Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Бояринов, О больших расстояниях между последовательными нулями дзета-функции Римана, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 3, 75–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:52:28

О больших расстояниях между последовательными нулями дзета-функции Римана

© 2010 г. Р. Н. Бояринов

Получена новая оценка числа нулей $\varrho_n = \beta_n + i\gamma_n$ дзета-функции Римана, ординаты γ_n которой лежат на заданном интервале и для которых расстояние между соседними нулями является большим по сравнению со средним значением $2\pi(\ln(\gamma_n/(2\pi)))^{-1}$.

1. Введение

Одним из основных направлений в теории дзета-функции Римана $\zeta(s)$ является изучение ее нулей, лежащих в критической полосе $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$. Число $N(T)$ таких нулей, удовлетворяющих условию $0 < \operatorname{Im} s \leq T$, выражается формулой Римана–Мангольда (см. [1])

$$N(T) = L(T) + S(T) + \frac{1}{\pi}\delta(T),$$

где

$$L(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8},$$

$S(T)$ — аргумент дзета-функции Римана, а $\delta(T)$ — гладкая функция, производная которой имеет оценку вида $|\delta'(T)| \ll T^{-2}$.

Перенумеруем мнимые части нулей $\zeta(s)$ в критической полосе в порядке возрастания, а в случае совпадения нескольких ординат — в произвольном порядке:

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$$

Существует несколько утверждений, указывающих на то, что случаи, когда расстояние между последовательными ординатами велико, встречается достаточно редко.

Далее, если $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, а целое число r удовлетворяет условию

$$1 \leq r \leq \lambda^{-1} T \ln T,$$

то для числа ν_r пар γ_n, γ_{n+r} , удовлетворяющих условиям

$$\frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{r} \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T < \gamma_n, \quad \gamma_{n+r} \leq 2T,$$

А. Фуджи в работе [2] получил оценку

$$\nu_r \leq c_1 N(T) \exp(-c(\lambda r)^{2/3} (\ln \lambda r)^{-1/3}),$$

где c, c_1 — положительные постоянные.

Далее, А. Ивич в работе [3] доказал, что число ординат γ_n , удовлетворяющих условиям

$$T < \gamma_n \leq T + H, \quad H = T^{1/2+\varepsilon}, \quad \gamma_{n+1} - \gamma_n \geq \lambda (\ln T)^{-1}$$

не превосходит $c_1(N(T + H) - N(T)) \exp(-c\lambda)$.

Одним из следствий теоремы А. Фуджи об оценке ν_r явилась верхняя оценка суммы

$$S_k(T) = \sum_{T/2 < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^k$$

вида

$$S_k(T) \leq c(k) \frac{N(T)}{(\ln T)^k}, \quad c(k) = (c_1 k^{3/2} \ln(k+3))^k,$$

где k — целое число, $1 \leq k \leq c_2(T \ln T)^{2/3}$, а c_1, c_2 — некоторые абсолютные положительные постоянные.

В 1990 г. А. Фуджи в работе [4] улучшил свой результат при $k = 2$, получив более точную оценку

$$\sum_{T/2 < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2 \leq 8,55 \cdot 2\pi T / \ln \frac{T}{2\pi}, \quad T > T_0 > 0.$$

Настоящая работа посвящена уточнению теорем, доказанных в [5]. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть ε — сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0,001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда для любого $\lambda \geq 4\kappa^{-1}$ для числа $\nu(\lambda; T, H)$ ординат γ_n нулей $\zeta(s)$, удовлетворяющих условиям

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T < \gamma_n, \gamma_{n+1} \leq T + H,$$

имеет место оценка

$$\nu(\lambda; T, H) < \frac{e^3}{\lambda} (N(T + H) - N(T)) \exp(-\kappa\lambda),$$

где $\kappa = (\pi/3)e^{-19,5}\varepsilon^{1,5}$.

Замечание 1. Неравенство из теоремы 1 при $H = X^\varepsilon$ справедливо для всех T из промежутка $(X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений из некоторого множества, мера которого не превосходит $X^{1-0,01\varepsilon}$.

