Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Кравченко, О числе совпадений двух однородных случайных блужданий с положительными приращениями, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 3, 63–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:01:40

О числе совпадений двух однородных случайных блужданий с положительными приращениями

© 2010 г. И. А. Кравченко

В работе изучается распределение случайной величины, равной числу совпадений двух однородных случайных блужданий с положительными независимыми приращениями. Данная случайная величина есть длина подпоследовательности общих элементов в двух случайных последовательностях, являющихся случайными подпоследовательностями одной и той же случайной последовательности. Для рассматриваемой случайной величины получено асимптотическое выражение для ее математического ожидания, а также установлена предельная теорема в предположении существования конечной дисперсии у последовательных промежутков между совпадениями двух случайных блужданий. Для частного случая случайных блужданий с приращениями 1 и 2 доказана конечность указанной дисперсии и получено ее выражение через параметры распределения случайных блужданий.

1. Введение

Исследованиям вероятностных свойств последовательных совпадений знаков в различных случайных последовательностях посвящено ряд работ. В работе [1] получены оценки для математического ожидания максимальной длины общей подпоследовательности двух независимых последовательностей равновероятных испытаний. В работах [2, 3] в контексте решения криптографических задач, упомянутых в [4], изучалось совместное распределение числа плотных серий в случайной последовательности со значениями в конечном алфавите, в частности, получены предельные теоремы для числа плотных серий единиц заданных длин и длины, не меньшей заданной, а также для максимальной длины плотной серии единиц.

Одна из задач, возникающих при наблюдении в случайные моменты времени множества объектов, характеризующихся соответствующими последовательностями своих состояний, состоит в исследовании распределения длины подпоследовательности общих элементов двух случайных последовательностей, которые, в свою очередь, являются случайными подпоследовательностями одной и той же случайной последовательности.

Рассмотрим два случайных блуждания на множестве натуральных чисел:

$$\tau_i = \{\tau_i(t)\}_{t=1}^{\infty}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь

$$\tau_i(t) = \sum_{r=1}^t h_r^{(i)}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

где $\{h_r^{(i)}\}_{r=1}^\infty$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины; распределение $h_1^{(i)}$ невырождено и сосредоточено на решетке натуральных чисел с максимальным шагом 1; математическое ожидание a случайной величины $h_1^{(i)}$ конечно, $a > 1$; $i = 1, 2$; τ_1, τ_2 независимы, и распределения $h_1^{(1)}, h_1^{(2)}$ совпадают.

Определим случайную величину

$$L_{N,M} = \sum_{t=1}^N \sum_{m=1}^M I(\tau_1(t) = \tau_2(m)),$$

где $I(\tau_1(t) = \tau_2(m))$ — индикатор события $\{\tau_1(t) = \tau_2(m)\}$; $t \geq 1$; $m \geq 1$. Очевидно, $L_{N,M}$ есть число совпадений двух однородных случайных блужданий τ_1, τ_2 с положительными приращениями на отрезках натуральных чисел $\{1, \dots, N\}, \{1, \dots, M\}$ соответственно.

2. Основные результаты

Относительно математического ожидания $L_{N,M}$ верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{E}(h_1^{(1)})^4 < \infty$. Тогда, если $N, M \rightarrow \infty$ так, что величина $(N - M)/(N + M)^{1/2}$ сходится к конечному числу λ , то имеет место асимптотическое равенство

$$\mathbf{E}L_{N,M} = \frac{N + M}{2a} \left(1 + O\left(\frac{\ln(N + M)}{(N + M)^{1/2}}\right) \right).$$

Доказательство. Получим выражение для математического ожидания случайной величины $L_{N,M}$, считая, без ограничения общности, что $M \geq N$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}L_{N,M} &= \sum_{t=1}^N \sum_{m=1}^M P(t, m) \\ &= \sum_{n=2}^N \sum_{t=1}^{n-1} P(t, n-t) + \sum_{n=N+1}^M \sum_{t=1}^N P(t, n-t) + \sum_{n=M+1}^{N+M} \sum_{t=n-M}^N P(t, n-t), \end{aligned}$$

где

$$P(t, m) = \mathbf{P}(\tau_1(t) = \tau_2(m))$$

— вероятность того, что случайные последовательности τ_1 и τ_2 совпадают в моменты t и m соответственно, $t \geq 1, m \geq 1$.

