемые задачи касаются известной процедуры укрупнения состояний цепей Маркова. В данной работе развивается метод, основанный на сведении исходной задачи к задаче решения специального вида систем нелинейных уравнений над групповыми алгебрами. Получены новые условия марковости суммы цепей Маркова на произвольной абелевой группе $G = Z_m$.

Получены необходимые и достаточные условия, при которых сумма независимых реализаций исходной цепи Маркова также является простой однородной цепью Маркова.

1. Постановка задачи

Пусть

$$\Gamma^{(i)} = \{\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}, \dots\}, \quad i = 1, \dots, s,$$

— независимые реализации простых однородных цепей Маркова на конечной аддитивной группе G с соответствующими матрицами переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|, \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Положим

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\},$$

где

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^s \gamma_j^{(i)}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Нас будут интересовать условия, при которых элементы последовательности Γ также будут связаны в простую однородную цепь Маркова с некоторой матрицей переходных вероятностей $\pi = \|p(g, h)\|$, $g, h \in G$, не зависящей от начального распределения исходных цепей $\Gamma^{(i)}$, то есть от распределения величин $\gamma_1^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$.

С каждой строкой матрицы

$$\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|, \quad g, h \in G,$$

связем элемент группового кольца DG (данное кольцо является также алгеброй)

$$p^{(i)}(g) = \sum_{h \in G} p^{(i)}(g, h)h,$$

где D — поле действительных (или рациональных) чисел (определение группового кольца и алгебры см. в [4]). Элемент $p^{(i)}(g)$ будем называть также характеристической функцией соответствующей строки матрицы $\pi^{(i)}$.

Известно, что для циклической группы $G = Z_m$ кольцо DG изоморфно кольцу $D[z]/(z^m - 1)$. Изоморфизм задается, например, соответствием

$$\sum_{h \in G=(0,1,\dots,m-1)} p_h h \longleftrightarrow \sum_{h=0}^{m-1} p_h z^h.$$

Поэтому в данной работе для случая $G = Z_m$ под кольцом DG мы будем понимать кольцо $D[z]/(z^m - 1)$, используя при этом указанное выше соответствие между их элементами.

Рассматриваемая задача сводится к решению специального вида систем уравнений над кольцом DG , о чем говорит следующее утверждение.

Теорема 1 ([7]). *Элементы последовательности Γ связаны в простую однородную цепь Маркова с некоторой матрицей переходных вероятностей $\pi = \|p(g, h)\|$, не зависящей от начального распределения исходных цепей $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, \dots, s$, если и только если в кольце DG справедливы соотношения*

$$\prod_{i=1}^s p^{(i)}(g_i) = \prod_{i=1}^s p^{(i)}(\sigma_i) \quad (1)$$

для любых элементов g_i, σ_i , $i = 1, \dots, s$, группы G таких, что

$$\sum_{i=1}^s g_i = \sum_{i=1}^s \sigma_i.$$

Если соотношения (1) имеют место, то величины $p(g) = \sum_{h \in G} p(g, h)h$, $p^{(i)}(g_i)$ связаны в кольце DG следующим образом:

$$p(g) = \prod_{i=1}^s p^{(i)}(g_i), \quad \sum_{i=1}^s g_i = g.$$

2. Случай произвольной абелевой группы

Известно (см., напр., [7]), что в случае абелевой группы G групповое кольцо DG обладает набором ортогональных идемпотентов $e(1), e(2), \dots, e(r)$: $(e(i))^2 = e(i)$, $e(i)e(j) = 0$, $i \neq j$, так что имеет место прямое разложение

$$DG = DGe(1) + \dots + DGe(r) \quad (2)$$

кольца DG в сумму минимальных идеалов $DGe(j)$, являющихся полями (будем обозначать поле $DGe(j)$ через $\mathcal{Q}_j$). При этом без потери общности (см. [4], с. 92, упр. 4) полагаем, что

$$e(1) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h,$$

это влечет за собой изоморфизм полей $DGe(1)$ и D .

Пусть абелева группа G разлагается в прямую сумму циклических подгрупп порядков $m_0, m_1, \dots, m_{t-1}$. Тогда элементы группы G представляются в виде векторов $g = (a_0, a_1, \dots, a_{t-1})$, где a_i — вычет по модулю m_i . Если рассматривать групповое кольцо DG как подкольцо группового кольца группы G над полем комплексных чисел C , то разложение (2) соответствует разложению произвольного элемента

$$p = \sum_{h \in G} p_h h$$

кольца DG , рассматриваемого как комплекснозначная функция $p: G \rightarrow C$, $p(h) = p_h$, на группе G , по характерам группы G :

$$p(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} c_h \chi_h(g),$$

где

$$\chi_\alpha(g) = \exp \left\{ 2\pi i \sum_{j=0}^{t-1} \frac{a_j b_j}{m_j} \right\}, \quad g = (a_0, a_1, \dots, a_{t-1}), \quad \alpha = (b_0, b_1, \dots, b_{t-1}) \in G,$$

— полная система характеров группы G ,

$$c_\alpha = \sum_{h \in G} p_h \bar{\chi}_\alpha(h), \quad \alpha \in G,$$

— коэффициенты Фурье функции $p: G \rightarrow C$.

Теорема 2. Пусть на конечной абелевой группе G заданы $s \geq 2$ цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$ с матрицами переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|, \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Пусть $c^{(i)}(\alpha, \beta)$ — коэффициенты Фурье, отвечающие характеристическим функциям строк матриц $\pi^{(i)}$:

$$c^{(i)}(\alpha, \beta) = \sum_{h \in G} p^{(i)}(\alpha, h) \bar{\chi}_\beta(h), \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Сумма цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$ является цепью Маркова тогда и только тогда, когда при любом фиксированном $\beta \in G$ выполнено одно из следующих условий:

(а) существует такое $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, что для каждого $g \in G$ выполнено равенство

$$c^{(j)}(g, \beta) = 0;$$

(б) существует такой характер $\chi_h = \chi_h(g)$ группы G , что

$$c^{(j)}(g, \beta) = c^{(j)}(0, \beta) \chi_h(g)$$

для каждого $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ и каждого $g \in G$.

Здесь 0 — нулевой элемент группы G и характер χ_h в общем случае свой для каждого элемента $\beta \in G$.

Доказательство данной теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 2 работы [7] с учетом того, что множество гомоморфных отображений конечной абелевой группы G в мультипликативную группу поля комплексных чисел совпадает с множеством характеров группы G .

