Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Розовская, Д. А. Шабанов, О правильных раскрасках гиперграфов в предписанные цвета, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 3, 94–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:37:48

О правильных раскрасках гиперграфов в предписанные цвета

© 2010 г. А. П. Розовская, Д. А. Шабанов

Рассматривается обобщение классической задачи Эрдеша–Хайнала в теории гиперграфов на случай предписанных раскрасок. Изучается величина $m_{pr}(n, r)$, равная минимальному числу ребер гиперграфа в классе n -равномерных гиперграфов, предписанное хроматическое число которых больше r . Получена нижняя оценка данной величины, которая улучшает ранее известные результаты для $r \geq 3$. Кроме того, указано достаточное условие существования предписанной r -раскрашиваемости n -равномерного гиперграфа в терминах ограничений на пересечение ребер. В качестве следствия получена новая нижняя оценка величины $m_{pr}^*(n, r)$, равной минимальному числу ребер гиперграфа в классе n -равномерных простых гиперграфов (в которых любые два ребра имеют не более одной общей вершины), предписанное хроматическое число которых больше r .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 06–01–00383, и программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 691.2008.1.

1. Введение и история классической задачи

Данная работа посвящена обобщению классической задачи Эрдеша–Хайнала в теории гиперграфов. Напомним, что гиперграфом называется пара множеств $H = (V, E)$, где V есть некоторое конечное множество, называемое множеством вершин гиперграфа, а E есть совокупность подмножеств множества V , эти подмножества называются ребрами гиперграфа. Гиперграф является n -равномерным, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. Хроматическим числом гиперграфа H называется минимальное число цветов, в которые можно так покрасить множество V вершин гиперграфа, что все ребра из E будут неоднородными. Мы будем обозначать хроматическое число гиперграфа H через $\chi(H)$.

В 1961 г. П. Эрдеш и А. Хайнал (см. [1, 2]) поставили задачу об отыскании величины $m(n, r)$, равной минимально возможному числу ребер в n -равномерном гиперграфе с хроматическим числом, большим r . Позднее Эрдеш (см. [3, 4]) доказал первые нетривиальные оценки величины $m(n, 2)$. С помощью простого вероятностного метода он показал, что при $n \rightarrow \infty$

$$2^{n-1} \leq m(n, 2) \leq (1 + o(1)) \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n.$$

Похожие оценки верны и для произвольного r . А именно, для любых $r \geq 2$ и $n \rightarrow \infty$

выполнены (см. [5]) неравенства

$$r^{n-1} \leq m(n, r) \leq \frac{e \ln r}{2} n^2 r^n (1 + O(1/n)). \quad (1)$$

Нижняя оценка величины $m(n, 2)$ была последовательно улучшена Шмидтом (см. [6]) и Беком (см. [7, 8]). Дж. Спенсер (см. [9]) предложил более простой вариант доказательства оценки Бека, основанный на применении рандомизированного алгоритма перекраски вершин гиперграфа. Наконец, в 2000 г. Дж. Радхакришнаном и А. Сринивазаном был получен (см. [10]) наилучший на сегодняшний день результат для случая двух цветов. Они доказали, что

$$m(n, 2) \geq 0,2 \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} 2^{n-1}. \quad (2)$$

Исследования поведения величины $m(n, r)$ при большом r были проведены Н. Алоном (см. [11]). Он показал, что для произвольных n и r выполняется неравенство

$$m(n, r) > (n-1) \lceil r/n \rceil \lfloor (n-1)r/n \rfloor^{n-1}. \quad (3)$$

Сильная асимптотическая нижняя оценка была получена А. В. Косточкой (см. [12]), использовавшим многоступенчатый аналог рандомизированного алгоритма, предложенного Радхакришнаном и Сринивазаном. Согласно данному результату, в случае, когда r не превосходит $\sqrt{(1/8) \ln(\ln n/2)}$, величина $m(n, r)$ оценивается снизу следующим образом:

$$m(n, r) \geq r^n (n/\ln n)^{m/(m+1)} e^{-4r^2}, \quad (4)$$

где $m = \lfloor \log_2 r \rfloor$.

2. Обобщение задачи для предписанных раскрасок

Сначала напомним ряд определений. Пусть $H = (V, E)$ — некоторый гиперграф и задано конечное множество C , элементы которого мы будем называть цветами. Вершинным предписанием A называется любое отображение, которое каждой вершине $v \in V$ ставит в соответствие некоторое подмножество $A(v) \subseteq C$. Если $|A(v)| = r$ для любой вершины $v \in V$, то будем говорить, что мощность предписания равна r .

Раскраской f вершин гиперграфа H , соответствующей предписанию A , называется такое однозначное отображение $f: V \rightarrow C$, что $f(v) \in A(v)$ для любого $v \in V$. При этом будем говорить, что каждая вершина v окрашена в цвет $f(v)$. Раскраска называется правильной для гиперграфа H , если в этой раскраске все ребра гиперграфа неодноразноцветны. Гиперграф называется предписанно r -раскрашиваемым, если для любого множества цветов C и любого вершинного предписания A мощности r найдется правильная раскраска, соответствующая данному предписанию. Предписанным хроматическим числом гиперграфа H называется такое минимальное натуральное число r , что H является предписанно r -раскрашиваемым.

Изучение предписанного хроматического числа было инициировано работами В. Г. Вининга [13], а также П. Эрдеша, А. Л. Рубина и Х. Тейлора [14]. Для предписанного хроматического числа гиперграфа H мы будем использовать обозначение $\chi_{pr}(H)$.

В работе [12] (см. также [5]) А. В. Косточка сформулировал обобщение экстремальной задачи Эрдеша–Хайнала для предписанных раскрасок. Он предложил найти величину

$m_{pr}(n, r)$, равную минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе n -равномерных гиперграфов, предписанное хроматическое число которых превышает r . В силу того, что для любого гиперграфа H выполнено неравенство

$$\chi(H) \leq \chi_{pr}(H),$$

соотношение между величинами $m(n, r)$ и $m_{pr}(n, r)$ будет обратным, то есть

$$m(n, r) \geq m_{pr}(n, r). \quad (5)$$

Несложно проверить, что для $m_{pr}(n, r)$ выполняются те же оценки, что и для величины $m(n, r)$ в (1), а именно,

$$r^{n-1} \leq m_{pr}(n, r) \leq \frac{e \ln r}{2} n^2 r^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (6)$$

Верхняя оценка, конечно, сразу следует из (5), а нижнюю можно доказать, используя, как и раньше, простые вероятностные соображения.