Введем обозначение

$$Q_n(k, r) = \sum_{t=k}^r P(t, n-t),$$

где $k \geq 1, r \geq 1, n \geq k + 1, n \geq r + 1$, при этом $Q_n(k, r) = 0$, если $k < r$.

Тогда

$$\mathbf{E}L_{N,M} = \sum_{n=2}^N Q_n(1, n-1) + \sum_{n=N+1}^M Q_n(1, N) + \sum_{n=M+1}^{N+M} Q_n(n-M, N).$$

Вероятность $P(t, n-t)$ есть вероятность того, что сумма n независимых решетчатых случайных величин $\{H_1^{(1)}, \dots, H_t^{(1)}, H_1^{(2)}, \dots, H_{n-t}^{(2)}\}$ равна 0. При этом распределение $H_1^{(1)}, \dots, H_t^{(1)}$ одно и то же и совпадает с распределением $h_1^{(1)}$. Распределение $H_1^{(2)}, \dots, H_{n-t}^{(2)}$ одно и то же и совпадает с распределением $-h_1^{(1)}$. Распределения случайных величин $\{H_1^{(1)}, \dots, H_t^{(1)}, H_1^{(2)}, \dots, H_{n-t}^{(2)}\}$ сосредоточены на решетке целых чисел с максимальным шагом, равным 1. В силу условия теоремы $\mathbf{E}(h_1^{(1)})^4 < \infty$, имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}H_1^{(1)} &= a, & \mathbf{D}H_1^{(1)} &= \sigma^2, & \mathbf{E}(H_1^{(1)} - a)^3 &= a_3, \\ \mathbf{E}H_1^{(2)} &= -a, & \mathbf{D}H_1^{(2)} &= \sigma^2, & \mathbf{E}(H_1^{(2)} + a)^3 &= -a_3, \\ \sigma^2 &= \mathbf{E}(h_1^{(1)} - a)^2, & \sigma^2 < \infty, & a_3 = \mathbf{E}(h_1^{(1)} - a)^3, & |a_3| < \infty, & a_3 = \gamma_3, \end{aligned}$$

где γ_3 — кумулянт третьего порядка случайной величины $h_1^{(1)} - a$.

Применимость локальной предельной теоремы ([6], гл. VII, §3 и §1, гл. VI, §1) с использованием асимптотических разложений для последовательности решетчатых случайных величин, распределения которых совпадают либо с распределением $h_1^{(1)}$, либо с распределением $-h_1^{(1)}$, непосредственно проверяется.

Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} P(t, n-t) &= (\sigma n^{1/2})^{-1} ((2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/1\} \\ &+ n^{-1/2} (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} H_3(-x_{t,n}) \frac{\gamma_3}{6\sigma^2 a} x_{t,n} n^{-1/2} \\ &+ n^{-1} (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} \\ &\times \left(H_6(-x_{t,n}) \frac{\gamma_3^2}{72\sigma^4 a^2} x_{t,n}^2 n^{-1} + H_4(-x_{t,n}) \frac{\gamma_4}{24\sigma^4} \right) + o(n^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$x_{t,n} = (2t-n)((\sigma/a)n^{1/2})^{-1} = (t-2n/4)((\sigma/a)\sqrt{n/4})^{-1}, \quad 1 \leq t \leq n-1,$$

и γ_4 — кумулянт четвертого порядка случайной величины $(h_1^{(1)} - a)$ (он конечен в силу конечности $\mathbf{E}(h_1^{(1)})^4$), $H_m(x)$ — полином Чебышева–Эрмита степени m .

Положим

$$\Delta_n = (\sigma/a \sqrt{(n/4)})^{-1}.$$

Тогда из асимптотического представления вероятностей $P(t, n-t)$ вытекают следующие

соотношения для величин $Q_n(k, r)$:

$$\begin{aligned}
 Q_n(k, r) &= \sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} \sigma^{-1} n^{-1/2} \\
 &\quad + \sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} H_3(-x_{t,n}) \frac{\gamma_3}{6\sigma^2 a} x_{t,n} \sigma^{-1} n^{-3/2} \\
 &\quad + \sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} H_6(-x_{t,n}) \frac{\gamma_3^2}{72\sigma^4 a^2} x_{t,n}^2 \sigma^{-1} n^{-5/2} \\
 &\quad + \sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} H_4(-x_{t,n}) \frac{\gamma_4}{24\sigma^4} \sigma^{-1} n^{-3/2} + o(|r-k|n^{-3/2}) \\
 &= (2a)^{-1} \sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-1/2 x_{t,n}^2\} \Delta_n \\
 &\quad + \sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-1/2 x_{t,n}^2\} H_3(-x_{t,n}) x_{t,n} \Delta_n \frac{\gamma_3}{12\sigma^2 a^2} n^{-1} \\
 &\quad + \sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} H_6(-x_{t,n}) x_{t,n}^2 \Delta_n \frac{\gamma_3^2}{144\sigma^4 a^3} n^{-2} \\
 &\quad + \sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-1/2 x_{t,n}^2\} H_4(-x_{t,n}) \Delta_n \frac{\gamma_4}{48\sigma^4 a} n^{-1} + o(|r-k|n^{-3/2}).
 \end{aligned}$$

Суммы

$$\begin{aligned}
 &\sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} H_3(-x_{t,n}) x_{t,n} \Delta_n, \\
 &\sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} H_6(-x_{t,n}) x_{t,n}^2 \Delta_n, \\
 &\sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} H_4(-x_{t,n}) \Delta_n
 \end{aligned}$$

суть части интегральных сумм с шагом разбиения Δ_n для абсолютно сходящихся интегралов (с ограниченными подынтегральными функциями)

$$\begin{aligned}
 &(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x^2/2\} H_3(-x) x \, dx, \\
 &(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x^2/2\} H_6(-x) x^2 \, dx, \\
 &(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x^2/2\} H_4(-x) \, dx
 \end{aligned}$$

соответственно. Следовательно, рассматриваемые суммы ограничены.

Сумма

$$\sum_{t=k}^r (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x_{t,n}^2/2\} \Delta_n$$

есть интегральная сумма с шагом разбиения Δ_n для абсолютно сходящегося интеграла (с ограниченной подынтегральной функцией)

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{x_{k,n}}^{x_{r,n}} \exp\{-x^2/2\} dx.$$

Используя неравенства для оценки интегральных сумм (см. [7], с. 132), можно утверждать, что данный интеграл отличается от рассматриваемой интегральной суммы на величину порядка шага разбиения Δ_n , то есть на величину $O(n^{-1/2})$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$ для величины $Q_n(k, r)$, $k \geq r$, имеет место представление

$$Q_n(k, r) = (2a)^{-1} (2\pi)^{-1/2} \int_{x_{k,n}}^{x_{r,n}} \exp\{-x^2/2\} dx + O(n^{-1/2}) + o(|k - r|n^{-3/2}).$$

Далее, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} Q_n(1, n-1) &= (2a)^{-1} (2\pi)^{-1/2} \int_{x_{1,n}}^{x_{n-1,n}} \exp\{-x^2/2\} dx + O(n^{-1/2}) \\ &= (2a)^{-1} + O(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

поскольку $x_{1,n} = -x_{n-1,n}$, $x_{n-1,n} \geq 0$, $|x_{n-1,n}| = O(n^{1/2})$, и

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{x_{1,n}}^{x_{n-1,n}} \exp\{-x^2/2\} dx = 1 - \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n = O(n^{-1/2})$. Отсюда получаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=2}^N Q_n(1, n-1) = (2a)^{-1} N + O(N^{1/2}).$$

Далее, при $n \rightarrow \infty$, $n > N$,

$$Q_n(1, N) = (2a)^{-1} (2\pi)^{-1/2} \int_{x_{1,n}}^{x_{N,n}} \exp\{-x^2/2\} dx + O(n^{-1/2}) + o(Nn^{-3/2}).$$

Согласно условию теоремы, при $N, M \rightarrow \infty$ величина $(N - M)/(N + M)^{1/2}$ стремится к конечному числу λ , откуда следует, что величина M имеет порядок величины N . Тогда при $N \rightarrow \infty$, $N < n \leq M$, величина $x_{1,n}$ будет отрицательной и $x_{1,n} = O(N^{1/2})$, а величина $x_{N,n}$ будет положительной и $x_{N,n} = O(N^{1/2})$. Здесь

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{x_{1,n}}^{x_{N,n}} \exp\{-x^2/2\} dx = 1 + O(N^{-1/2}),$$