Из соотношений (1) вытекает следующее общее достаточное условие марковости суммы марковских последовательностей.

Теорема 3. Пусть на конечной абелевой группе G заданы $s \geq 2$ цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$ с матрицами переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|, \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Сумма цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, \dots, s$, также является цепью Маркова, если характеристические функции строк матриц $\pi^{(i)}$ удовлетворяют соотношениям

$$p^{(j)}(g) = p^{(j)}(0) f(g), \quad g \in G, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

где f — гомоморфизм группы G в группу мультипликативно обратимых элементов группового кольца DG .

Доказательство данного утверждения проводится непосредственной проверкой равенств (1). Отметим при этом, что в случае обратимости элементов $p^{(j)}(0)$, $j = 1, 2, \dots, s$, данные условия являются необходимыми и достаточными, что вытекает из леммы 1 работы [7].

Пусть элементы G представимы в виде векторов $g = (a(0), a(1), \dots, a(t-1))$, где $a(i)$ — вычет по модулю $m(i)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда групповое кольцо DG можно рассматривать как кольцо многочленов

$$DG = D[z_0, z_1, \dots, z_{t-1}] / ((z_0)^{m(0)} - 1, \dots, (z_{t-1})^{m(t-1)} - 1)$$

от переменных $z_0, z_1, \dots, z_{t-1}$ по модулю идеала, порожденного многочленами $(z_i)^{m(i)} - 1$, $i = 0, 1, \dots, t-1$. При этом для любых фиксированных $r(i) \in \{0, 1, \dots, m(i)\}$ отображение

$$f(a(0), a(1), \dots, a(t-1)) = (z_0)^{r(0)a(0)} (z_1)^{r(1)a(1)} \dots (z_{t-1})^{r(t-1)a(t-1)}$$

является гомоморфизмом группы G в группу мультипликативно обратимых элементов кольца DG .

Тем самым из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Соотношения (1) выполнены, если в групповом кольце

$$DG = d[z_0, z_1, \dots, z_{t-1}] / ((z_0)^{m(0)} - 1, \dots, (z_{t-1})^{m(t-1)} - 1)$$

справедливы равенства

$$p^{(j)}(g) = p^{(j)}(0, 0, \dots, 0) (z_0)^{r(0)a(0)} (z_1)^{r(1)a(1)} \dots (z_{t-1})^{r(t-1)a(t-1)}, \\ g = (a(0), a(1), \dots, a(t-1)) \in G, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

где $r(i) \in \{0, 1, \dots, m(i)\}$ — произвольные фиксированные числа.

Следующее утверждение свидетельствует о том, что достаточные условия теоремы 3 являются и необходимыми в случае суммирования независимых реализаций одной и той же цепи Маркова.

Теорема 4. Сумма $s \geq 2$ независимых реализаций исходной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$\pi = \|p(g, h)\|, \quad g, h \in G,$$

является цепью Маркова в том и только том случае, когда характеристические функции $p(g)$ строк матрицы π связаны соотношениями

$$p(g) = p(0)f(g), \quad g \in G,$$

где f — гомоморфизм группы G в группу обратимых элементов кольца DG , 0 — нулевой элемент группы G .

Достаточность условий теоремы следует из теоремы 3. Доказательство необходимости проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 3 работы [7]. При этом учитывается лемма 2 той же работы и то, что суммируются марковские последовательности с одной и той же матрицей переходных вероятностей.

Теорема 5. Пусть сумма цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$, заданных на конечной абелевой группе G , с матрицами переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|, \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

является цепью Маркова Γ с матрицей переходных вероятностей $\pi = \|p(g, h)\|$. Тогда сумма независимых реализаций цепей Γ и $\Gamma^{(j)}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, также является цепью Маркова.

Справедливость данной теоремы вытекает из того, что, в соответствии с теоремой 2, необходимые и достаточные условия марковости суммы заданного множества цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$, зависят только от свойств различных матриц из множества всех матриц переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|, \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

исходного множества цепей $\Gamma^{(i)}$.

3. Случай циклической группы

Пусть $G = Z_m$ — циклическая группа вычетов по модулю m . В таком случае кольцо DG изоморфно кольцу $D[z]/(z^m - 1)$ многочленов по модулю многочлена $z^m - 1$ над полем D , и следовательно, в разложении (2) поля Q_j изоморфны полям $D[z]/f_j(z)$, $j = 1, 2, \dots, r$, где $z^m - 1 = f_1 f_2 \dots f_r$, $f_1 = z - 1$ есть разложение многочлена $z^m - 1$ на неприводимые множители над полем D (см. [4], с. 161, упр. 7).

В соответствии с китайской теоремой об остатках (см. [6], с. 39), образом элемента

$$p = \sum_{i=0}^{m-1} p_i z^i \in D[z]/(z^m - 1)$$

при изоморфизме

$$D[z]/(z^m - 1) \sim \sum_{j=1}^r D[z]/f_j(z),$$

является вектор $(p(1), p(2), \dots, p(r))$, $p(j) \in D[z]/f_j(z)$, $p(j) = p \pmod{f_j(z)}$, $j = 1, \dots, r$, где $\sum$ — знак прямой внешней суммы (с покомпонентным выполнением операций сложения и умножения).

Отметим также, что все гомоморфные отображения $f: Z_m \rightarrow D[z]/(z^m - 1)$ задаются корнями θ уравнения $y^m - 1 = 0$ в кольце $D[z]/(z^m - 1)$:

$$f(j) = \theta^j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Теорема 6. Пусть на группе $G = Z_m$ заданы $s \geq 2$ марковских последовательностей $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$, с матрицами переходных вероятностей $\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|$, $g, h \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, с элементами из поля D действительных (рациональных) чисел.

Тогда сумма цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$, является цепью Маркова в том и только в том случае, когда в кольце $DG = D[z]/(z_m - 1)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} p^{(j)}(0) &= 0 \pmod{d_j}, & p^{(j)}(g) &= \{((z^m - 1)/d)d_j\lambda^{(j)}(g) + p^{(j)}(0)\}\theta^g, \\ g &= 0, 1, \dots, m-1, & j &= 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (3)$$

где $d_1, d_2, \dots, d_s$ — попарно взаимно простые делители многочлена $z^m - 1$, $d = d_1 d_2 \dots d_s$ (некоторые из многочленов d_j могут быть равны 1), θ — корень уравнения $y^m - 1 = 0$ в кольце $D[z]/(z^m - 1)$, $\lambda^{(j)}(g)$ — произвольные элементы кольца $D[z]/(z^m - 1)$ такие, что

$$\deg \lambda^{(j)}(g) < \deg \prod_{t \neq j} d_t.$$

При этом в соотношениях (3) можно выбрать многочлены $d_1, d_2, \dots, d_s$ такими, что многочлен $(z^m - 1)/d$ будет взаимно прост с каждым из многочленов $p^{(j)}(g)$, $g = 0, 1, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Для доказательства теоремы нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 1. Пусть $z^m - 1 = q_1 q_2 \dots q_t$ — некоторое разложение многочлена $z^m - 1$ на множители. Тогда равенства (1) имеют место в кольце $D[z]/(z^m - 1)$ тогда и только тогда, когда они верны в каждом из колец $D[z]/q_i$, $i = 1, \dots, t$.