Теорема 2. При любом $\lambda \geq 4/\kappa_1$ и $T > T_0 > 0$ для числа $\nu(\lambda; T)$ ординат γ_n нулей $\zeta(s)$, удовлетворяющих условиям

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T/2 < \gamma_n \leq T,$$

имеет место оценка

$$\nu(\lambda; T) < \frac{e^3}{\lambda} N(T) \exp(-\kappa_1\lambda), \quad \kappa_1 = \frac{9\pi}{e^{19,5}10^6}.$$

Теорема 3. Пусть $T \geq T_0 > 0$, k — произвольное положительное число, а $S_k(T)$ — сумма, определенная выше. Тогда имеет место оценка

$$S_k(T) \leq \begin{cases} 4,1 \kappa_2^k N(T), & 0 < k \leq 1, \\ (4^k + 2,5e^4 \kappa_1 \Gamma(k)) \kappa_2^k N(T), & k > 1, \end{cases}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция и

$$\kappa_1 = \frac{9\pi}{e^{19,5} 10^6}, \quad \kappa_2 = \frac{2\pi}{\kappa_1 \ln(T/(2\pi))}.$$

Теорема 4. Пусть $T \geq T_0 > 0$, k — произвольное положительное число, а $S_k(T)$ — сумма, определенная выше. Тогда имеет место оценка

$$S_k(T) \geq \begin{cases} \frac{1}{34,24} \left(\frac{34,24\pi}{\ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T), & 0 < k < 1, \\ 4,1 \left(\frac{\pi}{4,1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T), & k \geq 1. \end{cases}$$

2. Вспомогательные леммы и доказательства теорем

Лемма 1. Пусть ε — сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0,001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $x = T^{0,1\varepsilon}$, m — целое число, $1 \leq m < (\ln x)/192$, $x^{1/(4m)} < y \leq x^{1/m}$. Тогда имеет место оценка

$$\int_T^{T+H} \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} dt < (e^{37} \pi^{-2} \varepsilon^{-3} m^2)^m H.$$

Доказательство этого утверждения приведено на с. 51 в [6].

Лемма 2. Пусть ε — сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0,001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$,

$$0 < \lambda < \frac{16 \ln(T/(2\pi))}{\pi \ln \ln T}, \quad H = T^{27/82+\varepsilon}, \quad h = \frac{\pi \lambda}{2 \ln(T/(2\pi))},$$

m — целое число, $(\varepsilon^5 \lambda^2 / (9B))^{1/3} \leq m < (\ln x)/192$. Тогда имеет место оценка

$$I_m = \int_T^{T+H} (S(t+2h) - S(t))^{2m} dt < (9B \varepsilon^{-3} m^2)^m H, \quad B = e^{37} \pi^{-2}.$$

Доказательство. Положим $y = x^{1/m}$ и рассмотрим тригонометрический полином

$$U(t) = \sum_{p < y} a(p) p^{-0,5+it}, \quad a(p) = p^{ih} \sin(h \ln p).$$

Тогда

$$\begin{aligned} S(t+2h) - S(t) &= \left(S(t+2h) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin((t+2h) \ln p)}{\sqrt{p}} \right) \\ &\quad - \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right) - \frac{1}{\pi} (U(t) + \bar{U}(t)). \end{aligned}$$

Возводя это выражение в степень $2m$ и применяя к нему неравенство Гельдера, приходим к соотношению

$$I_m \leq 3^{2m-1}(2J_1 + J_2),$$

в котором

$$J_1 = \int_T^{T+H+2h} \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} dt,$$

$$J_2 = \pi^{-2m} \int_T^{T+H} (U(t) + \bar{U}(t))^{2m} dt.$$

Тогда из леммы 1 получаем оценку

$$J_1 \leq (B\varepsilon^{-3}m^2)^m(H + 2h).$$

Далее, интеграл J_2 представляется суммой

$$J_2 = \pi^{-2m} \left(\binom{2m}{m} H S_m + 2\theta \sum_{v=0}^{2m} \binom{2m}{v} \sum_{P_v \neq Q_v} \frac{1}{\sqrt{P_v Q_v}} \left| \ln \frac{P_v}{Q_v} \right|^{-1} \right),$$