А. В. Косточка отметил (см. [12]), что доказательство оценки Радхакришнана–Сринивазана (2) проходит и в случае предписанных раскрасок, а вот методы, с помощью которых были обоснованы оценки (3) и (4), не позволяют получить оценки величины $m_{pr}(n, r)$. Теорема 1 дает нижнюю оценку для $m_{pr}(n, r)$ в случае произвольного r .

Теорема 1. Для всех натуральных $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство

$$m_{pr}(n, r) \geq (\sqrt{3} - 1)(n/\ln n)^{1/2} r^{n-1}. \quad (7)$$

Ясно, что (7) улучшает нижнюю оценку из (6) для всех значений параметров n и r . Из соотношения (5) мы получаем простое следствие из теоремы 1.

Следствие 1. Для всех натуральных $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство

$$m(n, r) \geq (\sqrt{3} - 1)(n/\ln n)^{1/2} r^{n-1}. \quad (8)$$

Проведем небольшое сравнение оценки (8) с известными ранее оценками (1)–(4).

1. При всех значениях n и r оценка (8) улучшает нижнюю оценку из (1).
2. При $r = 2$ оценка (8) имеет тот же порядок роста, что и оценка Радхакришнана–Сринивазана (2). Различие констант не является принципиальным (см. замечание 1 ниже).
3. Результат Алона (3) лучше (8) только для больших значений r . Правая часть неравенства (3) при фиксированном n и растущем r имеет порядок роста r^n , что существенно превышает (8). Но, как несложно проверить, при r , удовлетворяющем условию

$$r \leq \frac{2(n-1)}{\ln(n \ln n) - 2 \ln(\sqrt{3} - 1)} \sim \frac{2n}{\ln n},$$

оценка (8) становится лучше оценки (3), правая часть которой имеет при данных ограничениях вид $(n-1)(r-1)^{n-1}$.

4. Оценка (4) А. В. Косточки лучше (8), но она выполняется лишь для значений $r = O(\sqrt{\ln \ln n})$, в то время как (8) верна для всех возможных значений n и r .

Метод, с помощью которого проводится доказательство теоремы 1, построен на обобщении идей, лежащих в основе рандомизированных алгоритмов двухцветной раскраски, разработанных Спенсером и Радхакришнаном со Сринивазаном.

Замечание 1. Отметим, что, вообще говоря, константа $\sqrt{3} - 1$ в оценке (7) не является оптимальной. Ее можно заменить на большую величину при условии, что параметры n и r достаточно велики. Однако, нам более интересен порядок роста величин, нежели точное вычисление констант при растущих множителях.

Теорему 1 мы докажем в разделе 4, а в следующем разделе сформулируем некоторые важные следствия из нее.

3. Следствия из основного результата

В данном разделе мы приведем следствия теоремы 1.

3.1. Достаточное условие r -раскрашиваемости гиперграфов

В известной совместной работе П. Эрдеша и Л. Ловаса [15] было получено достаточное условие существования правильной r -цветной раскраски для равномерных гиперграфов в терминах ограничений на число попарных пересечений ребер. Эрдеш и Ловас доказали, что если каждое ребро n -равномерного гиперграфа H пересекается не более чем с $r^{n-1}/4$ другими ребрами, то $\chi(H) \leq r$. Данный результат был улучшен Дж. Радхакришнаном и А. Сринивазаном (см. [10]) в случае $r = 2$. Для больших значений n они показали, что если каждое ребро n -равномерного гиперграфа пересекается не более чем с $0,17\sqrt{n/\ln n}2^n$ другими ребрами, то хроматическое число такого гиперграфа не превосходит двух. С помощью построенной в доказательстве теоремы 1 случайной раскраски (см. раздел 4) можно получить подобный результат для произвольного r . Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $n \geq 2$, $r \geq 2$ — натуральные числа,

$$d = \frac{\sqrt{6} - 2}{4} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} r^{n-1}. \quad (9)$$

Если H — n -равномерный гиперграф, каждое ребро которого пересекается не более чем с d другими ребрами гиперграфа, то

$$\chi_{pr}(H) \leq r.$$

При всех r и $n \geq 13$ теорема 2 улучшает результат Эрдеша–Ловаса. Доказательство теоремы 2 мы приведем в разделе 6.

3.2. Простые гиперграфы

В задачах о минимальном числе ребер гиперграфа, принадлежащего определенному классу, можно наложить дополнительные ограничения на этот класс помимо n -равномерности и значения хроматического числа, которые имели место в задаче об отыскании величины $m(n, r)$. Одним из классических подобных ограничений является требование простоты гиперграфа. Гиперграф называется простым, если любые два ребра этого гиперграфа

имеют не более одной общей вершины. По аналогии с $m(n, r)$ обозначим через $m^*(n, r)$ минимальное число ребер гиперграфа в классе простых n -равномерных гиперграфов, хроматическое число которых превышает r .

Задача о нахождении величины $m^*(n, r)$ была поставлена в работе П. Эрдеша и Л. Ловаса [15]. В ней же были получены первые оценки для $m^*(n, r)$. Эрдеш и Ловас показали, что для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняются неравенства

$$\frac{r^{2(n-2)}}{16n(n-1)^2} \leq m^*(n, r) \leq 1600n^4 r^{2(n+1)}. \quad (10)$$

Верхняя оценка по-прежнему является наилучшей, если n велико по сравнению с r . Нижняя оценка может быть улучшена в $n/2$ раз за счет некоторых простых соображений о сумме степеней вершин простого гиперграфа (подробнее см. [5]). Таким образом, фактически Эрдешем и Ловасом было доказано, что

$$m^*(n, r) \geq \frac{r^{2(n-2)}}{32(n-1)^2}. \quad (11)$$

В случае $r = 2$ нижняя оценка была дополнительно улучшена. З. Сабо (см. [16]) доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при $n \geq n_0$ любой простой n -равномерный гиперграф с хроматическим числом 3 содержит вершину степени, не меньшей, чем $n^\varepsilon 2^n$. Из этого факта, следуя рассуждениям Эрдеша и Ловаса из [15], несложно получить следующую оценку величины $m^*(n, 2)$: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$m^*(n, 2) \geq \frac{4^{n-1}}{2n^{2\varepsilon}}. \quad (12)$$

Также величина $m^*(n, r)$ для любого n и бесконечно многих r оценивается сверху следующим выражением:

$$m^*(n, r) \leq c4^n n^2 r^{2n-2} \ln^2 r, \quad c > 0.$$

Этот результат был получен в [17]. В случае, когда r велико по сравнению с n , данная оценка улучшает результат Эрдеша–Ловаса (10).