Справедливость данного утверждения вытекает из того, что в силу отсутствия у многочлена $z^m - 1$ кратных корней множителя $q_1, q_2, \dots, q_t$ обязательно попарно взаимно просты. Это влечет за собой разложимость кольца $D[z]/(z^m - 1)$ в прямую сумму колец $D[z]/q_i$.

Предложение 2. Пусть $d = d(z)$ — произвольный делитель многочлена $z^m - 1$ и θ_* — произвольный корень уравнения $y^m - 1 = 0$ над кольцом $D[z]/d(z)$. Тогда существует корень θ уравнения $y^m - 1 = 0$ над кольцом $D[z]/(z^m - 1)$, при котором выполнено равенство

$$\theta = \theta_* \pmod{d(z)}.$$

Справедливость данного утверждения очевидным образом следует из китайской теореме об остатках.

Предложение 3. Пусть величины $p^{(j)}(g)$, $g = 0, 1, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots, s$, являются обратимыми элементами некоторого коммутативного кольца Q и выполнены равенства (1). Тогда существует гомоморфизм f группы G в группу обратимых элементов кольца Q такой, что для каждого $j = 1, 2, \dots, s$ и $g \in G$ справедливо соотношение

$$p^{(j)}(g) = p^{(j)}(0)f(g).$$

Данный результат легко усматривается из хода доказательства случая 2 леммы 2 работы [7].

Доказательство теоремы 6. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда нетрудно видеть, что система равенств (1) будет справедлива для каждого из колец $D[z]/d_i(z)$, $i = 0, 1, \dots$, где через $d_0(z)$ обозначен многочлен $(z^m - 1) : (d_1 d_2 \dots d_s)$. В силу предложения 1 достаточность условий теоремы доказана.

Пусть теперь в кольце $D[z]/(z^m - 1)$ выполнены соотношения (1). Тогда они будут выполняться по модулю любого неприводимого делителя $q = q(z)$ многочлена $z^m - 1$, то есть в поле $D[z]/q(z)$. Учитывая лемму 2 работы [7], получаем, что либо $q(z)$ взаимно прост с каждым из многочленов $p^{(j)}(g)$, $g = 0, 1, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots, s$, либо существует такое $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, при котором каждый из многочленов $p^{(j)}(g)$, $g = 0, 1, \dots, m-1$, делится на $q(z)$. Следовательно, существуют делители $d_1, d_2, \dots, d_s$ многочлена $z^m - 1$ такие, что при любом $g \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ многочлен $p^{(j)}(g)$ делится на d_j , и одновременно многочлен $(z^m - 1) : (\text{LCM}\{d_1, d_2, \dots, d_s\})$ взаимно прост с каждым из многочленов $p^{(j)}(g)$, $g = 0, 1, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots, s$, где через $\text{LCM}\{\cdot\}$ обозначено наименьшее общее кратное соответствующих многочленов.

Заметим также, что без потери общности многочлены $d_1, d_2, \dots, d_s$ можно считать попарно взаимно простыми, поскольку для любых $d_1, d_2, \dots, d_s$ найдутся попарно взаимно простые $q_1, q_2, \dots, q_s$ такие, что каждый многочлен q_i является делителем многочлена d_i и одновременно

$$\prod_{i=1}^s q_i = \text{LCM}\{q_1, q_2, \dots, q_s\} = \text{LCM}\{d_1, d_2, \dots, d_s\}.$$

Так как равенства (1) справедливы и над кольцом $D[z]/((z^m - 1) : d)$, $d = d_1 d_2 \dots d_s$, в силу предложения 3 найдется корень ρ уравнения $y^m - 1 = 0$ над кольцом $D[z]/((z^m - 1) : d)$, при котором для всех $g = 0, 1, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots, s$ выполнено равенство

$$p^{(j)}(g) = p^{(j)}(0)\rho^g \pmod{(z^m - 1) : d). \quad (4)$$

В силу предложения 2 найдется корень θ уравнения $y^m - 1 = 0$ над кольцом $D[z]/(z^m - 1)$ такой, что $\theta = \rho \pmod{(z^m - 1) : d}$. Легко видеть, что равенство (4) останется верным при замене в нем величины ρ на θ . Поэтому в кольце $D[z]/(z^m - 1)$ будет выполнено соотношение

$$p^{(j)}(g) = p^{(j)}(0)\theta^g + \beta^{(j)}(g)((z^m - 1) : d),$$

где $\beta^{(j)}(g)$ — некоторые элементы кольца $D[z]/(z^m - 1)$.

Далее, $p^{(j)}(g) = 0 \pmod{d_j}$ при любом $g \in G = \{0, 1, \dots, m-1\}$, поэтому при некоторых $\gamma^{(j)}(g) \in D[z]/(z^m - 1)$ будут верны равенства

$$\beta^{(j)}(g) = \gamma^{(j)}(g)d_j, \quad g \in G.$$

Учитывая обратимость величины θ , отсюда получаем, что

$$p^{(j)}(g) = \{((z^m - 1)/d)d_j\lambda^{(j)}(g) + p^{(j)}(0)\}\theta^g, \quad g \in G, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

где

$$\lambda^{(j)}(g) = \gamma^{(j)}(g)\theta^{-g}.$$

При этом величины $\lambda^{(j)}(g)$ без потери общности могут быть выбраны так, что

$$\deg \lambda^{(j)}(g) < \deg \prod_{t \neq j} d_t.$$

На этом доказательство теоремы 6 завершено.

