Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лапшин, Распределение вероятностей сумм элементов на непересекающихся частях случайной перестановки, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 3, 5–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:24:11

Распределение вероятностей сумм элементов на непересекающихся частях случайной перестановки

© 2005 г. А. В. Лапшин

В работе исследуется совместное распределение вероятностей сумм элементов на непересекающихся множествах мест случайной перестановки из одного класса перестановок. Вычислена производящая функция распределения вероятностей таких сумм, найдено предельное распределение соответствующих нормированных случайных величин при неограниченном росте числа элементов перестановки.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим класс n -перестановок соответствующей конфигурации, в которой среди n элементов содержится n_k элементов k -го типа, $k = 1, \dots, d$, $n_1 + \dots + n_d = n$ (определения см. в [1]). Полагаем, что элементами k -го типа являются действительные числа w_k , $k = 1, \dots, d$. Обозначим S множество перестановок рассматриваемого класса, мощность множества S равна

$$\frac{n!}{n_1! \dots n_d!}.$$

Пусть

$$\{s(i_1^{(1)}), \dots, s(i_{l_1}^{(1)})\}, \quad \{s(i_1^{(2)}), \dots, s(i_{l_2}^{(2)})\}, \quad \dots, \quad \{s(i_1^{(p)}), \dots, s(i_{l_p}^{(p)})\}$$

— p наборов элементов случайной перестановки $s \in S$, соответственно, на местах

$$\{i_1^{(1)}, \dots, i_{l_1}^{(1)}\}, \quad \{i_1^{(2)}, \dots, i_{l_2}^{(2)}\}, \quad \dots, \quad \{i_1^{(p)}, \dots, i_{l_p}^{(p)}\}.$$

Далее будем требовать выполнения условия

$$\{i_1^{(v)}, \dots, i_{l_1}^{(v)}\} \cap \{i_1^{(\mu)}, \dots, i_{l_2}^{(\mu)}\} = \emptyset, \quad v, \mu = 1, \dots, p, \quad v \neq \mu. \quad (1)$$

Полагаем, что перестановка s выбирается из множества S случайно равновероятно. Рассмотрим случайные величины

$$\xi_t = s(i_1^{(t)}) + \dots + s(i_{l_t}^{(t)}), \quad t = 1, \dots, p.$$

В работе изучается распределение вероятностей случайного вектора $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ и находится его предельное распределение при $n \rightarrow \infty$, эти результаты были анонсированы в [3].

Для исследования числовых характеристик распределения случайного вектора $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ найдем выражение для производящей функции $f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)$, определенной равенством

$$f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) = \sum_{l_1 + \dots + l_p \leq n} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_p \geq 0} \frac{n!}{(n - l_1 - \dots - l_p)! l_1! \dots l_p!} \times \mathbf{P}_{l_1, \dots, l_p}(\xi_1 = \sigma_1, \dots, \xi_p = \sigma_p) x_1^{\sigma_1} \dots x_p^{\sigma_p} y_1^{l_1} \dots y_p^{l_p},$$

где $\mathbf{P}_{l_1, \dots, l_p}(\xi_1 = \sigma_1, \dots, \xi_p = \sigma_p)$ — вероятность того, что случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_p$ принимают, соответственно, значения $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ при значениях $l_1, \dots, l_p$ частей случайной подстановки s , равновероятно выбранной из множества S .

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) = \prod_{k=1}^d (1 + x_1^{w_k} y_1 + \dots + x_p^{w_k} y_p)^{n_k}. \quad (2)$$

Следствие 1. *Справедливы равенства*

$$\mathbf{E}\xi_t = \frac{1}{n} l_t \sum_{k=1}^d w_k n_k, \quad \mathbf{D}\xi_t = \frac{1}{n-1} l_t (1 - l_t) B_n, \quad t = 1, \dots, p,$$

где

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^d w_k^2 n_k - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^d w_k n_k \right)^2.$$

Элементы соответствующей корреляционной матрицы $R_n = (\rho_{ij}^{(n)})$, $i, j = 1, \dots, p$, имеют вид

$$\rho_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ -\sqrt{l_i l_j / ((n - l_i)(n - l_j))} & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Далее рассмотрим предельные при $n \rightarrow \infty$ характеристики случайного вектора $(\xi_1, \dots, \xi_p)$. Введем обозначение

$$\bar{\xi} = \left(\frac{\xi_1 - \mathbf{E}\xi_1}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_1}}, \dots, \frac{\xi_p - \mathbf{E}\xi_p}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_p}} \right).$$