По аналогии с $m^*(n, r)$ введем величину $m_{pr}^*(n, r)$ как минимальное число ребер гиперграфа в классе простых n -равномерных гиперграфов, предписанное хроматическое число которых превышает r . Теорема 3 дает нижнюю оценку для $m_{pr}^*(n, r)$.

Теорема 3. Для всех натуральных $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство

$$m_{pr}^*(n, r) \geq \frac{(\sqrt{6} - 2)^2}{32} \frac{r^{2n-4}}{n \ln n}. \quad (13)$$

Следствие 2. Для всех натуральных $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство

$$m^*(n, r) \geq \frac{(\sqrt{6} - 2)^2}{32} \frac{r^{2n-4}}{n \ln n}. \quad (14)$$

Утверждение следствия 2 легко вытекает из теоремы 2 в силу справедливости соотношения

$$m_{pr}^*(n, r) \leq m^*(n, r),$$

которое аналогично (5). Отметим, что полученная нами оценка (14) лучше (11) при $n \geq 16$, но для $r = 2$ асимптотически хуже оценки (12).

Замечание 2. Константы в оценках (9) и (13) можно улучшить при больших значениях параметров n и r . Однако, как уже отмечалось в замечании 1, нас интересует порядок роста величин, а не точные значения констант при растущих множителях.

Доказательство теоремы 3 будет приведено в разделе 7.

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 основано на применении метода случайной раскраски вершин гиперграфа. Для обоснования неравенства (7) достаточно показать, что для любого n -равномерного гиперграфа $H = (V, E)$, имеющего менее $(\sqrt{3} - 1)\sqrt{n/\ln nr^{n-1}}$ ребер, справедливо неравенство

$$\chi_{pr}(H) \leq r.$$

Итак, пусть фиксирован n -равномерный гиперграф $H = (V, E)$ с m ребрами (то есть $|E| = m$). Пусть также задано конечное множество цветов C и вершинное предписание A мощности r , сопоставляющее каждой вершине $v \in V$ множество $A(v) \subset C$. Без ограничения общности можно считать, что $V = \{1, 2, \dots, w\}$, а $C \subset \mathbb{N}$. Мы построим некоторую случайную раскраску ζ , соответствующую данному предписанию, и оценим вероятность того, что эта раскраска является правильной для H .

Пусть на некотором вероятностном пространстве задан следующий набор независимых в совокупности случайных функций:

- (1) случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_w$ со следующим распределением: ξ_v принимает все значения из $A(v)$ с равной вероятностью $1/r$;
- (2) случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_w$ со следующим распределением: η_v принимает все значения из $A(v)$ с одной и той же вероятностью $p \in [0, 1/r]$ и значение 0 с вероятностью $1 - rp$;
- (3) $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_w)$ – случайная перестановка множества V (случайная нумерация вершин гиперграфа H), имеющая равномерное распределение на группе перестановок S_w , то есть для любой $\tilde{\sigma} \in S_w$

$$\mathbf{P}(\sigma = \tilde{\sigma}) = \frac{1}{w!}.$$

Существование такого вероятностного пространства очевидно.

Пусть $e \in E$ – произвольное ребро H , а $i \in e$ – произвольная вершина этого ребра. Обозначим через D_e^i и $\mathcal{D}_i$ следующие события:

$$\begin{aligned} D_e^i &= \left\{ \sum_{s \in e} I\{\xi_s = \xi_i\} (1 - I\{\sigma_s < \sigma_i, \eta_s \notin \{0, \xi_s\}\}) = n \right\}, \\ \mathcal{D}_i &= \bigcup_{e \in E: i \in e} D_e^i. \end{aligned} \tag{15}$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots, w$ положим

$$\zeta_i = \xi_i I\{\overline{\mathcal{D}_i} \cup \{\eta_i = 0\}\} + \eta_i I\{\mathcal{D}_i \cap \{\eta_i \neq 0\}\}.$$

Несложно проверить, что случайные величины ζ_i принимают только значения из $A(i)$. Поэтому случайный вектор $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_w)$ можно интерпретировать как случайную раскраску множества V (вершине i сопоставляется цвет ζ_i), соответствующую предписанию A . Обозначим через $\mathcal{F}$ событие, заключающееся в том, что случайная раскраска $\vec{\zeta}$ не является правильной раскраской гиперграфа H , то есть

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} \{\zeta_s = \zeta_t \text{ для любых } s, t \in e\}. \quad (16)$$

Имеет место следующее утверждение, которое из-за его важности мы представим в виде теоремы.

Теорема 4. Пусть $q = (r - 1)r$. Тогда для произвольного n -равномерного гиперграфа H с m ребрами, любого множества цветов $C \subset \mathbb{N}$ и любого вершинного предписания A мощности r выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(\mathcal{F}) \leq mr^{1-n}(1-q)^n + m^2r^{2-2n}q. \quad (17)$$

Доказательство теоремы 4 мы отнесем в следующий раздел, а сейчас продолжим доказательство теоремы 1.

