Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Бородина, П. А. Бородин, Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 3, 127–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:40:34

Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов

© 2010 г. Ю. В. Бородина, П. А. Бородин

Предложены методы синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина для произвольных булевых функций. В качестве неисправностей предполагаются константные неисправности типа 0 на выходах элементов. Доказано, что любую булеву функцию можно реализовать схемой, допускающей полный проверяющий тест длины 1.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08–01–00863, и программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, проект НШ 4470.2008.1.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08–01–00648.

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов в базисе Жегалкина $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ (см. [1, 2]) и в качестве неисправностей константные неисправности типа 0 на выходах конъюнкторов $\&$ и сумматоров $\oplus$ (при переходе в неисправное состояние элемент выдает значение 0 независимо от входных данных).

Пусть S — некоторая схема из функциональных элементов, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функция, реализуемая на выходе схемы при наличии в схеме неисправного элемента, называется функцией неисправности. Всякое множество T входных наборов схемы S называется полным проверяющим тестом для этой схемы, если для любой функции неисправности $g(\tilde{x})$, не равной тождественно $f(\tilde{x})$, в T найдется хотя бы один такой набор $\tilde{\sigma}$, что $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$ (см. [3, 4]). Число наборов, составляющих этот тест, называется длиной теста. При нахождении полных проверяющих тестов предполагается, что в неисправное состояние может переходить любое число элементов схемы. Если же в схеме предполагается не более одного неисправного элемента, говорят о единичных проверяющих тестах.

Задача синтеза легкотестируемых относительно единичных неисправностей схем становится корректной, если рассматривать нетривиальные неизбыточные схемы, то есть схемы, каждая из которых реализует отличную от константы функцию f и при переходе любого одного элемента в неисправное состояние реализует функцию неисправности, отличную от f (см. [4], гл. 4, §3).

Произвольный элемент схемы будем считать избыточным, если при переходе этого элемента в неисправное состояние реализуемая схемой функция не изменяется. Если некоторая схема избыточна, то удаляя из нее в произвольной последовательности избыточные элементы и, возможно, изменяя соединения оставшихся в схеме элементов между

Рис. 1.

собой и с входами схемы, можно перейти от исходной схемы к некоторой неизбыточной схеме, реализующей ту же самую функцию, что и исходная схема.

Для единичных константных неисправностей произвольного типа (0 или 1) на выходах элементов в [5] доказано, что любую булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой в рассматриваемом базисе, допускающей единичный проверяющий тест длины не более $n + 3$.

В случае единичных константных неисправностей типа 1 этот результат был уточнен в [6]: было доказано, что любую булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой в рассматриваемом базисе, допускающей единичный проверяющий тест длины 1.

Целью данной работы является получение точного значения (именно, 1) длины полного проверяющего теста для схем, реализующих произвольные булевы функции в базисе $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ в случае неисправностей типа 0 на выходах элементов (см. теорему 2).

Отметим, что теорема 2 не влечет никаких оценок длин тестов в случае константных неисправностей типа 1. Кроме того, конструкция схемы в теореме 2 не позволяет следить за сложностью этой схемы, и эта сложность, по-видимому, получается очень большой. Поэтому мы предворяем основной результат, теорему 2, более простым утверждением, в котором есть возможность оценить сложность схемы.

Теорема 1. *Любую булеву функцию f можно реализовать неизбыточной схемой из функциональных элементов в базисе $\{\&, \oplus, 1, 0\}$, допускающей в случае единичных неисправностей типа 0 на выходах элементов единичный проверяющий тест длины, не превосходящей 2. При этом сложность схемы (число ее элементов) равна суммарному числу умножений и сложений в полиноме Жегалкина функции f .*

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x})$ — произвольная булева функция, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Будем предполагать, что функция f не является константой (константные функции являются базисными и реализуются без сумматоров и конъюнкторов) и существенно зависит от всех n переменных. Это предположение не умаляет общности: если некоторая функция f^* получается из f изъятием фиктивных переменных и для f^* утверждение теоремы справедливо, то это утверждение справедливо и для f .