где

$$S_m = \sum_{P_m = Q_m} \frac{|a(p_1)|^2 \cdots |a(p_m)|^2}{\sqrt{P_m Q_m}},$$

и через P_v , Q_v обозначены произведения $p_1 \cdots p_v$ и $q_1 \cdots q_{2m-v}$ соответственно. Так как наибольшее из чисел P_v , Q_v при любом v не превосходит y^{2m} , а общее число пар (P_v, Q_v) не превосходит $(\pi(y))^{2m}$, верхней оценкой каждой из сумм по $P_v \neq Q_v$ служит величина

$$(y\pi(y))^{2m} < x^4 \leq H^{0,2}.$$

Поскольку число решений уравнения $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m$ в простых числах $q_1, \dots, q_m$ при фиксированной левой части не превосходит $m!$, сумма S_m удовлетворяет цепочке неравенств

$$S_m \leq m! \left(\sum_{p < y} \frac{|a(p)|^2}{p} \right)^m = m! \left(\sum_{p < y} \frac{\sin^2(h \ln p)}{p} \right)^m \leq m! \left(h^2 \ln y \sum_{p < y} \frac{\ln p}{p} \right)^m$$

$$\leq m! (2h \ln y)^{2m} = m! \left(\frac{\pi \lambda}{\ln(T/(2\pi))} \frac{\varepsilon \ln T}{10m} \right)^{2m} \leq \left(\frac{\varepsilon \lambda}{3\sqrt{m}} \right)^{2m}.$$

Следовательно,

$$J_2 \leq \pi^{-2m} \left(\binom{2m}{m} H S_m + 2^{2m+1} H^{0,2} \right) \leq \pi^{-2m} \left(H \left(\frac{2\varepsilon \lambda}{3\sqrt{m}} \right)^{2m} + 2^{2m} H^{0,3} \right)$$

$$\leq 0,5H \left(\frac{\varepsilon \lambda}{3\sqrt{m}} \right)^{2m} + 0,1H \leq 0,5(B\varepsilon^{-3}m^2)^m H + 0,1H \leq 0,6(B\varepsilon^{-3}m^2)^m H,$$

$$I_m \leq 3^{2m-1}(2(B\varepsilon^{-3}m^2)^m(H + 2h) + 0,6(B\varepsilon^{-3}m^2)^m H) \leq (9B\varepsilon^{-3}m^2)^m H.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из теоремы Литтлвуда [7] следует, что для $n > n_0$ верно неравенство $\gamma_{n+1} - \gamma_n < 32(\ln \ln \ln \gamma_n)^{-1} < 32(\ln \ln \ln T)^{-1}$. Поэтому можно считать, что

$$\lambda < \frac{16 \ln(T/(2\pi))}{\pi \ln \ln \ln T}.$$

Положим

$$h = \frac{\pi \lambda}{2 \ln(T/(2\pi))}.$$

Пусть для некоторой пары ординат γ_n, γ_{n+1} из промежутка $(T, T + H]$ выполнено неравенство

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq 4h = \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}.$$

Тогда при любом $t \in (\gamma_n, \gamma_n + 2h)$ справедливо равенство $N(t + 2h) - N(t) = 0$, а соответствующие приращения $L(t)$ и $\delta(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} L(t + 2h) - L(t) &= \frac{h}{\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + \frac{h^2}{\pi(t + 2\theta h)}, \\ \delta(t + 2h) - \delta(t) &= \delta'(t + 2\theta h)2h = O(hT^{-2}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |S(t + 2h) - S(t)| &= |L(t + 2h) - L(t) + \pi^{-1}(\delta(t + 2h) - \delta(t))| \\ &= \frac{h}{\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + \frac{h^2}{\pi(t + 2\theta h)} + O(hT^{-2}) \geq \frac{h}{\pi} \ln \frac{T}{2\pi} + \frac{h^2}{2\pi(t + 2\theta h)} > \frac{h}{\pi} \ln \frac{T}{2\pi} = \lambda/2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$2h(\lambda/2)^{2m} \leq \int_{\gamma_n}^{\gamma_n+2h} (S(t + 2h) - S(t))^{2m} dt \leq \int_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} (S(t + 2h) - S(t))^{2m} dt.$$

Используя лемму 2, получим, что для любого целого m , удовлетворяющего условию $(\varepsilon^5 \lambda^2 / (9B))^{1/3} \leq m < (\ln x) / 192$, справедливы неравенства

$$2h\nu(\lambda; T, H)(\lambda/2)^{2m} \leq \int_T^{T+H} (S(t + 2h) - S(t))^{2m} dt < (9B\varepsilon^{-3}m^2)^m H, \quad B = e^{37}\pi^{-2}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu(\lambda; T, H) \leq H(2h)^{-1} \left(\frac{3eB^{0,5}}{\varepsilon^{1,5}} \frac{2m}{e\lambda} \right)^{2m} = H(2h)^{-1} \left(\frac{2m}{e\lambda} \right)^{2m}.$$