При использовании представлений (3) для построения цепей Маркова необходимо учитывать то обстоятельство, что многочлены $p^{(j)}(i)$ вида (3), отвечающие характеристическим многочленам строк матриц переходных вероятностей, должны быть вероятностными, то есть обладать неотрицательными коэффициентами, сумма которых равна 1. В этой связи отметим, что сумма коэффициентов многочлена $p^{(j)}(i)$ равна 1 в том и только том случае, когда многочлен $p^{(j)}(i)$ принимает значение 1 в точке $z = 1$. Отсюда, в частности, следует, что при вероятностных многочленах $p^{(j)}(i)$ многочлены $d_1, d_2, \dots, d_s$, фигурирующие в формулах (3), взаимно просты с многочленом $z - 1$.

Известно (см. теорему 4 в [7]), что в случае циклических групп простого порядка и рациональности матриц переходных вероятностей исходных цепей Маркова сумма цепей является цепью Маркова только в том случае, когда строка матрицы переходных вероятностей любой исходной цепи получена циклическим сдвигом предыдущей строки на фиксированное число позиций.

Следующее утверждение показывает, что для любых циклических групп четного порядка $G = Z_m$, $m = 2k$, $k > 1$, существуют и другие классы цепей Маркова (в том числе и с рациональными матрицами переходных вероятностей), сумма которых также является цепью Маркова.

Теорема 7. Пусть на группе $G = Z_m$, $m = 2k$, заданы $s \geq 2$ цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$, с матрицей переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|, \quad g, h \in \{0, 1, \dots, m-1\},$$

где

$$p^{(i)}(g, h) = \begin{cases} p^{(i)}(0, h + gr), & \text{если } g \text{ четно,} \\ (2/m) - p^{(i)}(0, h + gr), & \text{если } g \text{ нечетно,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

и r , $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, — произвольное фиксированное число, операции сложения и умножения над элементами $g, h \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ проводятся по модулю m . Тогда сумма цепей $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$, является цепью Маркова на группе $G = Z_m$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что для произвольной абелевой группы G , $|G| = m$, элемент

$$\theta = \frac{2}{m} \sum_{h \in G} h - 1 \in DG$$

является корнем уравнения $t^2 - 1 = 0$ над кольцом DG . При этом умножение θ на произвольный элемент

$$p = \sum_{h \in G} p_h h \in DG, \quad \sum_{h \in G} p_h = 1,$$

приводит к элементу

$$(p\theta) = \sum_{h \in G} (2/m - p_h)h.$$

Тогда в условиях теоремы многочлены

$$p^{(t)}(i) = \sum_{j=1}^{m-1} p^{(t)}(i, j)z^j$$

будут связаны в кольце $D[z]/(z^m - 1)$ соотношениями

$$p^{(i)}(j) = p^{(i)}(0)\theta^j z^{(m-r)j}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

где

$$\theta = \frac{2}{m} \sum_{j=0}^{m-1} z^j - 1.$$

Отображение

$$f(j) = \theta^j z^{(m-r)j}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

является гомоморфизмом группы $G = Z_m$ в группу обратимых элементов кольца $D[z]/(z^m - 1)$, поэтому справедливость теоремы вытекает из теоремы 3.

Приведенный в теореме 7 класс матриц шире класса матриц, каждая строка которых является циклическим сдвигом предыдущей строки на заданное число позиций. Об этом свидетельствует следующий пример.

Пусть в условиях теоремы $m = 2r$, $r = 0$ и первая строка матрицы $\pi^{(i)}$ имеет вид

$$p^{(i)}(0, 0) = \frac{1}{2k} + \varepsilon(2k - 1), \quad p^{(i)}(0, 1) = p^{(i)}(0, 2) = \dots = p^{(i)}(0, 2k - 1) = \frac{1}{2k} - \varepsilon,$$

где ε — ненулевое действительное (рациональное) число, $\varepsilon < 1/(2k(2k - 1))$. Тогда вторая строка данных матриц будет иметь вид

$$p^{(i)}(1, 0) = \frac{1}{2k} + \varepsilon(2k - 1), \quad p^{(i)}(1, 1) = p^{(i)}(1, 2) = \dots = p^{(i)}(1, 2k - 1) = \frac{1}{2k} + \varepsilon.$$

В таком случае при $m > 2$ у первой строки будет $2k - 1 > 1$ элементов, меньших величины $1/(2k)$, а у второй строки такой элемент будет в точности один. Значит, вторая строка не может являться циклическим сдвигом первой строки.

4. Описание гомоморфных отображений группы G в DG для случая циклической группы $G = Z_{2p}$ и рациональности матриц переходных вероятностей

Пусть $G = Z_m$ — циклическая группа вычетов по модулю m , $m = 2p$, p — простое нечетное число, и матрицы переходных вероятностей рассматриваемых цепей Маркова являются рациональными.

В этом случае групповое кольцо $DG = D[z]/(z^m - 1)$ рассматриваем как кольцо многочленов по модулю многочлена $z^m - 1$ над полем рациональных чисел D . Известно (см. [4], с. 139–141), что разложение над полем рациональных чисел имеет вид

$$z^n - 1 = \prod \Phi_d(z),$$

где произведение берется по всем делителям $d \in \{1, 2, \dots, n\}$ числа n , $\Phi_d(z)$ — полином деления круга порядка d , вычисляемый по формуле

$$\Phi_d(z) = \prod (x^r - 1)^{\mu(d/r)}$$

(произведение берется по всем делителям $r \in \{1, 2, \dots, d\}$ числа d , $\mu(\cdot)$ — функция Мебиуса).

Следовательно, над полем рациональных чисел многочлен $z^{2p} - 1$ разлагается на неприводимые множители следующим образом:

$$z^{2p} - 1 = \Phi_1 \Phi_2 \Phi_p \Phi_{2p},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi(z) = z - 1, & \Phi_2 &= \Phi_2(z) = z + 1, \\ \Phi_p &= \Phi_p(z) = \sum_{j=0}^{p-1} z^j, & \Phi_{2p} &= \Phi_{2p}(z) = \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j z^j. \end{aligned}$$

Таким образом, кольцо $D[z]/(z^{2p} - 1)$ разлагается в прямую сумму полей

$$D[z]/(z^{2p} - 1) = D[z]/\Phi_1 + D[z]/\Phi_2 + D[z]/\Phi_p + D[z]/\Phi_{2p}.$$