Теорема 2. *Пусть $n \rightarrow \infty$, $l_t/n \rightarrow \alpha_t$, $\alpha_t > 0$, $t = 1, \dots, p$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^d w_k n_k = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^d w_k^2 w_k - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^d w_k n_k \right)^2 \right) = B, \quad B > 0.$$

Тогда случайный вектор $\bar{\xi}$ имеет в пределе p -мерное нормальное распределение с нулевым вектором средних и матрицей корреляций $R_n = (\rho_{ij})$, $i, j = 1, \dots, p$, в которой

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ -\sqrt{\alpha_i \alpha_j / ((1 - \alpha_i)(1 - \alpha_j))} & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Пусть среди элементов $s(i_1^{(t)}), \dots, s(i_{l_t}^{(t)})$ случайно выбранной перестановки s из S число w_k содержится $v_k^{(t)}$ раз, $k = 1, \dots, d$, $t = 1, \dots, p$, тогда

$$\xi_t = \sum_{k=1}^d w_k v_k^{(t)}, \quad \sum_{k=1}^d v_k^{(t)} = l_t, \quad t = 1, \dots, p, \quad \sum_{t=1}^p v_k^{(t)} \leq n_k, \quad k = 1, \dots, d,$$

тогда

$$\xi_t = \sum_{k=1}^d w_k v_k^{(t)}, \quad \sum_{k=1}^d v_k^{(t)} = l_t, \quad t = 1, \dots, p, \quad \sum_{t=1}^p v_k^{(t)} \leq n_k, \quad k = 1, \dots, d,$$

таким образом, распределение вектора $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ полностью определяется распределением d -мерного вектора

$$\bar{v} = (v_1^{(1)}, \dots, v_d^{(1)}, \dots, v_1^{(p)}, \dots, v_d^{(p)}).$$

Для упрощения записи введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(t)} &= (v_1^{(t)}, \dots, v_d^{(t)}), & t &= 1, \dots, p, \\ \bar{n}^{(t)} &= (n_1^{(t)}, \dots, n_d^{(t)}), & t &= 1, \dots, p, \end{aligned}$$

где целые неотрицательные числа $n_k^{(t)}$, $k = 1, \dots, d$, $t = 1, \dots, p$, удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=1}^d n_k^{(t)} = l_t, \quad t = 1, \dots, p, \quad \sum_{t=1}^p n_k^{(t)} \leq n_k, \quad k = 1, \dots, d,$$

и пусть $\bar{n} = (\bar{n}^{(1)}, \dots, \bar{n}^{(p)})$.

Тогда распределение вектора $\bar{v}$ задается вероятностями

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{v} = \bar{n}) &= \frac{\prod_{t=1}^p l_t! (n - \sum_{t=1}^p l_t)!}{\prod_{t=1}^p \prod_{k=1}^d n_k^{(t)}! \prod_{k=1}^d (n_k - \sum_{t=1}^p n_k^{(t)})!} \bigg/ \frac{n!}{\prod_{k=1}^d n_k!} \\ &= \frac{1}{n!} \left(n - \sum_{t=1}^p l_t \right)! \prod_{t=1}^p l_t! \prod_{k=1}^d \frac{n_k!}{(n_k - \sum_{t=1}^p n_k^{(t)})! \prod_{t=1}^p n_k^{(t)}!} \end{aligned} \quad (3)$$

В этой формуле в числителе стоит число n -перестановок с данным составом элементов, а в знаменателе число всех n -перестановок.

Пусть

$$\bar{x}_t = (x_{t1}^{n_{t1}^{(1)}}, \dots, x_{td}^{n_{td}^{(t)}}), \quad t = 1, \dots, p.$$

Рассмотрим производящую функцию случайного вектора $\bar{v}$

$$f_{l_1, \dots, l_p}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) = \sum_{\bar{n}} \mathbf{P}(\bar{v} = \bar{n}) x_{11}^{n_{11}^{(1)}} \dots x_{1d}^{n_{1d}^{(1)}} \dots x_{p1}^{n_{p1}^{(p)}} \dots x_{pd}^{n_{pd}^{(p)}}. \quad (4)$$

Введем функцию

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, y_1, \dots, y_p) \\ = \sum_{l_1 + \dots + l_p \leq n} \frac{n!}{\prod_{t=1}^p l_t! (n - \sum_{t=1}^p l_t)!} f_{l_1, \dots, l_p}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) y_1^{l_1} \dots y_p^{l_p}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $f_{l_1, \dots, l_p}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$ из (3) и (4) и пользуясь полиномиальной теоремой, получаем, что