Представим функцию $f(\tilde{x})$ полиномом Жегалкина:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \oplus c,$$

где суммы берутся по модулю 2, $a_{i_1, \dots, i_m}, c \in \{0, 1\}$.

Схему S , реализующую функцию $f(\tilde{x})$, составим из двух подсхем S_1 и S_2 (см. рис. 1).

Подсхема S_1 реализует все конъюнкции, входящие в полином Жегалкина функции $f(\tilde{x})$, цепями из конъюнкторов.

Подсхема S_2 представляет собой цепь из сумматоров и реализует сумму по модулю 2 выходных функций всех цепей подсхемы S_1 . При этом на левый вход самого верхнего

сумматора подается выход цепи, реализующей конъюнкцию K минимальной длины (если $c = 1$, то эта минимальная длина равна нулю, $K \equiv 1$, и на левый вход самого верхнего сумматора подается базисная функция 1; если таких конъюнкций в полиноме Жегалкина несколько, выберем любую из них).

Очевидно, что полученная схема S реализует функцию $f(\tilde{x})$.

Докажем, что единичным проверяющим тестом для схемы S будет множество $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$, где оба набора имеют длину n , набор $\tilde{\sigma}_1 = (1, \dots, 1)$, а набор $\tilde{\sigma}_2$ строится следующим образом: разряд, соответствующий переменной x_i , равен единице, если x_i входит в конъюнкцию K в качестве сомножителя, и нулю в ином случае. (При $f = x_1 \& \dots \& x_n$ имеем $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2$.) В частности, если $K \equiv c \equiv 1$, то $\tilde{\sigma}_2 = (0, \dots, 0)$. Таким образом, на наборе $\tilde{\sigma}_2$ все конъюнкции полинома Жегалкина, кроме K , принимают значение 0.

В подсхеме S_2 занумеруем все сумматоры числами $1, 2, \dots$, начиная с самого верхнего в цепи, на левый вход которого подается значение конъюнкции K .

Пусть все элементы схемы S исправны. Тогда при подаче на входы схемы набора $\tilde{\sigma}_1$ на выходах всех конъюнкторов схемы (а следовательно, и на всех выходах подсхемы S_1) и сумматоров с четными номерами реализуются единицы, на выходах же сумматоров с нечетными номерами — нули. При подаче на входы схемы набора $\tilde{\sigma}_2$ цепь, реализующая конъюнкцию K , выдает единицу, на выходе остальных цепей подсхемы S_1 реализуются нули.

Пусть схема S неисправна. Это означает, что ровно один элемент схемы перешел в неисправное состояние и выдает нуль при любых значениях, подаваемых на его входы.

Рассмотрим случай неисправности какого-либо конъюнктора подсхемы S_1 . При переходе в неисправное состояние конъюнктора, являющегося выходным для подсхемы, на наборе $\tilde{\sigma}_1$ на вход какого-то сумматора подсхемы S_2 вместо единицы будет подан нуль, и значение на выходе схемы изменится с $f(\tilde{\sigma}_1)$ на противоположное, то есть неисправность будет обнаружена. Так как подсхема S_1 состоит из цепей из конъюнкторов, на входы которых на наборе $\tilde{\sigma}_1$ в исправном состоянии схемы подаются единицы, при переходе в неисправное состояние одного элемента цепи, не являющегося выходным, на левый вход следующего элемента будет подан нуль. Тогда мы получим нуль и на выходе всей цепи, а значит, значение на выходе всей схемы не будет равно $f(\tilde{\sigma}_1)$.

Неисправность сумматоров подсхемы S_2 обнаруживается при подаче на входы схемы набора $\tilde{\sigma}_2$. Действительно, в исправном состоянии схемы каждый сумматор на этом наборе выдает единицу, а при переходе любого сумматора в неисправное состояние значение на выходе схемы на этом наборе меняется на противоположное.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Любую булеву функцию можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $\{\&, \oplus, 1, 0\}$, допускающей в случае константных неисправностей типа 0 на выходах элементов полный проверяющий тест длины 1.