Так как любое гомоморфное отображение f циклической группы $G = Z_m$ в группу обратимых элементов кольца $D[z]/(z^m - 1)$ имеет вид $f(g) = \theta^g$, $g \in G$, где θ — корень уравнения $y^m - 1 = 0$ над кольцом $D[z]/(z^m - 1)$, для описания всех гомоморфных отображений из G в $D[z]/(z^{2p} - 1)$ достаточно найти в кольце $D[z]/(z^{2p} - 1)$ множество A всех решений уравнения

$$y^{2p} - 1 = 0. \quad (5)$$

Пусть A_i — множество всех решений уравнения $y^{2p} - 1 = 0$ над полем $D[z]/\Phi_i$, $i \in \{1, 2, p, 2p\}$. По китайской теореме об остатках, для произвольного решения θ данного уравнения над кольцом $D[z]/(z^{2p} - 1)$ имеем представление

$$\begin{aligned} \theta &= a_1((z^{2p} - 1)/\Phi_1)^{-1} \pmod{\Phi_1} ((z^{2p} - 1)/\Phi_1) \\ &\quad + a_2((z^{2p} - 1)/\Phi_2)^{-1} \pmod{\Phi_2} ((z^{2p} - 1)/\Phi_2) \\ &\quad + a_p((z^{2p} - 1)/\Phi_p)^{-1} \pmod{\Phi_p} ((z^{2p} - 1)/\Phi_p) \\ &\quad + a_{2p}((z^{2p} - 1)/\Phi_{2p})^{-1} \pmod{\Phi_{2p}} ((z^{2p} - 1)/\Phi_{2p}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $a_i \in A_i$, $i \in \{1, 2, p, 2p\}$.

Поле $D[z]/\Phi_i$, $i \in \{1, 2\}$, изоморфно полю D , поэтому $A_1 = A_2 = \{1, -1\}$. В каждом же из оставшихся полей $D[z]/\Phi_i$, $i \in \{p, 2p\}$, уравнение (5) имеет точно $2p$ различных решений, а именно,

$$A_p = A_{2p} = \{\pm 1, \pm z, \pm z^2, \dots, \pm z^{p-1}\}.$$

Тем самым, общее число решений вида (6) равно $16p^2$.

Отметим также, что решение $\theta = \theta(z)$ уравнения (5), удовлетворяющее дополнительному условию $\theta(z = 1) = 1$ (то есть сумма коэффициентов многочлена $\theta(z)$ равна 1), получается из представления (6) в том и только том случае, когда $a_1 = 1$. Общее число таких решений равно $8p^2$.

При $a_1 = -1$ сумма коэффициентов многочлена $\Theta(z)$ всегда равна минус единице. Все такие решения получаются умножением на минус единицу решений $\theta(z)$, принимающих значение 1 в точке $z = 1$.

Отметим также, что если $\theta = \theta(z)$ — корень уравнения $y^{2p} - 1 = 0$ над кольцом $D[z]/(z^{2p} - 1)$, и многочлен $q(z)$ является вероятностным, то условие равенства единице многочлена $\theta(z)$ в точке $z = 1$ является необходимым условием вероятности произведения многочленов $q(z)$ и $\theta(z)$.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} ((z^{2p} - 1)/\Phi_1)^{-1} \pmod{\Phi_1} &= \frac{1}{2p}, \\ ((z^{2p} - 1)/\Phi_2)^{-1} \pmod{\Phi_2} &= -\frac{1}{2p}, \\ ((z^{2p} - 1)/\Phi_p)^{-1} \pmod{\Phi_p} &= -\frac{1}{2p}(z^{p-2} + 2z^{p-3} + 3z^{p-4} + \dots \\ &\quad + (p-2)z + (p-1)), \\ ((z^{2p} - 1)/\Phi_{2p})^{-1} \pmod{\Phi_p} &= \frac{1}{2p}(z^{p-2} - 2z^{p-3} + 3z^{p-4} + \dots \\ &\quad + (p-2)z - (p-1)), \end{aligned}$$

получаем следующие равенства в кольце $D[z]/(z^{2p} - 1)$:

$$\begin{aligned} ((z^{2p} - 1)/\Phi_1)^{-1} \pmod{\Phi_1} ((z^{2p} - 1)/\Phi_1) &= \frac{1}{2p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j, \\ ((z^{2p} - 1)/\Phi_2)^{-1} \pmod{\Phi_2} ((z^{2p} - 1)/\Phi_2) &= -\frac{1}{2p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j, \\ ((z^{2p} - 1)/\Phi_p)^{-1} \pmod{\Phi_p} ((z^{2p} - 1)/\Phi_p) &= -\frac{1}{2p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j + \frac{1}{2}(z^p + 1), \\ ((z^{2p} - 1)/\Phi_{2p})^{-1} \pmod{\Phi_{2p}} ((z^{2p} - 1)/\Phi_{2p}) &= \frac{1}{2p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j - \frac{1}{2}(z^p - 1). \end{aligned}$$

Из (6)–(7) получаем общий вид решений уравнения (5) над кольцом $D[z]/(z^{2p} - 1)$:

$$\theta = \frac{1}{2p}(a_1 - a_3) \sum_{j=0}^{2p-1} z^j + \frac{1}{2p}(a_4 - a_2) \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j + \frac{1}{2}(a_3 - a_4)z^p + \frac{1}{2}(a_3 + a_4) \quad (7)$$

и соответственно общий вид такого решения при дополнительном условии, когда сумма

коэффициентов многочлена $\theta(z)$ равна 1:

$$\theta = \frac{1}{2^p}(1 - a_3) \sum_{j=0}^{2p-1} z^j + \frac{1}{2^p}(a_4 - a_2) \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j + \frac{1}{2}(a_3 - a_4)z^p + \frac{1}{2}(a_3 + a_4). \quad (8)$$

Пусть

$$q(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q_{2p-1} z^{2p-1}$$

— произвольный многочлен. Тогда в кольце $D[z]/(z^{2p} - 1)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} q(z) \sum_{j=0}^{2p-1} z^j &= w \sum_{j=0}^{2p-1} z^j, & w &= q_0 + q_1 + \dots + q_{2p-1}, \\ z \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j &= - \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j, \\ \left(\sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j \right)^2 &= -2p \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j, \\ q(z) \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j &= (2\alpha - 1) \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j, & \alpha &= q_0 + q_2 + q_4 + \dots + q_{2p-2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим также, что любой корень $\theta = \theta(z)$ уравнения $y^{2p} - 1 = 0$ над кольцом $D[z]/(z^{2p} - 1)$ представим в виде $\theta = \rho\sigma$, где ρ — корень уравнения $y^2 - 1 = 0$ над кольцом $D[z]/[z^{2p} - 1]$, σ — корень уравнения $y^p - 1 = 0$ над кольцом $D[z]/(z^{2p} - 1)$. При этом корни уравнения $y^2 - 1 = 0$ получаются из представления (8) независимым выбором коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4 из множества $\{1, -1\}$, причем условие $a_1 = 1$ равносильно тому, что значение многочлена $\rho = \rho(z)$ в точке $z = 1$ равно 1. Соответствующие случаю $a_1 = 1$ корни уравнения $y^2 - 1 = 0$ приведены в табл. 1.