поэтому отсюда получаем, что при $N, M \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^M Q_n(1, N) &= (2a)^{-1} (M - N) + O(|M - N|N^{-1/2}) + o(|M - N|N \cdot N^{-3/2}) \\ &= (2a)^{-1} (M - N) + O(|M - N|N^{-1/2}). \end{aligned}$$

Далее, при $n \rightarrow \infty$ ($M < n \leq M + N$)

$$Q_n(n - M, N) = (2a)^{-1}(2\pi)^{-1/2} \int_{x_{n-M,n}}^{x_{N,n}} \exp\{-x^2/2\} dx + O(n^{-1/2}) + o(|N + M - n|n^{-3/2}).$$

Из условия теоремы, состоящего в том, что величина $(N - M)/(N + M)^{1/2}$ стремится при $N, M \rightarrow \infty$ к конечному числу λ , следует, что величина N имеет порядок величины M . Тогда при $M \rightarrow \infty$, $M < n \leq M + N$, величина $x_{n-M,n}$ будет неположительной и иметь порядок $|(n/2 - M)n^{-1/2}|$, а величина $x_{N,n}$ будет иметь порядок $|(N - n/2)n^{-1/2}|$. При $x \rightarrow \infty$

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp\{-y^2/2\} dy = 1 - \varepsilon(x),$$

где $\varepsilon(x) > 0$ и $\varepsilon = O(x^{-1})$, поэтому при $N, M \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{n=M+1}^{M+N} Q_n(n - M, N) &= (2a)^{-1}(2N - M) + O\left(\sum_{n=M+1}^{2N-1} |n^{1/2}(N - n/2)^{-1}|\right) + O(1) \\ &+ O\left(\sum_{n=2N+1}^{M+N} |n^{1/2}(N - n/2)^{-1}|\right) \\ &+ O\left(\sum_{n=M+1}^{M+N} |n^{1/2}(n/2 - M)^{-1}|\right) + O\left(\sum_{n=M+1}^{M+N} n^{-1/2}\right) \\ &+ O\left(\sum_{n=M+1}^{M+N} (N + M - n)M^{-3/2}\right) \\ &= (2a)^{-1}N + (2a)^{-1}(N - M) + O((M + N)^{1/2} \ln(N + M)) \\ &+ O((M + N)^{1/2} - M^{1/2}) + O(N^2 M^{-3/2}) \\ &= (2a)^{-1}N + O((M + N)^{1/2} \ln(N + M)). \end{aligned}$$

Окончательно, учитывая все полученные оценки, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}L_{N,M} &= (2a)^{-1}N + O(N^{1/2}) + (2)^{-1}(M - N) + O((N - M)N^{-1/2}) \\ &+ (2a)^{-1}N + O((M + N)^{1/2} \ln(N + M)) \\ &= (2a)^{-1}(N + M) + O((M + N)^{1/2} \ln(N + M)). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы закончено.

В работе [5] исследовалась последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $\{(\eta_k^{(1)}, \eta_k^{(2)})\}_{k=1}^{\infty}$, где случайные величины $\eta_k^{(1)}, \eta_k^{(2)}$ принимают натуральные значения и суть последовательные промежутки между совпадениями τ_1 и τ_2 , то есть, выполняются равенства

$$\tau_1 \sum_{j=1}^k \eta_j^{(1)} = \tau_2 \sum_{j=1}^k \eta_j^{(2)}$$

для любого $k \geq 1$ и $\tau_1(t_1) \neq \tau_2(t_2)$, если

$$\sum_{j=1}^{k-1} \eta_j^{(i)} < t_i < \sum_{j=1}^k \eta_j^{(i)}, \quad \sum_{j=1}^0 \eta_j^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Имеют место равенства

$$\mathbf{E}\eta_k^{(1)} = \mathbf{E}\eta_k^{(2)} = a$$

(см. [5]).

Верна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

- (1) существует конечная ненулевая дисперсия $\sigma^2 = \mathbf{D}h_1^{(1)} = \mathbf{D}h_1^{(2)}$,
- (2) существует конечная ненулевая дисперсия $\Lambda^2 = \mathbf{D}\eta_1^{(1)} = \mathbf{D}\eta_1^{(2)}$,
- (3) при $N, M \rightarrow \infty$ величина $(N - M)/(N + M)^{1/2}$ сходится к конечному числу λ .