Из построения случайной раскраски $\vec{\zeta}$ следует, что если для произвольного n -равномерного гиперграфа H , произвольного множества цветов $C \subset \mathbb{N}$ (а значит, и для множества цветов любой другой природы) и произвольного вершинного предписания A мощности r вероятность события $\mathcal{F}$ строго меньше единицы, то для H существует правильная раскраска, соответствующая предписанию A . Значит, по определению, H будет предписанно r -раскрашиваемым, что эквивалентно тому, что

$$\chi_{pr}(H) \leq r.$$

Теорема 4 дает универсальную оценку вероятности события $\mathcal{F}$. Таким образом, если для некоторых $m > 0$ и $q \leq (r - 1)r$ выполняется неравенство

$$mr^{1-n}(1-q)^n + m^2r^{2-2n}q < 1, \quad (18)$$

то любой n -равномерный гиперграф, имеющий m ребер, будет предписанно r -раскрашиваемым, и следовательно,

$$m_{pr}(n, r) > m.$$

Пусть

$$m \leq c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} r^{n-1},$$

где c — любое положительное число, меньшее $\sqrt{3} - 1$. Положим

$$q = \frac{\ln(n/\ln n)}{2n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} mr^{1-n}(1-q)^n + m^2r^{2-2n}q &\leq mr^{1-n}e^{-qn} + m^2r^{2-2n}\frac{\ln n}{2n} \\ &\leq c + \frac{c^2}{2} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, при таком подборе параметров выполнено условие (18), и значит, для любого $c < \sqrt{3} - 1$ справедлива оценка

$$m_{pr}(n, r) \geq c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} r^{n-1}.$$

Но если данное неравенство верно для всех $c < \sqrt{3} - 1$, то оно верно и для $c = \sqrt{3} - 1$. Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 4

Для удобства введем обозначения для некоторых событий. Пусть e — ребро гиперграфа H , тогда положим

$$\begin{aligned} A_e &= \{\xi_s = \xi_t = \zeta_s = \zeta_t \text{ для любых } s, t \in e\}, \\ C_e &= \{\zeta_s = \zeta_t \text{ для любых } s, t \in e\} \cap \left(\bigcup_{s \in e} \{\xi_s \neq \zeta_s\} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Для доказательства теоремы 4 нам понадобятся четыре леммы.

5.1. Вспомогательные леммы

Лемма 1. Пусть $e \in E$ — произвольное ребро гиперграфа, $\tilde{\sigma}$ — произвольная перестановка из S_w . Тогда следующие события совпадают:

$$A_1 = A_e \cap \{\sigma = \tilde{\sigma}\}, \quad A_2 = \{\xi_s = \xi_t, \eta_s \in \{0, \xi_s\} \text{ для любых } s, t \in e, \sigma = \tilde{\sigma}\}. \quad (20)$$

Доказательство. Для любого s из условия $\eta_s \in \{0, \xi_s\}$ следует, что $\zeta_s = \xi_s$, поэтому $A_2 \subset A_1$. Докажем обратное включение.

Предположим, что A_1 выполнено, но в e есть вершины, для которых $\eta_s \notin \{0, \xi_s\}$ (то есть A_2 неверно). Рассмотрим первую такую вершину v по нумерации $\tilde{\sigma}$. Для нее, как нетрудно видеть, выполняется событие $\mathcal{D}_v$ и получается, что $\zeta_v = \eta_v \neq \xi_v$. Данный факт противоречит событию A_1 . Таким образом, если выполнено событие A_1 , то для любого $s \in e$ величина $\eta_s \in \{0, \xi_s\}$, то есть $A_1 \subset A_2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $e \in E$ — произвольное ребро гиперграфа, $\tilde{\sigma}$ — произвольная перестановка из S_w . Тогда имеет место соотношение

$$C_e \cap \{\sigma = \tilde{\sigma}\} \subset \bigcup_{f \in E: f \neq e: |f \cap e| = 1} B_{ef}(\tilde{\sigma}), \quad (21)$$

где событие $B_{ef}(\tilde{\sigma})$ определяется равенством

$$B_{ef}(\tilde{\sigma}) = \left\{ \zeta_s = \zeta_t \text{ для любых } s, t \in e, \xi_v \neq \zeta_v = \eta_v, \bigcap_{s \in e} \overline{\{\sigma_s > \sigma_v, \xi_s \neq \zeta_s\}}, \sigma = \tilde{\sigma} \right\} \cap D_f^v,$$

здесь $v = f \cap e$.

Доказательство. Событие C_e означает, что для некоторых вершин $s \in e$ выполняется неравенство $\xi_s \neq \zeta_s$. Пусть v — последняя по нумерации $\tilde{\sigma}$ вершина ребра e с таким условием. Тогда для всех вершин $s \in e$ выполнено событие $\{\tilde{\sigma}_s > \tilde{\sigma}_v, \xi_s \neq \zeta_s\}$.

Поскольку $\xi_v \neq \zeta_v$, во-первых, $\eta_v = \zeta_v$, а, во-вторых, должно выполняться событие $\mathcal{D}_v$, которое, в свою очередь, влечет выполнение одного из событий D_f^v , где f — некоторое ребро, содержащее вершину v . Остается показать, что $|f \cap e| = 1$.

Предположим, что, помимо v , найдется еще одна вершина $u \in f \cap e$. Тогда из события D_f^v следует, что $\xi_u = \xi_v$, а из события C_e вытекает равенство $\zeta_u = \zeta_v$. Значит, $\xi_u = \eta_u = \eta_v$. В силу того, что v — последняя по нумерации $\tilde{\sigma}$ вершина ребра e с условием $\xi_v \neq \zeta_v$, получается, что $\tilde{\sigma}_u < \tilde{\sigma}_v$. Рассмотрим сумму из определения события D_f^v (см. (15))

$$D_f^v \cap \{\sigma = \tilde{\sigma}\} = \left\{ \sum_{s \in f} I\{\xi_s = \xi_v\}(1 - I\{\tilde{\sigma}_s < \tilde{\sigma}_v, \eta_s \notin \{0, \xi_v\}\}) = n \right\}.$$

Слагаемое $s = u$, очевидно, дает нулевой вклад в сумму. Таким образом, общая сумма не может быть равна n , то есть не выполняется событие D_f^v . Мы получили противоречие. Следовательно, мощность пересечения ребер e и f равна единице. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть e и f — два ребра гиперграфа H , причем $|f \cap e| = 1$, и v — вершина из пересечения этих ребер. Пусть перестановка $\tilde{\sigma}$ множества V такова, что

$$|\{s \in f : \tilde{\sigma}_s < \tilde{\sigma}_v\}| = z,$$

а $|\{s \in e : \tilde{\sigma}_s < \tilde{\sigma}_v\}| = d$. Тогда имеет место следующая оценка вероятности события $B_{ef}(\tilde{\sigma})$:

$$\mathbf{P}(B_{ef}(\tilde{\sigma})) \leq r^{2-2n} q(1-q)^z (1+q)^d \mathbf{P}(\sigma = \tilde{\sigma}). \quad (22)$$