Аналогичным образом корни уравнения $y^p - 1 = 0$ получаются из представления (8) при $a_1 = a_2 = 1$ и независимого выбора коэффициентов a_3, a_4 из множества $\{1, z, z^2, \dots, z^{p-1}\}$. При этом получаем два семейства решений (см. табл. 2).

Из табл. 1–2 получаем 16 семейств решений уравнений $y^{2p} - 1$ в кольце $D[z]/(z^{2p} - 1)$, приведенные в табл. 3.

Таким образом, с учетом теоремы 4 настоящей работы и леммы 3 работы [7] получаем следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть на группе $G = Z_{2p}$, где p — простое нечетное число, задана цепь Маркова Γ с рациональной матрицей переходных вероятностей

$$\pi = \|p(g, h)\|, \quad g, h \in G.$$

- (1) Сумма $s \geq 2$ независимых реализаций цепи Маркова Γ является цепью Маркова в том и только том случае, когда характеристические функции

$$p(i) = \sum_{j=0}^{2p-1} p(i, j) z^j$$

Таблица 1.

№	a_2	a_3	a_4	$\rho = \rho(z)$
1.	1	1	1	$\rho_1 = \rho(z) = 1$
2.	-1	1	-1	$\rho_2 = \rho(z) = z^p$
3.	-1	1	1	$\rho_3 = \rho(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j + 1$
4.	1	1	-1	$\rho_4 = \rho(z) = z^p - \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j$
5.	-1	-1	-1	$\rho_5 = \rho(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j - 1$
6.	1	-1	1	$\rho_6 = \rho(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j - z^p$
7.	-1	-1	1	$\rho_7 = \rho(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j + \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j - z^p$
8.	1	-1	-1	$\rho_8 = \rho(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j - \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j - 1$

Таблица 2.

№	a_3	a_4	$\sigma = \sigma(z)$
1.	z^j	z^{2t}	$\sigma_1 = \sigma(z) = \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) + \frac{1}{2}(z^{2t} - z^{2t+p}),$ $j = 0, 1, \dots, p-1, t = 0, 1, \dots, (p-1)/2$
2.	z^j	z^{2t-1}	$\sigma_2 = \sigma(z) = -\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j + \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) + \frac{1}{2}(z^{2t-1} - z^{2t+p-1}),$ $j = 0, 1, \dots, p-1, t = 1, 2, \dots, (p-1)/2$

строк матрицы π связаны в кольце $D[z]/(z^{2p} - 1)$ соотношениями

$$p(i) = p(0)\theta^i, \quad i \in G = \{0, 1, \dots, 2p-1\},$$

где θ — произвольный заданный элемент из табл. 3.

- (2) Если цепь Маркова Γ является суммой $s \geq 2$ цепей с рациональными матрицами переходных вероятностей, то характеристические функции π связаны в кольце $D[z]/(z^{2p} - 1)$ соотношениями

$$p(i) = p(0)\theta^i, \quad i = 1, 2, \dots, 2p-1,$$

где θ — произвольный заданный элемент из табл. 3.

Таблица 3.

№	ρ	σ	$\theta = \theta(z) = \rho\sigma$
1.	ρ_1	σ_1	$\theta(z) = \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) + \frac{1}{2}(z^{2t} - z^{2t+p})$
2.	ρ_1	σ_2	$\theta(z) = -\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j + \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) + \frac{1}{2}(z^{2t-1} - z^{2t+p-1})$
3.	ρ_2	σ_1	$\theta(z) = \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) - \frac{1}{2}(z^{2t} - z^{2t+p})$
4.	ρ_2	σ_2	$\theta(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j + \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) - \frac{1}{2}(z^{2t-1} - z^{2t+p-1})$
5.	ρ_3	σ_1	$\theta(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j + \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) + \frac{1}{2}(z^{2t} - z^{2t+p})$
6.	ρ_3	σ_2	$\theta(z) = \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) + \frac{1}{2}(z^{2t-1} - z^{2t+p-1})$
7.	ρ_4	σ_1	$\theta(z) = -\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j + \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) - \frac{1}{2}(z^{2t} - z^{2t+p})$
8.	ρ_4	σ_2	$\theta(z) = \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) - \frac{1}{2}(z^{2t-1} - z^{2t+p-1})$
9.	ρ_5	σ_1	$\theta(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j - \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) - \frac{1}{2}(z^{2t} - z^{2t+p})$
10.	ρ_5	σ_2	$\theta(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j + \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j - \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) - \frac{1}{2}(z^{2t-1} - z^{2t+p-1})$
11.	ρ_6	σ_1	$\theta(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j - \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) + \frac{1}{2}(z^{2t} - z^{2t+p})$
12.	ρ_6	σ_2	$\theta(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j + \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j - \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) + \frac{1}{2}(z^{2t-1} - z^{2t+p-1})$
13.	ρ_7	σ_1	$\theta(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j + \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j - \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) + \frac{1}{2}(z^{2t} - z^{2t+p})$
14.	ρ_7	σ_2	$\theta(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j - \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) + \frac{1}{2}(z^{2t-1} - z^{2t+p-1})$
15.	ρ_8	σ_1	$\theta(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j - \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} (-1)^{j+1} z^j - \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) - \frac{1}{2}(z^{2t} - z^{2t+p})$
16.	ρ_8	σ_2	$\theta(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2p-1} z^j - \frac{1}{2}(z^j + z^{j+p}) - \frac{1}{2}(z^{2t-1} - z^{2t+p-1})$

5. Случай группы четвертого порядка

Существуют две абелевы группы четвертого порядка: циклическая группа $G = Z_4$ и элементарная абелева 2-группа $G = Z_2 \times Z_2$.

Для группы $G = Z_4$ все гомоморфные отображения из Z_4 в $D[x]/(x^4 - 1)$ получены при доказательстве теоремы 5 работы [7].