Тогда для любого конечного x

$$\mathbf{P}\left(\frac{L_{N,M} - (N + M)/(2a)}{\sqrt{(N + M)\Lambda^2/(2a^3)}} \geq x\right) \rightarrow \mathbf{P}\left(\xi_1 \leq -x + \frac{\lambda}{\Lambda}(a/2)^{1/2}, \xi_2 \leq -x - \frac{\lambda}{\Lambda}(a/2)^{1/2}\right),$$

где случайный вектор (ξ_1, ξ_2) распределен по нормальному закону с вектором средних значений $(0, 0)$ и матрицей вторых моментов $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, $\rho = 1 - \sigma^2/(\Lambda^2 a)$.

Доказательство. Из определения случайных векторов $\{(\eta_k^{(1)}, \eta_k^{(2)})\}_{k=1}^\infty$ следует справедливое при любом натуральном n соотношение

$$\mathbf{P}(L_{N,M} \geq n) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n \eta_k^{(1)} \leq N, \sum_{k=1}^n \eta_k^{(2)} \leq M\right).$$

Пусть x — некоторое число. Положим

$$\hat{n} = [(N + M)/(2a) + x\sqrt{(N + M)\Lambda^2/(2a^3)}],$$

где $[y]$ — целая часть числа y ; если $N, M \rightarrow \infty$, то $\hat{n} \rightarrow \infty$, и тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{L_{N,M} - (N + M)/(2a)}{\sqrt{(N + M)\Lambda^2/(2a^3)}} \geq x\right) \\ = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\hat{n}} \frac{(\eta_k^{(1)} - a)}{\Lambda \hat{n}^{1/2}} \leq \frac{N - \hat{n}a}{\sqrt{\Lambda^2 \hat{n}}}, \sum_{k=1}^{\hat{n}} \frac{(\eta_k^{(2)} - a)}{\Lambda \hat{n}^{1/2}} \leq \frac{M - \hat{n}a}{\sqrt{\Lambda^2 \hat{n}}}\right). \end{aligned}$$

Из условий теоремы следует, что

$$\begin{aligned} \frac{N - \hat{n}a}{\sqrt{\Lambda^2 \hat{n}}} &= \frac{(N - M)/2 - x\sqrt{(\Lambda^2/(2a))(N + M)} + O(1)}{\sqrt{(\Lambda^2/(2a))(N + M)(1 + O(x(N + M)^{-1/2}) + O(1))}} \rightarrow \frac{\lambda}{\Lambda} \left(\frac{a}{2}\right)^{1/2} - x, \\ \frac{M - \hat{n}a}{\sqrt{\Lambda^2 \hat{n}}} &= \frac{-(N - M)/2 - x\sqrt{(\Lambda^2/(2a))(N + M)} + O(1)}{\sqrt{(\Lambda^2/(2a))(N + M)(1 + O(x(N + M)^{-1/2}) + O(1))}} \rightarrow \frac{\lambda}{\Lambda} \left(\frac{a}{2}\right)^{1/2} - x, \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}\left(\frac{\eta_k^{(1)} - a}{\Lambda}\right)\left(\frac{\eta_k^{(2)} - a}{\Lambda}\right) = \Lambda^{-2}\mathbf{E}(\eta_k^{(1)}\eta_k^{(2)} - a^2).$$

В работе [5] получено соотношение

$$\mathbf{E}(\eta_k^{(1)} - \eta_k^{(2)})^2 = 2\sigma^2/a.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}(\eta_k^{(1)} \eta_k^{(2)}) = \Lambda^2 + a^2 - \sigma^2/a.$$

Поэтому

$$\mathbf{E} \left(\frac{\eta_k^{(1)} - a}{\Lambda} \right) \left(\frac{\eta_k^{(2)} - a}{\Lambda} \right) = \Lambda^{-2}(\Lambda^2 + a^2 - \sigma^2/a - a^2) = 1 - \frac{\sigma^2}{\Lambda^2 a}.$$

Справедлива оценка

$$\rho = \mathbf{E} \left(\frac{\eta_k^{(1)} - a}{\Lambda} \right) \left(\frac{\eta_k^{(2)} - a}{\Lambda} \right) = 1 - \frac{\sigma^2}{\Lambda^2 a} < 1.$$

При этом $\rho \neq -1$, поскольку иначе

$$\mathbf{D} \left(\frac{\eta_k^{(1)} - a}{\Lambda} + \frac{\eta_k^{(2)} - a}{\Lambda} \right) = 2 + 2\rho = 0$$