Доказательство. Пусть выполнено событие $B_{ef}(\tilde{\sigma})$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_1 &= \{s \in f : \tilde{\sigma}_s < \tilde{\sigma}_v\}, & f_2 &= \{s \in f : \tilde{\sigma}_s > \tilde{\sigma}_v\}, \\ e_1 &= \{s \in e : \tilde{\sigma}_s < \tilde{\sigma}_v\}, & e_2 &= \{s \in e : \tilde{\sigma}_s > \tilde{\sigma}_v\}. \end{aligned}$$

Ввиду события D_f^v , для всех вершин s ребра f выполнено событие $\{\xi_s = \xi_v\}$. Кроме того, для всех вершин $s \in f_1$ величины η_s должны принимать значения 0 или ξ_s . Из условия $\bigcap_{s \in e} \{\tilde{\sigma}_s > \tilde{\sigma}_v, \xi_s \neq \zeta_s\}$ получаем, что $\xi_s = \zeta_s$ для всех $s \in e_2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} B_{ef}(\tilde{\sigma}) \subset \left\{ \sum_{s \in f_1} I\{\xi_s = \xi_v, \eta_s \in \{0, \xi_s\}\} = z, \sum_{s \in f_2} I\{\xi_s = \xi_v\} = n - z - 1, \right. \\ \left. \eta_v \notin \{\xi_v, 0\}, \sum_{s \in e_1} I\{\xi_s = \eta_v\} = d, \sum_{s \in e_2} I\{\xi_s = \eta_v\} = n - d - 1, \sigma = \tilde{\sigma} \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$B_{ef} = \left\{ \bigcap_{s \in f \setminus \{v\}} \{ \xi_s = \xi_v, \eta_s \in \{0, \xi_s\}, \sigma_s < \sigma_v \} \sqcup \{ \xi_s = \xi_v, \sigma_s > \sigma_v \} \} \cap \{ \eta_v \notin \{ \xi_v, 0 \} \} \right. \\ \left. \cap \bigcap_{s \in e \setminus \{v\}} \{ \xi_s = \eta_v, \sigma_s < \sigma_v \} \sqcup \{ \xi_s \neq \eta_v, \eta_s = \eta_v, \sigma_s < \sigma_v \} \sqcup \{ \xi_s = \eta_v, \sigma_s > \sigma_v \} \right\}. \quad (24)$$

В силу (23) и того факта, что

$$I\{ \xi_s = \eta_v \} \leq I\{ \xi_s = \eta_v \} \sqcup \{ \xi_s \neq \eta_v, \eta_s = \eta_v \},$$

получаем соотношение

$$B_{ef}(\tilde{\sigma}) \subset B_{ef} \cap \{ \sigma = \tilde{\sigma} \}. \quad (25)$$

Пусть $u, y \in A(v)$, $u \neq y$; введем обозначения

$$B_1(u, y) = \sum_{s \in f_1} I\{ \xi_s = y, \eta_s \in \{0, y\} \}, \quad B_2(u, y) = \sum_{s \in f_2} I\{ \xi_s = y \}, \\ B_3(u, y) = \sum_{s \in e_2} I\{ \xi_s = u \}, \quad B_4(u, y) = \sum_{s \in e_1} I\{ \xi_s = u \} \sqcup \{ \xi_s \neq u, \eta_s = u \}.$$

Случайные величины $B_i(u, y)$, $i = 1, \dots, 4$, при фиксированных u, y независимы в совокупности. Из соотношений (24) и (25) получаем оценку вероятности события $B_{ef}(\tilde{\sigma})$:

$$\mathbf{P}(B_{ef}(\tilde{\sigma})) \leq \mathbf{P}(B_{ef} \cap \{ \sigma = \tilde{\sigma} \}) \\ \leq \sum_{u, y \in A(v), u \neq y} \mathbf{P}(B_1(u, y) = z, B_2(u, y) = n - z - 1, B_3(u, y) = n - d - 1, \\ B_4(u, y) = d, \xi_v = y, \eta_v = u, \sigma = \tilde{\sigma}) \\ \leq r(r-1) \left(\frac{1-q}{r} \right)^z \left(\frac{1}{r} \right)^{n-z-1} \left(\frac{1}{r} \right)^{n-d-1} \left(\frac{1+q}{r} \right)^d \frac{p}{r} \mathbf{P}(\sigma = \tilde{\sigma}) \\ = r^{2-2n} q(1-q)^z (1+q)^d \mathbf{P}(\sigma = \tilde{\sigma}). \quad (26)$$

Неравенство (17) обосновано. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть e и f — два ребра гиперграфа H , причем $|f \cap e| = 1$. Обозначим через v вершину из пересечения этих ребер. Рассмотрим случайные величины

$$z = z(\sigma) = |\{s \in f : \sigma_s < \sigma_v\}|, \quad d = d(\sigma) = |\{s \in e : \sigma_s < \sigma_v\}|.$$

Тогда для любого $q \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$\mathbf{M}(1-q)^z (1+q)^d \leq 1. \quad (27)$$

Доказательство. Несложно понять, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}(1-q)^z(1+q)^d &= \sum_{\tilde{\sigma} \in S_w} (1-q)^{z(\tilde{\sigma})} (1+q)^{d(\tilde{\sigma})} \mathbf{P}(\sigma = \tilde{\sigma}) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^i (1-q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-2-i-k)!}{(2n-1)!} \\
 &= M(n-1, q).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Покажем, что имеет место соотношение $M(n, q) \leq M(n-1, q) \leq \dots \leq M(0, q) = 1$. Действительно, из тождества для биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