Рассмотрим теперь случай группы $G = Z_2 \times Z_2$. В этом случае групповое кольцо DG будем представлять кольцом многочленов от двух переменных по модулю идеала, порожденного многочленами $x^2 - 1$ и $y^2 - 1$,

$$DG = D[x, y]/(x^2 - 1, y^2 - 1).$$

Любой гомоморфизм f группы $G = Z_2 \times Z_2$ в группу обратимых элементов кольца DG представляется следующим образом:

$$f(a, b) = (\theta_1)^a (\theta_2)^b, \quad a, b \in \{0, 1\},$$

θ_1, θ_2 — элементы кольца DG , являющиеся корнями уравнения $z^2 - 1 = 0$. При этом гомоморфизм f полностью определяется своими значениями на двух элементах группы $G = Z_2 \times Z_2$

$$f(1, 0) = \theta_1, \quad f(0, 1) = \theta_2.$$

Так как кольцо DG есть прямая сумма четырех полей действительных чисел D , уравнение $z^2 - 1 = 0$ имеет в этом кольце в точности 16 решений. Непосредственной проверкой можно убедиться, что множество решений указанного уравнения есть объединение трех множеств

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x^\alpha y^\beta \mid \alpha, \beta = 0, 1\}, \\ M_2 &= \frac{1}{2}(-1 + x + y + xy)M_1, \\ M_3 &= (-1)\{M_1 \cup M_2\}. \end{aligned}$$

При этом сумма коэффициентов для любого многочлена из множества M_3 равна минус единице.

Таким образом, в силу леммы 3 работы [7] справедлив следующий аналог теоремы 5 работы [7].

Теорема 9. Пусть $G = Z_2 \times Z_2$ и цепь Маркова Γ с матрицей переходных вероятностей

$$\pi = \|\pi(i, j)\|, \quad (i, j) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1),$$

допускает разложение в сумму $s \geq 2$ цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$. Тогда характеристические многочлены $p(i) \in D[x, y]/(x^2 - 1, y^2 - 1)$,

$$p(i) = p(i, (0, 0)) + p(i, (1, 0))x + p(i, (0, 1))y + p(i, (1, 1))xy,$$

$i \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, строк матрицы π связаны соотношениями

$$\begin{aligned} p(1, 0) &= p(0, 0)((1/2)(-1 + x + y + xy))^\varepsilon x^a y^b, & \varepsilon, a, b &\in \{0, 1\}, \\ p(0, 1) &= p(0, 0)((1/2)(-1 + x + y + xy))^\delta x^c y^d, & \delta, c, d &\in \{0, 1\}, \\ p(1, 1) &= p(0, 0)((1/2)(-1 + x + y + xy))^{\delta+\varepsilon} x^{c+a} y^{d+b}, \end{aligned}$$

при этом сложение в показателях степеней производится по модулю два.

Отметим, что умножение многочлена $(1/2)(-1 + x + y + xy)$ на вероятностный многочлен $q(0, 0) + q(1, 0)x + q(0, 1)y + q(1, 1)xy$, $\sum q(i, j) = 1$, приводит к многочлену $((1/2) - q(0, 0)) + ((1/2) - q(1, 0))x + ((1/2)q(0, 1))y + ((1/2) - q(1, 1))xy$.

Замечание 1. В доказательстве теоремы 9 описаны все гомоморфные отображения группы $G = Z_2 \times Z_2$ в кольцо $D[x, y]/(x^2 - 1, y^2 - 1)$, поэтому в силу теоремы 4 данная теорема дает также полное описание цепей Маркова на группе $G = Z_2 \times Z_2$, сумма $s \geq 2$ независимых реализаций которых также является цепью Маркова.

Замечание 2. С учетом теоремы 4 настоящей работы теорема 5 работы [7] дает полное описание цепей Маркова на группе $G = Z_4$, сумма $s \geq 2$ независимых реализаций которых также является цепью Маркова.

6. Заключительные замечания

По аналогии с вероятностными многочленами элемент

$$p = \sum_{h \in G} p(h)h$$

группового кольца DG будем называть вероятностным, если

$$\sum_{h \in G} p(h) = 1, \quad p(h) \geq 0.$$

Теоремы 3 и 4 показывают актуальность задачи описания вероятностных элементов кольца DG и гомоморфизмов группы G в DG таких, что произведение $pf(g)$ также будет вероятностным элементом при любом $g \in G$.

В этой связи представляет интерес следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть G — конечная абелева группа, D — поле действительных (рациональных) чисел,

$$f = f(g) = \sum_{h \in G} f(g, h)h$$

— произвольный гомоморфизм группы G в группу обратимых элементов кольца DG такой, что

$$\sum_{h \in G} f(g, h) = 1$$

для любого элемента $f(g)$, $g \in G$. Тогда существует бесконечное множество вероятностных элементов

$$p = \sum_{h \in G} p(h)h, \quad \sum_{h \in G} p(h) = 1, \quad p(h) > 0,$$

для которых произведение $pf(g)$ также будет вероятностным элементом при любом $g \in G$.

Доказательство. Через M обозначим максимальное значение абсолютных величин коэффициентов $f(g, h)$, $g, h \in G$. Пусть

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} \varepsilon(h)h,$$

где $\varepsilon(h)$ — произвольные элементы поля D такие, что

$$|\varepsilon(h)| < \frac{1}{|G|^2} \frac{1}{M}, \quad \sum_{h \in G} \varepsilon(h) = 0.$$

Тогда

$$pf(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} \sum_{r \in G} (\varepsilon(r) f(g, h - r)) h.$$

Заметим далее, что для абсолютной величины любого коэффициента элемента $pf(g)$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{r \in G} \varepsilon(r) f(g, h - r) \right| < \frac{1}{|G|^2} \frac{1}{M} M |G| = \frac{1}{|G|}.$$

Отсюда следует, что все коэффициенты элемента $pf(g)$ положительны, и утверждение доказано.

Идеи, использовавшиеся при доказательстве предложения 4, позволяют доказать также следующее утверждение.

Предложение 5. Для произвольной циклической группы $G = Z_m$, $m \geq 4$, над полем действительных чисел существует бесконечное множество матриц переходных вероятностей $\pi = \|p(g, h)\|$, $g, h \in G$, обладающих следующими свойствами.

- (1) При любом $g \in G$, $g \neq 0$, строка матрицы π , соответствующая элементу g , не является циклическим сдвигом первой строки (соответствующей нулевому элементу группы).
- (2) Характеристические функции строк матрицы π удовлетворяют соотношениям

$$p(g) = p(0) f(g), \quad g \in G, \quad (10)$$

где $f = f(g)$ — гомоморфное отображение группы G в группу обратимых элементов кольца DG .