Пусть $m = [0,5\kappa\lambda]$. Целое число $m = [0,5\kappa\lambda]$ удовлетворяет условиям

$$m \leq 0,5\kappa 16 \ln T < 10\kappa \ln T < \frac{0,1\varepsilon \ln T}{192} = \frac{\ln x}{192}, \quad m > 0,5\kappa\lambda - 1 \geq 1.$$

Легко проверить, что при $\lambda \geq 4\kappa^{-1}$ также верно неравенство $m \geq (\varepsilon^5 \lambda^2 / (9B))^{1/3}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \nu(\lambda; T, H) &\leq H(2h)^{-1} e^{-2m} < e^2 H(2h)^{-1} \exp(-\kappa\lambda) = \frac{H \ln(T/(2\pi))}{2\pi} \frac{2e^2}{\lambda} \exp(-\kappa\lambda) \\ &< \frac{2,2e^2}{\lambda} (N(T + H) - N(T)) \exp(-\kappa\lambda) < \frac{e^3}{\lambda} (N(T + H) - N(T)) \exp(-\kappa\lambda). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\nu(\lambda; T, H)$ — функция из теоремы 1. Будем считать, что

$$\lambda < \frac{16 \ln(T/(2\pi))}{\pi \ln \ln T},$$

поскольку иначе (см. доказательство теоремы 1) величина $\nu(\lambda; T)$ тождественно равна нулю. Возьмем $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-4}$. Далее, определим числа T_s , H_s , $s = 1, 2, \dots$, соотношениями $T_1 = T$, $H_s = T_s^{27/82+\varepsilon}$, $T_{s+1} = T_s - H_s$ и положим s_0 равным номеру первого члена убывающей последовательности T_s с условием $T_{s+1} \leq 0,5T$. Очевидно, что $0,25T < T_{s_0+1} \leq 0,5T$ при достаточно большом T . Обозначим число ординат γ_n нулей $\zeta(s)$, удовлетворяющих условиям

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T_{s+1} < \gamma_n, \quad \gamma_{n+1} \leq T_s,$$

символом $\mu_s(\lambda; T)$. Для любого $1 \leq s \leq s_0$ при достаточно большом T верно неравенство

$$\frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))} \geq \frac{2\pi(\lambda - 1)}{\ln(T_{s+1}/(2\pi))},$$

поэтому

$$\mu_s(\lambda; T) \leq \nu(\lambda - 1; T_{s+1}, H_s).$$

Согласно теореме 2, для $1 \leq s \leq s_0$ при $\lambda \geq 4/\kappa_1$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mu_s(\lambda; T) \leq \nu(\lambda - 1; T_{s+1}, H_s) &\leq \frac{2,2e^{2+\kappa_1}}{\lambda - 1} (N(T_s) - N(T_{s+1})) \exp(-\kappa_1\lambda) \\ &< \frac{2,5e^2}{\lambda} (N(T_s) - N(T_{s+1})) \exp(-\kappa_1\lambda), \end{aligned}$$

где

$$\kappa_1 = \frac{\pi}{3} e^{-19,5} \varepsilon^{1,5} = \frac{9\pi}{e^{19,5} \cdot 10^6},$$

сложив которые, получим, что

$$\nu(\lambda; T) \leq \sum_{s \leq s_0} \mu_s(\lambda; T) \leq \frac{2,5e^2}{\lambda} (N(T_1) - N(T_{s_0+1})) \exp(-\kappa_1\lambda) < \frac{e^3}{\lambda} N(T) \exp(-\kappa_1\lambda).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Все ординаты $\gamma_n \in (0,5T, T]$ распределим по классам $E_4, E_5, E_6, \dots, E_r, \dots$, относя к классу E_r при $r \geq 5$ те из них, которые удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi(r-1)}{\kappa_1 \ln(T/(2\pi))} \leq \gamma_{n+1} - \gamma_n < \frac{2\pi r}{\kappa_1 \ln(T/(2\pi))}.$$

В класс E_4 отнесем те $\gamma_n \in (0,5T, T]$, которые удовлетворяют условию

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n < \frac{8\pi}{\kappa_1 \ln(T/(2\pi))}.$$

В силу теоремы 2, число элементов в E_r при $r \geq 5$ не превосходит

$$\frac{\kappa_1 e^4}{r-1} N(T) e^{-r} = \frac{\kappa_1 e^4}{r} N(T) e^{-r} \frac{r}{r-1} \leq \frac{5\kappa_1 e^4}{4r} N(T) e^{-r},$$