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, y_1, \dots, y_p) &= \sum_{l_1 + \dots + l_p \leq n} \prod_{k=1}^d \sum_{n_k^{(1)}, \dots, n_k^{(p)}} \frac{n_k!}{(n_k - \sum_{t=1}^p n_k^{(t)})! \prod_{t=1}^p n_k^{(t)}!} \\ &\quad \times x_{1k}^{n_k^{(1)}} \dots x_{pk}^{n_k^{(p)}} y_1^{l_1} \dots y_p^{l_p} \\ &= \prod_{k=1}^d (1 + x_{1k} y_1 + \dots + x_{pk} y_p)^{n_k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для того чтобы из (5) получить производящую функцию $f_{l_1, \dots, l_p}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$ достаточно в функции $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, y_1, \dots, y_p)$ взять коэффициент при

$$\frac{n!}{(n - \sum_{t=1}^p l_t)! \prod_{t=1}^p l_t!} y_1^{l_1} \dots y_p^{l_p}.$$

Полагая в (5) $x_{jk} = x_j^{w_k}$, $j = 1, \dots, p$, получим производящую функцию (2) случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_p$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Производящая функция $f(x_i, x_j, y_i, y_j)$ совместного распределения компонент ξ_i и ξ_j вектора $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ получается из производящей функции $f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)$, если положить $y_t = 0$ для $t = 1, \dots, p$, $i \neq j$, $t \neq i, j$. Таким образом,

$$f(x_i, x_j, y_i, y_j) = \prod_{k=1}^d (1 + x_i^{w_k} y_i + x_j^{w_k} y_j)^{n_k}.$$

Производящая функция (5) позволяет получить вид матрицы вторых моментов случайного вектора $(\xi_1, \dots, \xi_p)$. Используя при $i \neq j$ равенство

$$\mathbf{E} \xi_i \xi_j = \frac{(n - l_i - l_j)!}{n!} \frac{\partial^{l_i + l_j + 2} f(x_i, x_j, y_i, y_j)}{\partial x_i \partial x_j \partial y_i^{l_i} \partial y_j^{l_j}} \bigg|_{x_i = x_j = 1, y_i = y_j = 0}, \quad (6)$$

и теорему 1, получаем равенство

$$\mathbf{E}\xi_i\xi_j = \frac{l_i l_j}{n(n-1)} \left(\left(\sum_{k=1}^d w_k n_k \right)^2 - \sum_{k=1}^d w_k^2 n_k \right).$$

Полагая в производящей функции (5) $y_j = 0, j = 1, \dots, p, j \neq t$, и проводя аналогичные вычисления, получим, что

$$\mathbf{E}\xi_t = \frac{l_t}{n} \sum_{k=1}^d w_k n_k. \quad (7)$$

Ковариация i -й и j -й компонент вектора $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ равна

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) &= \mathbf{E}\xi_i\xi_j - \mathbf{E}\xi_i\mathbf{E}\xi_j \\ &= \frac{l_i l_j}{n(n-1)} \left(\left(\sum_{k=1}^d w_k n_k \right)^2 - \sum_{k=1}^d w_k^2 n_k \right) - \frac{l_i l_j}{n^2} \left(\sum_{k=1}^d w_k n_k \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Упрощая выражение (8), получим равенство

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = -\frac{l_i l_j}{n-1} B_n, \quad i \neq j, \quad (9)$$

где

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^d w_k^2 n_k - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^d w_k n_k \right)^2.$$

Заметим, что

$$\mathbf{D}\xi_t = -\text{cov}(\xi_t, \eta_t),$$

где

$$\eta_t = A_n - \xi_t, \quad A_n = \sum_{k=1}^d w_k n_k,$$

то есть случайная величина η_t равна сумме оставшихся элементов перестановки s на $n - l_t$ местах, не использованных при подсчете случайной величины ξ_t . Действительно,

$$\text{cov}(\xi_t, \eta_t) = \mathbf{E}(A_n - \xi_t) - \mathbf{E}\xi_t\mathbf{E}(A_n - \xi_t) = -\mathbf{D}\xi_t.$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}\xi_t = \frac{l_t(n-l_t)}{n-1} B_n, \quad t = 1, \dots, p. \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) позволяют получить вид элементов $p \times p$ матрицы $M_n = (m_{ij}^{(n)})$ вторых моментов вектора $(\xi_1, \dots, \xi_p)$. Из (9) и (10) следует, что

$$m_{ij} = \begin{cases} l_i(n-l_i)B_n/(n-1) & \text{при } i = j, \\ -l_i l_j B_n/(n-1) & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Отсюда следует, что корреляционная матрица $R_n = (\rho_{ij}^{(n)})$ имеет вид, приведенный после следствия 1.