и событие $\{\eta_k^{(1)} + \eta_k^{(2)} = 2a\}$ должно происходить на множестве единичной меры, что не так в силу определения случайных величин $\eta_k^{(1)}, \eta_k^{(2)}$, в частности,

$$\mathbf{P}(\eta_k^{(1)} + \eta_k^{(2)} = 2) = \mathbf{P}(\eta_k^{(1)} = 1, \eta_k^{(2)} = 1) = \mathbf{P}(h_1^{(1)} = h_1^{(2)}) > 0.$$

Последовательность случайных двумерных векторов

$$\left\{ \frac{\eta_k^{(1)} - a}{\Lambda}, \frac{\eta_k^{(2)} - a}{\Lambda} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, у которых компоненты имеют нулевые математические ожидания, единичные дисперсии и коэффициент корреляции ρ ($\rho \neq 1, -1$). Поэтому, как нетрудно убедиться, последовательность характеристических функций, соответствующая последовательности случайных двумерных векторов

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\eta_k^{(1)} - a}{\Lambda n^{1/2}}, \sum_{k=1}^n \frac{\eta_k^{(2)} - a}{\Lambda n^{1/2}} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

при $n \rightarrow \infty$ сходится к функции

$$\varphi(t_1, t_2) = \exp\{-(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \rho/2)\},$$

которая является характеристической функцией случайного вектора (ξ_1, ξ_2) , распределенного по нормальному закону с вектором средних значений $(0, 0)$ и матрицей вторых моментов $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

Теорема доказана.

Вопрос о конечности или бесконечности вторых моментов случайных величин $\eta_1^{(1)}$, $\eta_1^{(2)}$ в зависимости от существования у случайных величин $h_1^{(1)}$, $h_1^{(2)}$ моментов более высокого порядка, чем первый, остается в общем случае открытым.

Для частного случая случайных блужданий с приращениями 1 и 2 имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{P}\{h_1^{(i)} = 1\} = q$, $\mathbf{P}\{h_1^{(i)} = 2\} = p$, $p + q = 1$, $0 < p < 1$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\eta_1^{(1)} &= \mathbf{E}\eta_1^{(2)} = 1 + p, \\ \mathbf{D}\eta_1^{(1)} &= \mathbf{D}\eta_1^{(2)} = pq + \frac{2p^3}{q(1+p)}.\end{aligned}$$

Доказательство. Для данного случая

$$\begin{aligned}a &= \mathbf{E}h_1^{(1)} = \mathbf{E}h_1^{(2)} = q + 2p = 1 + p, \\ \sigma^2 &= \mathbf{D}h_1^{(1)} = \mathbf{D}h_1^{(2)} = q + 4p - (1 + p)^2 = pq.\end{aligned}$$

Пусть $p(k, m) = \mathbf{P}(\eta_1^{(1)} = k, \eta_1^{(2)} = m)$ — вероятность того, что случайная величина $\eta_1^{(1)}$ равна k , а случайная величина $\eta_1^{(2)}$ равна m . Из определения следует, что

$$0 \leq p(k, m) \leq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p(k, m) = 1.$$

Очевидно, что

$$p(1, 1) = p^2 + q^2.$$

Если последовательность случайных величин $\{h_1^{(1)}, \dots, h_k^{(1)}\}$ длины $k, k \geq 1$, приняла значения из всех k двоек, то последовательность $\{\tau_1(1), \dots, \tau_1(k)\}$ есть последовательность всех четных чисел от 2 до $2k$. Если при этом в последовательности случайных величин $\{h_1^{(2)}, \dots, h_k^{(2)}\}$ на первом месте стоит 1, а на всех остальных 2, то последовательность $\{\tau_2(1), \dots, \tau_2(k)\}$ есть последовательность всех нечетных чисел от 1 до $2k - 1$. Поэтому $\tau_1(t) \neq \tau_2(m)$ при $1 \leq t \leq k$, $1 \leq m \leq k$. Если $h_{k+1}^{(2)} = 1$, то $\tau_1(k) = \tau_2(k + 1)$ впервые, то есть

$$p(k, k + 1) \geq p^k q p^{k-1} q = q^2 p^{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Аналогично, для случая, когда последовательность $\{h_1^{(2)}, \dots, h_k^{(2)}\}$ приняла значения из k двоек, а в последовательности случайных величин $\{h_1^{(1)}, \dots, h_k^{(1)}, h_{k+1}^{(1)}\}$ на первом месте стоит 1, на последующих $k - 1$ местах стоят 2 и $h_{k+1}^{(1)} = 1$, получаем, что