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, — произвольная булева функция. Будем предполагать, что функция f не является константой (константные функции являются базисными и реализуются без сумматоров и конъюнкторов) и существенно зависит от всех n переменных. Это предположение не умаляет общности, так как если некоторая функция f^* получается из f изъятием фиктивных переменных и для f^* утверждение теоремы справедливо, то это утверждение справедливо и для f .

Пусть $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(f) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — единичный набор функции f (то есть $f(\tilde{\sigma}) = 1$), содержащий минимальное число единиц. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\sigma} = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ содержит k единиц и $n - k$ нулей.

Покажем, что функцию f можно реализовать такой схемой S в базисе $\{\&, \oplus, 1, 0\}$, что переход в неисправное состояние любого числа элементов S обнаружится на наборе $\tilde{\sigma}$.

Для обнаружения неисправности любого элемента на одном наборе $\tilde{\sigma}$ необходимо, чтобы при подаче набора $\tilde{\sigma}$ на вход схемы S в исправном состоянии на выходе каждого ее элемента получалось значение 1. Для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы одновременно выполнялись два следующих условия:

- (а) на оба входа любого конъюнктора и на один вход любого сумматора подаются либо значения переменных $x_1, \dots, x_k$, либо базисная функция 1, либо выходы других элементов;
- (б) на другой вход любого сумматора подается либо базисная функция 0, либо значения переменных $x_{k+1}, \dots, x_n$.

При этом выполнения условий (а) и (б) достаточно для того, чтобы набор $\tilde{\sigma}$ был полным проверяющим тестом схемы S . Пусть элемент E схемы S перешел в неисправное состояние. Если E — выходной элемент схемы S , то неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}$. Если же E — промежуточный элемент схемы, то его выходное значение 0 будет подано на вход следующего за ним элемента E' (таких элементов может быть несколько). Если E' — конъюнктор, то на его выходе будет 0 независимо от значения, подаваемого на второй вход, а если E' — сумматор, то на второй его вход, согласно условию (б), подается нулевое значение одной из переменных $x_{k+1}, \dots, x_n$, и на его выходе тоже будет 0. На выходах следующих за E' элементов также получится 0; поскольку схема S — граф без ориентированных циклов с единственным выходным элементом, значение 0 дойдет до выхода схемы S и неисправность будет обнаружена ($f(\tilde{\sigma}) = 1$).

Назовем $\tilde{\sigma}$ -схемой любую схему в базисе $\{\&, \oplus, 0, 1\}$, удовлетворяющую условиям (а) и (б). Также будем считать $\tilde{\sigma}$ -схемами “пустые” (не содержащие конъюнкторов и сумматоров) схемы, реализующие константы.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. *Любую булеву функцию f можно реализовать $\tilde{\sigma}(f)$ -схемой.*

Для доказательства этого предложения понадобится несколько вспомогательных утверждений. В нижеследующих леммах 1–4 предполагается, что $\tilde{\sigma} = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ состоит из k единиц и $n - k$ нулей.

Лемма 1. *Если каждая из функций f_1 и f_2 реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой, то и функция $f_1 \& f_2$ реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой.*

Ясно, что достаточно подать выходы $\tilde{\sigma}$ -схем для f_1 и f_2 на вход конъюнктора.