Производящую функцию (2) можно использовать для получения остальных характеристик распределения величин ξ_t , $t = 1, \dots, p$, а также для проведения неасимптотических расчетов. Однако для больших значений d и n такие расчеты затруднительны.

Доказательство теоремы 2. Для нахождения предельного распределения вектора $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном d рассмотрим последовательности $\mathcal{A}'_t$, $t = 1, \dots, p$, и $\mathcal{B}'$ длины n , $\mathcal{A}'_t = \{a'_{t,j}\}$, где $j = 1, \dots, n$,

$$a'_{t,j} = \begin{cases} (1 - l_t/n)/n, & \text{если } j = i_1^{(t)}, \dots, i_{l_t}^{(t)}, \\ -l_t/n^2 & \text{для остальных } j, \end{cases}$$

и $\mathcal{B}' = \{b'_j\}$, $j = 1, \dots, n$, где

$$b'_j = \frac{1}{n} \left(w_m - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^d w_k n_k \right), \quad j = \sum_{k=1}^{m-1} n_k + 1, \dots, \sum_{k=1}^m n_k, \quad m = 1, \dots, d,$$

причем предполагается, что $\sum_{k=1}^d n_k = 0$.

Определим случайные величины $\xi'_1, \dots, \xi'_p$, полагая

$$\xi'_t = \sum_{i=1}^n a'_{t,i} b'_{x(i)}, \quad t = 1, \dots, p,$$

где $x(i)$ — образ элемента i при случайном отображении x из симметрической группы S_n , при этом предполагается, что на группе S_n задано равномерное распределение.

Введенные выше случайные величины ξ_t линейно выражаются через случайные величины ξ'_t следующим образом:

$$\xi_t = n^2 \xi'_t + \frac{l_t}{n} \sum_{k=1}^d w_k n_k, \quad t = 1, \dots, p. \quad (11)$$

Соотношение (11) легко получить, учитывая, что случайные величины ξ_t можно представить в виде

$$\xi_t = \sum_{i=1}^n a_i^{(t)} b_{x(i)},$$

где последовательности $\mathcal{A}_t = \{a_j^{(t)}\}$, $t = 1, \dots, p$, и $\mathcal{B} = \{b_j\}$, $j = 1, \dots, n$, имеют вид

$$a_j^{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i_1^{(t)}, \dots, i_{l_t}^{(t)}, \\ 0 & \text{для остальных } j, \end{cases}$$

$$b_j = w_m, \quad j = \sum_{k=1}^{m-1} n_k + 1, \dots, \sum_{k=1}^m n_k, \quad m = 1, \dots, d.$$

Сначала найдем предельное распределение вектора $(\xi'_1, \dots, \xi'_p)$. Для этого воспользуемся теоремой 2 из [2]. Поскольку

$$n \sum_j (a'_{t,j})^2 = \frac{l_t}{n} \left(1 - \frac{l_t}{n}\right),$$

$$n \sum_j (b'_j)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^d w_k^2 n_k - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^d w_k n_k \right)^2,$$

при $n \rightarrow \infty$, $l_t/n \rightarrow \alpha_t$, где α_t фиксировано, $t = 1, \dots, p$, и при существовании пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^d w_k n_k = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^d w_k^2 n_k - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^d w_k n_k \right)^2 \right) = B, \quad B > 0,$$

условия теоремы 2 из [2] выполняются и, следовательно, вектор $(\xi'_1, \dots, \xi'_p)$ имеет асимптотически нормальное распределение, что доказывает теорему 2.

В заключение отметим, что результаты работы [2] позволяют также найти параметры предельного распределения случайного вектора $(\xi, \dots, \xi_p)$ в случае, когда условие (1) не выполняется.

Список литературы

1. Сачков В. Н., *Комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1977.
2. Колчин В. Ф., Чистяков В. П., О предельных распределениях одной статистики. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) **19**, №2, 367–373.
3. Лапшин А. В., Распределение сумм элементов случайной n -перестановки одного класса. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1997) **4**, №3, 370–372.

Статья поступила 10.02.2005.