вытекает следующее равенство

$$\begin{aligned}
 M(n, q) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^i (1-q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-i-k)!}{(2n+1)!} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^i (1-q)^k \binom{n-1}{i-1} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-i-k)!}{(2n+1)!} \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n (1+q)^i (1-q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k-1} \frac{(i+k)! (2n-i-k)!}{(2n+1)!} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (1+q)^i (1-q)^k \binom{n-1}{i-1} \binom{n-1}{k-1} \frac{(i+k)! (2n-i-k)!}{(2n+1)!}.
 \end{aligned}$$

Изменив индексы суммирования в последних трех двойных суммах, получаем, что

$$\begin{aligned}
 M(n, q) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^i (1-q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-i-k)!}{(2n+1)!} \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^{i+1} (1-q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k+1)! (2n-i-k-1)!}{(2n+1)!} \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^i (1-q)^{k+1} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k+1)! (2n-i-k-1)!}{(2n+1)!} \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^{i+1} (1-q)^{k+1} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k+2)! (2n-i-k-2)!}{(2n+1)!}.
 \end{aligned}$$

Объединив снова все суммы в одну, получаем равенство

$$M(n, q) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^i (1-q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-2-i-k)!}{(2n+1)!} \alpha,$$

где

$$\alpha = (2n-i-k)(2n-i-k-1) + 2(i+k+1)(2n-i-k-1) + (i+k+2)(i+k+1)(1-q^2).$$

Величина α , очевидно, не превосходит величины

$$(2n-i-k)(2n-i-k-1)+2(i+k+1)(2n-i-k-1)+(i+k+2)(i+k+1)=(2n+1)2n$$

при любых i и k . Таким образом,

$$\begin{aligned} M(n, q) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^i (1-q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-2-i-k)!}{(2n-1)!} \\ &= M(n-1, q). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $M(n, q) \leq M(n-1, q) \leq \dots \leq M(0, q) = 1$. Из данной цепочки неравенств и соотношения (28) получаем искомую оценку (27). Лемма 4 доказана.

5.2. Завершение доказательства теоремы 4

В силу определений (19)

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} (A_e \cup C_e). \quad (29)$$

Из леммы 1 следует, что для любого ребра e и его вершины v выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(A_e) \leq \sum_{u \in A(v)} \mathbf{P}(\xi_s = u, \eta_s \in \{0, u\} \text{ для любого } s \in e) \leq r^{1-n} (1-q)^n. \quad (30)$$

Далее, из лемм 2, 3 и 4 получаем следующую оценку вероятности события C_e :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C_e) &\leq \sum_{f \in E: |f \cap e|=1} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_w} \mathbf{P}(B_{ef}(\tilde{\sigma})) \\ &\leq \sum_{f \in E: |f \cap e|=1} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_w} r^{2-2n} q (1-q)^{z(\tilde{\sigma})} (1+q)^{d(\tilde{\sigma})} \mathbf{P}(\sigma = \tilde{\sigma}) \\ &= r^{2-2n} q \sum_{f \in E: |f \cap e|=1} \mathbf{M}(1-q)^{z(\sigma)} (1+q)^{d(\sigma)} \leq r^{2-2n} q \sum_{f \in E: |f \cap e|=1} 1 \leq m r^{2-2n} q. \end{aligned} \quad (31)$$

Объединим полученные результаты. Из соотношений (29), (30) и (31) вытекает итоговая оценка вероятности события $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{F}) &\leq \sum_{e \in E} (\mathbf{P}(C_e) + \mathbf{P}(A_e)) \leq \sum_{e \in E} (r^{1-n} (1-q)^n + m r^{2-2n} q) \\ &= m r^{1-n} (1-q)^n + m^2 r^{2-2n} q. \end{aligned}$$

Искомое неравенство (17) обосновано. Теорема 4 доказана.

6. Доказательство теоремы 2

Для доказательства нам понадобится классическое утверждение, носящее название локальной леммы. Впервые оно было доказано в работе П. Эрдеша и Л. Ловаса [15]. Мы сформулируем данную теорему в специальном случае, удобном для дальнейших рассуждений.

Теорема 5. Пусть на некотором вероятностном пространстве заданы события $Q_1, \dots, Q_N$. Пусть $S_1, \dots, S_N$ — подмножества множества $\mathcal{R}_N = \{1, \dots, N\}$ такие, что для любого $i = 1, \dots, N$ событие Q_i не зависит от алгебры, порожденной событиями $\{Q_j, j \in \mathcal{R}_N \setminus S_i\}$. Если для каждого $i = 1, \dots, N$ выполнены неравенства

$$\mathbf{P}(Q_i) < 1/2, \quad (32a)$$

$$\sum_{j \in S_i} \mathbf{P}(Q_j) \leq 1/4, \quad (32b)$$

то $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^N \bar{Q}_j\right) > 0$.

Доказательство локальной леммы можно найти в книге [18]. Отметим также, что если в условии теоремы каждое $j \in \mathcal{R}_N$ принадлежит хотя бы одному из множеств S_i , $i = 1, \dots, N$, то неравенство (32a) следует из (32b), поэтому для применения теоремы достаточно проверить только (32b).

Итак, пусть задан произвольный n -равномерный гиперграф $H = (V, E)$, удовлетворяющий условию теоремы 2. Пусть также задано конечное множество цветов C и вершинное предписание A мощности r , сопоставляющее каждой вершине $v \in V$ множество $A(v) \subset C$. Как и раньше, без ограничения общности можно считать, что $V = \{1, 2, 3, \dots, w\}$ для некоторого натурального числа w , а $C \subset \mathbf{N}$. Построим случайную раскраску $\{\zeta_s\}_{s \in V}$ для H точно так же, как это было сделано в доказательстве теоремы 1. Мы хотим показать, что $\chi_{pr}(H) \leq r$. Для этого достаточно доказать, что случайная раскраска $\{\zeta_s\}_{s \in V}$ будет (при некотором выборе параметра p) правильной раскраской H с положительной вероятностью.