Лемма 2. *Пусть функции $g_1(x_{k+1}, \dots, x_n)$ и $g_2(x_{k+1}, \dots, x_n)$ таковы, что для любой функции h , которая реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой, функции $h \oplus g_1$ и $h \oplus g_2$ реализуются $\tilde{\sigma}$ -схемами. Тогда для любой функции f , реализуемой $\tilde{\sigma}$ -схемой, функция $f \oplus g_1 g_2$ также реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой.*

Доказательство. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}
 & ((f \oplus g_1)(f \oplus g_2) \oplus g_1 \oplus g_2)(f(1 \oplus g_1) \oplus g_1)(f(1 \oplus g_2) \oplus g_2) \\
 &= (f \oplus f g_1 \oplus f g_2 \oplus g_1 g_2 \oplus g_1 \oplus g_2)(f \oplus g_1(f \oplus 1))(f \oplus g_2(f \oplus 1)) \\
 &= (f \oplus g_1(f \oplus 1) \oplus g_2(f \oplus 1) \oplus g_1 g_2)(f \oplus g_1 g_2(f \oplus 1)) \\
 &= f \oplus g_1 g_2 f \oplus g_1 g_2(f \oplus 1) = f \oplus g_1 g_2.
 \end{aligned}$$

Первая формула в этом равенстве дает способ реализации функции $f \oplus g_1 g_2$ $\tilde{\sigma}$ -схемой: функции $f \oplus g_1$, $f \oplus g_2$, $1 \oplus g_1$, $1 \oplus g_2$ реализуются $\tilde{\sigma}$ -схемами по условию леммы, функции $(f \oplus g_1)(f \oplus g_2)$, $f(1 \oplus g_1)$, $f(1 \oplus g_2)$ — по лемме 1, функции в каждой из трех скобок — по условию леммы 2, а их произведение — по лемме 1.

Лемма 3. Пусть функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать $\tilde{\sigma}$ -схемой. Тогда для любой функции $g(x_{k+1}, \dots, x_n)$, $g(0, \dots, 0) = 0$, функцию $f \oplus g$ также можно реализовать $\tilde{\sigma}$ -схемой.

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для мономов $x_{j_1} \& \dots \& x_{j_m}$, где $j_i \in \{k+1, \dots, n\}$, $i = 1, \dots, m$. Для любой функции h , которая реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой, функции $h \oplus x_{j_i}$, очевидно, реализуются $\tilde{\sigma}$ -схемами. Тогда из леммы 2 следует, что и функцию $f \oplus x_{j_1} \& \dots \& x_{j_m}$ можно реализовать $\tilde{\sigma}$ -схемой.

Лемма 4. Пусть каждая из функций f_1 и f_2 реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой. Тогда для любой функции $g(x_{k+1}, \dots, x_n)$, $g(0, \dots, 0) = 0$, функция $f_1 f_2 \oplus g f_1 \oplus g f_2 \oplus g f_1 f_2$ реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой.

Доказательство. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} (f_1(f_2 \oplus g) \oplus g)(f_2(f_1 \oplus g) \oplus g) \oplus g &= (f_1 f_2 \oplus g(f_1 \oplus 1))(f_1 f_2 \oplus g(f_2 \oplus 1)) \oplus g \\ &= f_1 f_2 \oplus g(f_1 \oplus 1)(f_2 \oplus 1) \oplus g = f_1 f_2 \oplus g f_1 f_2 \oplus g f_1 \oplus g f_2. \end{aligned}$$

Первая формула в этом равенстве дает способ реализации $\tilde{\sigma}$ -схемой функции $f_1 f_2 \oplus g f_1 \oplus g f_2 \oplus g f_1 f_2$: функции $f_1 \oplus g$, $f_2 \oplus g$ реализуются $\tilde{\sigma}$ -схемами по лемме 3, функции $f_1(f_2 \oplus g)$, $f_2(f_1 \oplus g)$ — по лемме 1, функции в скобках — по лемме 3, их произведение — по лемме 1, а сумма их произведения и функции g — по лемме 3.

Вернемся к доказательству предложения 1. Будем доказывать его индукцией по n .

При $n = 1$ предложение 1 достаточно очевидно: функции 1 , $\bar{x}_1 = 1 \oplus x_1$, x_1 реализуются $\tilde{\sigma}$ -схемами. Для 1 и $\bar{x}_1$ имеем $k = 0$, для x_1 имеем $k = 1$; функции 1 и x_1 реализуются без конъюнкторов и сумматоров, схема для $\bar{x}_1$ содержит один сумматор, на один вход которого подается значение переменной x_1 , а на другой вход подается базисная функция 1 .