$$p(k + 1, k) \geq q^2 p^{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть последовательность случайных величин $\{h_1^{(1)}, \dots, h_k^{(1)}, h_{k+1}^{(1)}\}$ длины $k + 1$, $k \geq 1$, приняла значения из первых k двоек, а величина $h_{k+1}^{(1)}$ приняла значение 1. При этом последовательность случайных величин $\{h_1^{(2)}, \dots, h_k^{(2)}, h_{k+1}^{(2)}\}$ длины $k + 1, k \geq 1$, приняла

значения из последних k двоек, а $h_1^{(2)}$ приняла значение 1. Тогда $\tau_1(k+1) = \tau_2(k+1)$ впервые. Аналогично, это произойдет, если в последовательности $\{h_1^{(2)}, \dots, h_k^{(2)}, h_{k+1}^{(2)}\}$ на первых k местах стоят 2, на последнем месте 1, а в последовательности $\{h_1^{(1)}, \dots, h_k^{(1)}, h_{k+1}^{(1)}\}$ на первом месте стоит 1, на остальных k местах стоят 2. Поэтому

$$p(k+1, k+1) \geq 2p^k q p^k q = 2q^2 p^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Найдем сумму S правых частей полученных неравенств и равенства для $p(1, 1)$:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} q^2 p^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} q^2 p^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2q^2 p^{2k} + p^2 + q^2 \\ &= p^2 + q^2 + 2q^2 p \sum_{k=1}^{\infty} (p^2)^{k-1} + 2q^2 p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (p^2)^{k-1} \\ &= p^2 + q^2 + 2q^2 \frac{p}{1-p^2} + \frac{2q^2 p^2}{1-p^2} = p^2 + q^2 + 2q^2 p \frac{1+p}{q(1+p)} \\ &= p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2 = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что полученные неравенства, на самом деле, являются равенствами, и других типов реализаций последовательностей $\{h_1^{(1)}, \dots, h_n^{(1)}\}$ и $\{h_1^{(2)}, \dots, h_m^{(2)}\}$ при каких-то $n, m, n, m \geq 1$, при которых состоялись бы события $\{\eta_1^{(1)} = k, \eta_1^{(2)} = l\}$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq m$, нет. Получим выражение для производящей функции $P(x, y)$ вероятностей $\{p(k, m)\}$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x^k y^m p(k, m) \\ &= xy(p^2 + q^2) + \sum_{k=1}^{\infty} x^k y^{k+1} q^2 p^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1} y^k q^2 p^{2k-1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1} y^{k+1} 2q^2 p^{2k} \\ &= xy(p^2 + q^2) + \sum_{k=1}^{\infty} q^2 x^k y^k (x+y) p^{2k-1} + 2q^2 p^2 x^2 y^2 \sum_{k=1}^{\infty} (xyp^2)^{k-1} \\ &= xy(p^2 + q^2) + (x+y)q^2 pxy \sum_{k=1}^{\infty} (xyp^2)^{k-1} + 2q^2 p^2 x^2 y^2 \frac{1}{1-xyp^2} \\ &= xy(p^2 + q^2) + q^2 p(x+y)xy \frac{1}{1-xyp^2} + 2q^2 p^2 x^2 y^2 \frac{1}{1-xyp^2} \\ &= xy \left(p^2 + q^2 + (x+y+2pxy) \frac{q^2 p}{1-xyp^2} \right). \end{aligned}$$

Теперь можно получить выражение для производящей функции $P_1(x)$ случайной ве-

личины $\eta_1^{(1)}$:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P(x, 1) = x \left(p^2 + q^2 + (x + y + 2px) \frac{q^2 p}{1 - xp^2} \right) \\ &= x(p^2 + q^2) + x \frac{q^2 p}{1 - xp^2} (1 - xp^2 + x + xp^2 + 2xp) \\ &= x(p^2 + q^2 + q^2 p) + x^2 \frac{q^2 p(1 + p)^2}{1 - xp^2}. \end{aligned}$$

Аналогично получается выражение для производящей функции $P_2(x)$ случайной величины $\eta_1^{(2)}$:

$$P_2(y) = P(1, y) = y(p^2 + q^2 + q^2 p) + y^2 \frac{q^2 p(1 + p)^2}{1 - yp^2}.$$