Рассмотрим следующие наборы событий: $\mathcal{A} = \{A_e : e \in E\}$ (см. определение события A_e в (19)), $\mathcal{B} = \{B_{ef} : e, f \in E, |e \cap f| = 1\}$ (см. (24)). Из соотношений (16), (21), (25), (29) следует, что

$$\{\text{раскраска } \{\zeta_s\}_{s \in V} \text{ является правильной}\} \supset \bigcap_{Q \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \bar{Q}.$$

Остается показать, что вероятность последнего события строго больше нуля при некотором выборе параметра p . Его мы возьмем равным $p = \ln(n/\ln n)/(2(r-1)n)$. Ясно, что такой выбор p корректен, то есть выполнено неравенство $rp \leq 1$.

Определим для каждого $Q \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ такое подмножество событий $S(Q) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, что Q не зависит от алгебры, порожденной $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \setminus S(Q)$, и выполнено условие (32a)–(32b), которое в наших обозначениях выглядит так: для каждого $Q \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$

$$\mathbf{P}(Q) < 1/2, \quad (33a)$$

$$\sum_{Q_0 \in S(Q)} \mathbf{P}(Q_0) \leq 1/4. \quad (33b)$$

Рассмотрим несколько случаев.

Первый случай. Пусть сначала $Q \in \mathcal{A}$, то есть $Q = A_e$ для некоторого $e \in E$. Из равенства (20) следует, что событие A_e лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in e\}$. Поэтому оно не зависит от всех событий A_f , если $f \cap e = \emptyset$, от всех событий B_{gf} при условии $g \cap e = \emptyset$ и $f \cap e = \emptyset$, а также от алгебры, порожденной этими событиями, потому что данная алгебра лежит в алгебре, порожденной σ и $\{\xi_s, \eta_s : s \in V \setminus e\}$. Таким образом, в качестве $S(A_e)$ достаточно взять подмножество $\mathcal{A}$, состоящее из событий A_f , $f \cap e \neq \emptyset$, и подмножество $\mathcal{B}$, состоящее из событий B_{gf} с условием, что

либо $f \cap e \neq \emptyset$, либо $g \cap e \neq \emptyset$. По условию теоремы 2 событий первого вида не более d , а второго не более, чем $2d^2$. Из неравенств (26), (27) и (30) получаем оценку суммы вероятностей

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in S(A_e)} \mathbf{P}(Q) &\leq \sum_{f: |f \cap e| \geq 1} \mathbf{P}(A_f) + \sum_{f: |f \cap e| \geq 1} \sum_{g: |f \cap g| = 1} (\mathbf{P}(B_{fg}) + \mathbf{P}(B_{gf})) \\ &\leq dr^{1-n}(1-q)^n + 2d^2r^{2-2n}q \leq \frac{\sqrt{6}-2}{4} + \left(\frac{\sqrt{6}-2}{4} \right)^2 \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство в этой цепочке выполняется в силу выбора параметра $p = q/(r-1)$, а также выражения (9) для величины d . Таким образом, в случае, когда $Q = A_e$, мы доказали выполнение условия (33b). Условие же (33a) очевидным образом выполняется для любого $Q \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Второй случай. Остается разобрать случай, когда $Q \in \mathcal{B}$, то есть $Q = B_{ef}$. Из определения события B_{ef} (см. (24)) следует, что оно лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s: s \in e \cup f\}$ и набором $\{I\{\sigma_s < \sigma_t\}: s, t \in e \cup f\}$. Отсюда получается, что данное событие не зависит от всех событий A_g , если $g \cap (e \cup f) = \emptyset$, от всех событий B_{gh} при условии $(g \cup h) \cap (e \cap f) = \emptyset$, а также от алгебры, порожденной этими событиями, потому что данная алгебра лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s: s \in V \setminus (e \cup f)\}$ и $\{I\{\sigma_s < \sigma_t\}: s, t \in V \setminus (e \cup f)\}$. Таким образом, в качестве $S(B_{ef})$ достаточно взять подмножество $\mathcal{A}$, состоящее из событий $A_g, g \cap (e \cup f) \neq \emptyset$, и подмножество $\mathcal{B}$, состоящее из событий B_{gh} с условием $(g \cup h) \cap (e \cup f) \neq \emptyset$. По условию теоремы событий первого типа не больше, чем $2d$, второго — не больше, чем $4d^2$. Как и в первом случае, из неравенств (26), (27) и (30) получаем оценку суммы вероятностей

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in S(B_{ef})} \mathbf{P}(Q) &\leq \sum_{g: |g \cap e| \geq 1} \mathbf{P}(A_g) + \sum_{g: |g \cap f| \geq 1} \mathbf{P}(A_g) + \sum_{g: |g \cap e| \geq 1} \sum_{h: |h \cap g| = 1} (\mathbf{P}(B_{hg}) + \mathbf{P}(B_{gh})) \\ &\quad + \sum_{g: |g \cap f| \geq 1} \sum_{h: |h \cap g| = 1} (\mathbf{P}(B_{hg}) + \mathbf{P}(B_{gh})) \\ &\leq 2dr^{1-n}(1-q)^n + 4d^2r^{2-2n}q \leq \frac{\sqrt{6}-2}{2} + \frac{(\sqrt{6}-2)^2}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Неравенство (33b) доказано и во втором случае.

Подведем итоги. Для системы событий $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ выполнено условие (32a)–(32b) локальной леммы. Из нее следует, что с положительной вероятностью не случится ни одно из этих событий, поэтому для H существует правильная раскраска, соответствующая предписанию A . Теорема 4 доказана.

7. Доказательство теоремы 3

Для доказательства нам понадобятся несколько простых лемм, аналогичных утверждениям, с помощью которых Эрдешем и Ловасом была доказана оценка (11).

Пусть $H = (V, E)$ — произвольный простой n -равномерный гиперграф, для которого $\chi_{pr}(H) > r$. Покажем, что

$$|E| \geq \frac{(\sqrt{6}-2)^2}{32} \frac{r^{2n-4}}{n \ln n}. \quad (34)$$

Положим величину $d(n, r)$ равной правой части равенства (9) из условия теоремы 2, то есть

$$d(n, r) = \frac{\sqrt{6}-2}{4} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} r^{n-1}.$$

Лемма 5. Множество E содержит ребро, пересекающее более $d(n, r)$ других ребер гиперграфа H . В этом ребре есть вершина v такая, что

$$\deg v \geq \frac{d(n, r)}{n} + 1.$$

Доказательство. Первое утверждение прямо следует из теоремы 2. Если бы такого ребра не было, то $\chi_{pr}(H)$ не превосходило бы r , что противоречит выбору гиперграфа H . Пусть $e \in E$ — искомое ребро. Далее, в силу того, что гиперграф H простой,

$$\sum_{w \in e} \deg w = |\{f \in E: f \cap e \neq \emptyset, f \neq e\}| + n \geq d(n, r) + n.$$

В ребре e содержится ровно n вершин, поэтому в нем найдется вершина v такая, что $\deg v \geq d(n, r)/n + 1$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Множество H содержит не менее $d(n-1, r)/(n-1) + 1$ вершин, степень каждой из которых не меньше, чем $d(n-1, r)/(n-1) + 1$.