а в E_4 не превосходит $N(T)$. Поэтому для любого $k > 0$ верно неравенство

$$S_k(T) \leq 4^k \left(\frac{2\pi}{\kappa_1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T) + \frac{5\kappa_1 e^4}{4} \left(\frac{2\pi}{\kappa_1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T) \sum_{r=5}^{+\infty} r^{k-1} e^{-r}.$$

Заметим, что $S_1(T) = 0,5T + o(1)$. Разберем случай $0 < k \leq 1$. Тогда

$$\sum_{r=5}^{\infty} r^{k-1} e^{-r} \leq \sum_{r=5}^{\infty} e^{-r} = \frac{e^{-4}}{e-1} < \frac{2}{3} e^{-4}.$$

Отсюда следует, что

$$S_k(T) \leq (4^k + 5\kappa_1/6) \left(\frac{2\pi}{\kappa_1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T) \leq 4,1 \left(\frac{2\pi}{\kappa_1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T).$$

Рассмотрим теперь случай $k > 1$. Заметим, что функция $f(x) = x^{k-1}e^{-x}$ убывает на промежутке $(0, k-1)$, возрастает на $(k-1, \infty)$, а в точке $x = k-1$ достигает своего максимума. Если $k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{r=5}^{\infty} f(r) < \int_0^{\infty} f(x) dx + ((k-1)/e)^{k-1} < 2\Gamma(k).$$

Если $k \notin \mathbb{N}$, то

$$\sum_{r=5}^{\infty} f(r) < \int_0^{+\infty} f(x) dx = \Gamma(k).$$

Отсюда получаем, что

$$S_k(T) \leq (4^k + 2,5\kappa_1 e^4 \Gamma(k)) \left(\frac{2\pi}{\kappa_1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим случай $0 < k < 1$. Воспользуемся доказанным в [4] неравенством

$$\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2 \leq 8,55 \frac{2\pi T}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T > T_0 > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2 < 8,56 \left(\frac{2\pi}{\ln(T/(2\pi))} \right)^2 N(T), \quad T > T_0 > 0.$$

Применяя неравенство Гельдера к сумме $\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) > 0,5T$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\pi N(T)}{\ln(T/(2\pi))} &< \sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \\ &\leq \left(\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^k \right)^{1/(2-k)} \left(\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2 \right)^{(1-k)/(2-k)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку снизу для $S_k(T)$

$$\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^k \geq \frac{1}{34,24} \left(\frac{34,24\pi}{\ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T).$$

Пусть теперь $k > 1$. Снова применим неравенство Гельдера к $\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$. Пусть $0 < \alpha < 1/k$, тогда верно неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\pi N(T)}{\ln(T/(2\pi))} &< \sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \\ &\leq \left(\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^k \right)^\alpha \left(\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^{(1-\alpha k)/(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку снизу для $S_k(T)$

$$\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^k \geq 4,1 \left(\frac{\kappa_1}{8,2} \right)^{1/\alpha} \left(\frac{2\pi}{\kappa_1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T).$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $\alpha \rightarrow 1/k - 0$, тогда получим, что

$$\sum_{0,5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^k \geq 4,1 \left(\frac{\pi}{4,1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T).$$

Заметим, что это неравенство верно и при $k = 1$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Карацуба А. А., Королев М. А., Аргумент дзета-функции Римана. *Успехи матем. наук* (2005) **60**, №3 (363), 41–96.
2. Fujii A., On the difference between r consecutive ordinates of the zeros of the Riemann zeta-function. *Proc. Japan Acad.* (1975) **51**, 741–743.
3. Ivić A., On small values of the Riemann zeta-function on the critical line and gaps between zeros. *Liet. Mat. Rink.* (2002) **42**, 25–36.
4. Fujii A., On the gaps between consecutive zeros of the Riemann zeta-function. *Proc. Japan Acad., Ser. Math. Sci.* (1990) **66**, 97–100.
5. Королев М. А., О больших расстояниях между соседними нулями дзета-функции Римана. *Изв. РАН, сер. матем.* (2008) **72**, №2, 91–104.
6. Карацуба А. А., Королев М. А., Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой. *Успехи матем. наук* (2006) **61**, №3 (369), 3–92.
7. Littlewood J. E., On the zeros of the Riemann zeta-function. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* (1924) **22**, 295–318.

Статья поступила 17.02.2010.