Доказательство. Как показано в [7], число всех гомоморфных отображений f циклической группы G в группу обратимых элементов кольца $DG = D[z]/(z^m - 1)$ равно $m^{(m-1)/2}$ при нечетном m и $4m^{(m-1)/2}$ при четном m , среди которых m отображений имеют вид

$$f_h = f_h(g) = z^{hg}, \quad h, g \in \{0, 1, \dots, m-1\} \quad (11)$$

и соответствуют случаю, когда строка матрицы π , соответствующая элементу g , является циклическим сдвигом первой строки, соответствующей нулевому элементу группы.

Так как при $m > 3$ число рассматриваемых гомоморфных отображений больше, чем m , существует гомоморфизм f , не имеющий вида (12). В таком случае для доказательства утверждения достаточно показать, что в классе матриц переходных вероятностей, характеристические функции строк которых обладают свойством (11), существуют матрицы с обратимым элементом $p(0)$.

Докажем, что при любом заданном $\varepsilon > 0$ среди построенных при доказательстве предложения 4 вероятностных элементов $pf(g)$ существуют классы, отвечающие мультипликативно обратимым в кольце $DG = D[z]/(z^m - 1)$ элементам p вида

$$p = p(z) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} z^h + \sum_{h \in G} \varepsilon(h) z^h, \quad (12)$$

где

$$\sum_{h \in G} \varepsilon(h) = 0, \quad |\varepsilon(h)| < \varepsilon.$$

Действительно, при изоморфизме

$$D[z]/(1 - z^m) \sim \sum_{j=1}^r D[z]/f_j(z),$$

многочлену p такого вида соответствует вектор $(p(1), \dots, p(r))$, $p(j) \in D[z]/f_j(z)$, $p(j) = p \pmod{f_j(z)}$, причем $p(1) = 1$.

При этом множеству многочленов $\sum_{h \in G} \varepsilon(h) z^h$ с нулевой суммой коэффициентов соответствует множество векторов $w = (0, w(2), w(3), \dots, w(r))$, где элемент $w(j)$ принадлежит соответствующему полю $D[z]/f_j(z)$.

Пусть многочлену $\sum_{h \in G} \varepsilon(h) z^h$ соответствует вектор $w = (0, w(2), w(3), \dots, w(r))$ с ненулевыми координатами $w(j)$, $j = 2, 3, \dots, r$. Тогда соответствующий многочлен p вида (13) обратим в кольце $D[z]/(z^m - 1)$. При этом коэффициенты многочлена $\sum_{h \in G} \varepsilon(h) z^h$ можно выбрать по абсолютной величине сколь угодно малыми без потери обратимости соответствующего многочлена вида (13), заменяя при необходимости многочлен $\sum_{h \in G} \varepsilon(h) z^h$ на многочлен $(1/M) \sum_{h \in G} \varepsilon(h) z^h$ при подходящем натуральном M . На этом доказательство завершено.

Вместе с тем остается актуальной задача описания явного вида матриц π переходных вероятностей, характеристические функции строк которых удовлетворяют соотношениям (11). При этом с точки зрения описания всех разложений цепи Маркова, матрица переходных вероятностей которой задана соотношениями (11), в сумму составляющих цепей важной является задача нахождения в кольце $D[z]/(z^m - 1)$ всех разложений многочлена $p(0)$:

$$p(0) = p^{(1)}(0)p^{(2)}(0) \dots p^{(s)}(0),$$

при которых вероятностными являются все многочлены

$$p^{(j)}(0)f(g), \quad g \in G, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Следующий пример показывает, что из вероятностности многочленов $p(0)f(g)$, $g \in G$ не всегда автоматически следует вероятностность всех многочленов $p^{(j)}(0)f(g)$.

Пример 1. Пусть

$$G = Z_4, \quad p = p(z) = p_1(z)p_2(z), \quad p_1(z) = p_2(z) = \frac{1}{2} + \varepsilon + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)z, \\ 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), \quad f(g) = \theta^g, \quad \theta = \frac{1}{2}(1 + z + z^2 + z^3) - 1.$$

Так как

$$p_1(z)\theta = -\varepsilon + \varepsilon z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3,$$

данный многочлен не является вероятностным. В то же время любой многочлен $pf(g)$ является вероятностным в силу того, что все коэффициенты многочлена

$$p = p_1(z)p_2(z) = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon^2\right)z + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2 z^2$$

меньше $1/2$.

В заключение приведем пример, который показывает, что сохранение марковости при любых укрупнениях состояний исходных цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$, заданных на группе G с матрицами переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = \|h^{(i)}(g, h)\|, \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

еще не гарантирует марковости их суммы.

Пример 2. Пусть $G = Z_3$, $\lambda = 0,5$, $p_0 = 0,1$, $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$, и матрица вероятностей перехода $\pi^{(i)}$ цепи $\Gamma^{(i)}$ задается таблицей

$p_0(1-\lambda) + \lambda$	$p_1(1-\lambda)$	$p_2(1-\lambda)$
$p_0(1-\lambda)$	$p_1(1-\lambda) + \lambda$	$p_2(1-\lambda)$
$p_0(1-\lambda)$	$p_1(1-\lambda)$	$p_2(1-\lambda + \lambda)$

В таком случае, на основании результатов работы [3], цепь $\Gamma^{(i)}$ сохраняет марковость при любых укрупнениях состояний. В то же время сумма цепей $\Gamma^{(i)}$ не может являться цепью Маркова, так как строки матрицы $\pi^{(i)}$, задаваемой таблицей

11/20	1/5	1/4
1/20	7/10	1/4
1/20	1/5	3/4

не могут быть получены циклическим сдвигом одной из другой (см. [7]).

Список литературы

1. Burke C., Rosenblatt M., A Markovian function of a Markov chain. *Ann. Math. Stat.* (1958) **29**, 1112–1122.
2. Сарманов О. В., Захаров В. К., Меры зависимости между случайными величинами и спектры стохастических ядер и матриц. *Матем. сб.* (1960) **52 (94)**, №4, 953–990.
3. Сарманов О. В., Захаров В. К., Укрупнение состояний цепи Маркова и стационарное изменение спектра. *Докл. АН СССР* (1965) **160**, №4, 762–764.
4. Кэртис Ч., Рейнер И., *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*. Наука, Москва, 1969.
5. Кемени Дж., Снелл Дж., *Конечные цепи Маркова*. Наука, Москва, 1970.
6. Берлекэмп Э., *Алгебраическая теория кодирования*. Мир, Москва, 1971.
7. Рожков М. И., О суммировании цепей Маркова на конечной группе. *Труды по дискретной математике* (2000) **3**, 195–214.

Статья поступила 13.04.2007.

Переработанный вариант поступил 15.02.2008.