Доказательство. Для каждого ребра $e \in E$ через $v(e)$ обозначим вершину ребра e , имеющую максимальную степень (если таких вершин несколько, то возьмем любую из них). Рассмотрим гиперграф $H_1 = (V, E_1)$, где $E_1 = \{e \setminus \{v(e)\}: e \in E\}$. Это $(n-1)$ -равномерный гиперграф, причем $\chi_{pr}(H_1) > r$. Если бы H_1 был предписанно r -раскрашиваемым, то таким же был бы и исходный гиперграф H . Из леммы 5 следует, что у H_1 есть вершина w , степень которой не меньше, чем $d(n-1, r)/(n-1) + 1$. Пусть $f_1, \dots, f_{\deg w}$ — ребра H_1 , содержащие w , а $e_1, \dots, e_{\deg w}$ — “восстановленные” по $f_1, \dots, f_{\deg w}$ ребра гиперграфа H , то есть $f_j = e_j \setminus \{v(e_j)\}$, $j = 1, \dots, \deg w$. Тогда для каждого $j = 1, \dots, \deg w$ получаем, что $\deg_H v(e_j) \geq \deg_H w \geq \deg w \geq d(n-1, r)/(n-1) + 1$.

Остается выяснить, почему вершины $v(e_1), \dots, v(e_{\deg w})$ различны. Если бы $v(e_j) = v(e_k)$, то ребра e_j и e_k имели бы две общие вершины (все эти ребра содержат w), что противоречит тому, что H — простой гиперграф. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Гиперграф H содержит не менее

$$\left\lceil \frac{d(n-1, r)}{n-1} + 1 \right\rceil + \left(\left\lceil \frac{d(n-1, r)}{n-1} + 1 \right\rceil - 1 \right) + \dots + 1 = \binom{\lceil d(n-1, r)/(n-1) \rceil + 1}{2}$$

ребер.

Доказательство. Воспользуемся леммой 6. Положим $m = \lceil d(n-1, r)/(n-1) \rceil + 1$. В силу того, что число $d(n-1, r)/(n-1)$ не является целым, в H существуют вершины $v_1, \dots, v_m$, степени которых не меньше, чем m . Тогда $|E| \geq |E_1| + |E_2| + \dots + |E_m|$, где $E_j = \{e \in E: v_j \in e, v_k \notin e, k = 1, \dots, j-1\}$. Ввиду того, что гиперграф H простой, получаем, что $|E_j| \geq \deg v_j - j + 1 \geq m - j + 1$. Следовательно,

$$|E| \geq \sum_{j=1}^m (m - j + 1) = \binom{m}{2}.$$

Лемма 7 доказана.

Завершим доказательство теоремы 3. Из леммы 7 следует, что

$$|E| \geq \binom{\lceil d(n-1, r)/(n-1) \rceil + 1}{2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{d(n-1, r)}{n-1} \right)^2 \\ = \frac{(\sqrt{6}-2)^2}{32} \frac{r^{2n-4}}{(n-1) \ln(n-1)} \geq \frac{(\sqrt{6}-2)^2}{32} \frac{r^{2n-4}}{n \ln n}.$$

Неравенство (34) обосновано. Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. Erdős P., Hajnal A., On a property of families of sets. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (1961) **12**, 87–123.
2. Erdős P., Some old and new problems in various branches of combinatorics. In: *Proc. 10th South-eastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing*. Utilitas Mathematica, Winnipeg, 1979, pp. 19–37.
3. Erdős P., On a combinatorial problem. I. *Nordisk Mat. Tidskrift* (1963) **11**, 5–10.
4. Erdős P., On a combinatorial problem. II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (1964) **15**, 445–447.
5. Kostochka A. V., Color-critical graphs and hypergraphs with few edges: a survey. *Bolyai Soc. Math. Stud.* (2006) **15**, 175–198.
6. Schmidt W. M. Ein kombinatorisches Problem von P. Erdős and A. Hajnal. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (1964) **15**, 373–374.
7. Beck J., On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász. *Discrete Math.* (1977) **17**, 127–131.
8. Beck J., On 3-chromatic hypergraphs. *Discrete Math.* (1978) **24**, 127–137.
9. Spencer J. H., Coloring n -sets red and blue. *Combinatorial Theory, Ser. A* (1981) **30**, 112–113.
10. Radhakrishnan J., Srinivasan A., Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring. *Random Structures and Algorithms* (2000) **16**, 4–32.
11. Alon N., Hypergraphs with high chromatic number. *Graphs and Combinatorics* (1985) **1**, 387–389.
12. Kostochka A. V., Coloring uniform hypergraphs with few colors. *Random Structures and Algorithms* (2004) **24**, 1–10.
13. Визинг В. Г., Раскраска вершин графа в предписанные цвета. В сб.: *Методы дискретного анализа в теории кодов и схем*, **29**. Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с. 3–10.
14. Erdős P., Rubin A. L., Taylor H., Choosability in graphs. In: *Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Arcata/Calif.*, **26**, 1980, pp. 125–157.
15. Erdős P., Lovász L., Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai* (1975) **10**, 609–627.
16. Szabo Z., An application of Lovasz local lemma—a new lower bound for the van der Waerden number. *Random Structures and Algorithms* (1990) **1**, 343–360.
17. Grable B., Phelps K., Rödl V., The minimum independence number for designs. *Combinatorica* (1995) **15**, 175–185.
18. Алон Н., Спенсер Дж., *Вероятностный метод*. Бином, Москва, 2007.

Статья поступила 19.12.2008.