Далее получаем, что

$$\begin{aligned} P_1'(x) &= p^2 + q^2 + q^2 p + q^2 p(1 + p)^2 \frac{2x}{1 - xp^2} + q^2 p(1 + p)^2 \frac{p^2 x^2}{(1 - xp^2)^2} \\ &= p^2 + q^2 + q^2 p + q^2 p(1 + p)^2 \frac{2x - p^2 x^2}{(1 - xp^2)^2}, \\ P_1''(x) &= q^2 p(1 + p)^2 \left(\frac{2p^2}{(1 - xp^2)^3} (2x - p^2 x^2) + \frac{1}{(1 - xp^2)^2} (2 - 2p^2 x) \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаются выражения для математических ожиданий и дисперсий случайных величин $\eta_1^{(1)}$, $\eta_1^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\eta_1^{(1)} &= \mathbf{E}\eta_1^{(2)} = P_1'(1) = p^2 + q^2 + q^2 p + q^2 p(1 + p)^2 \frac{2 - p^2}{(1 - p^2)^2} \\ &= p^2 + q^2 + q^2 p + p(2 - p^2) = p^2 + q^2 + q^2 p + p + p(1 - p^2) \\ &= p^2 + q^2 + q^2 p + p + pq(1 + p) = p^2 + q^2 + q^2 p + p + p^2 q + pq \\ &= p^2 + q^2 + p + qp(p + q) + pq = p^2 + q^2 + 2qp + p \\ &= (p + q)^2 + p = 1 + p; \\ \mathbf{E}\eta_1^{(1)}(\eta_1^{(1)} - 1) &= \mathbf{E}\eta_1^{(2)}(\eta_1^{(2)} - 1) = P_1''(1) \\ &= q^2 p(1 + p)^2 \left(\frac{2p^2}{(1 - p^2)^3} (2 - p^2) + \frac{1}{(1 - p^2)^2} (2 - 2p^2) \right) \\ &= q^2 p(1 + p)^2 \left(\frac{2p^2}{q^3(1 + p)^3} (1 + 1 - p^2) \frac{2}{q(1 + p)} \right) \\ &= p \left(\frac{2p^2(1 + q(1 + p))}{q(1 + p)} + 2q(1 + p) \right) \\ &= p \left(\frac{2p^2}{q(1 + p)} + 2p^2 + 2q(1 + p) \right) \\ &= \frac{2p^3}{q(1 + p)} + 2p^3 + 2p(1 - p^2) \frac{2p^3}{q(1 + p)} + 2p, \end{aligned}$$

наконец,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\eta_1^{(1)} &= \mathbf{D}\eta_1^{(2)} = \mathbf{E}\eta_1^{(1)}(\eta_1^{(1)} - 1) + \mathbf{E}\eta_1^{(1)} - (\mathbf{E}\eta_1^{(1)})^2 \\ &= \frac{2p^3}{q(1+p)} + 2p + (1+p) - (1+p)^2 \\ &= \frac{2p^3}{q(1+p)} + p - p^2 = pq + \frac{2p^3}{q(1+p)}. \end{aligned}$$

На этом доказательство теоремы закончено.

Из теоремы 3 следует, что для случайных блужданий с приращениями 1 и 2 выполняются первые два условия теоремы 2, а при выполнении третьего условия, накладывающего ограничения на поведение величин N и M , будет следовать утверждение теоремы 2 для данного частного случая.

Список литературы

1. Chvatal V., Sankov D., Longest common subsequences of two random sequences. *J. Appl. Probab.* (1975) **12**, 306–315.
2. Михайлов В. Г., Меженная Н. М., Оценки для вероятностей плотного вложения одной дискретной последовательности в другую. *Дискретная математика* (2005) **17**, №3, 19–27.
3. Меженная Н. М., Предельные теоремы для числа плотных серий в случайной последовательности. *Дискретная математика* (2009) **21**, №1, 105–116.
4. Golub J. D., Constrained embedding probability for two binary strings. *SIAM J. Discrete Math.* (1996) **9**, 360–364.
5. Кравченко И. А., О последовательности общих точек однородных случайных блужданий с положительными приращениями и их использование для оценки параметров одного способа скрытой передачи информации. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2007) **14**, 598–609.
6. Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.
7. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.

Статья поступила 20.02.2009.