Предположим, что любая функция g от $n - 1$ переменных, отличная от тождественного нуля, реализуется $\tilde{\sigma}(g)$ -схемой (набор $\tilde{\sigma}(g)$ и число k — свои для каждой функции g). Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, — произвольная функция, отличная от констант, $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(f) = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, k , $0 \leq k \leq n$, — число единиц.

Если $k = 0$, то $f(\tilde{x}) = 1 \oplus g(x_1, \dots, x_n)$, где $g(0, \dots, 0) = 0$. Константа 1 реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой с $k = 0$, поэтому функция f реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой по лемме 3.

Если $k = n$, то $f(\tilde{x}) = x_1 \& \dots \& x_n$, и $\tilde{\sigma}$ -схемой для f является цепь из конъюнкторов (см. рис. 2).

Если $k = 1$, то

$$f(\tilde{x}) = x_1(1 \oplus g_1(x_2, \dots, x_n)) \oplus g_2(x_2, \dots, x_n),$$

где $g_1(0, \dots, 0) = g_2(0, \dots, 0) = 0$. Функция $1 \oplus g_1(x_2, \dots, x_n)$ реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой без участия x_1 по лемме 3, функция $x_1(1 \oplus g_1)$ — по лемме 1, наконец, функция $f = x_1(1 \oplus g_1) \oplus g_2$ — по лемме 3.

Пусть теперь $2 \leq k \leq n - 1$. Рассмотрим две функции, пусть $I_0(x_1, \dots, x_n)$ — индикаторная функция тех наборов, для которых либо $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$,

Рис. 2.

либо $x_1 = 0$, и $I_1(x_1, \dots, x_n)$ — индикаторная функция тех наборов, для которых либо $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$, либо $x_1 = 1$. Положим $f_0 = f \& I_0$, $f_1 = f \& I_1$, $g(x_{k+1}, \dots, x_n) = x_{k+1} \vee x_{k+2} \vee \dots \vee x_n$.

Покажем, что

$$f = f_0 f_1 \oplus g f_0 \oplus g f_1 \oplus g f_0 f_1. \quad (1)$$

Действительно, при $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$ справедливы равенства $g = 0$, $I_0 = 1$, $I_1 = 1$ и $f_0 f_1 \oplus g f_0 \oplus g f_1 \oplus g f_0 f_1 = f_0 \& f_1 = f I_0 \& f I_1 = f$. Если же значение хотя бы одной из переменных $x_{k+1}, \dots, x_n$ отлично от 0, то $g = 1$, $I_0 = 1 \oplus x_1$, $I_1 = x_1$ и $f_0 f_1 \oplus g f_0 \oplus g f_1 \oplus g f_0 f_1 = f_0 \oplus f_1 = f I_0 \oplus f I_1 = f(1 \oplus x_1) \oplus f x_1 = f$. В силу формулы предложения 1 и леммы 4 достаточно доказать, что каждая из функций f_0 и f_1 реализуется $\tilde{\sigma}$ -схемой.

Для функции f_0 набор $\tilde{\sigma} = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ с k единицами и $n - k$ нулями по-прежнему является единичным набором с наименьшим числом единиц. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} f_{01}(x_2, \dots, x_n) &= f_0(0, x_2, \dots, x_n) \vee f_0(1, x_2, \dots, x_n), \\ f_{02}(x_1, x_3, \dots, x_n) &= f_0(x_1, 0, x_3, \dots, x_n) \vee f_0(x_1, 1, x_3, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Покажем, что

$$f_0(x_1, \dots, x_n) = f_{01}(x_2, \dots, x_n) \& f_{02}(x_1, x_3, \dots, x_n). \quad (2)$$

Если для какого-то набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ справедливо равенство $f_0(\tilde{\alpha}) = 1$, то, как нетрудно видеть, $f_{01}(\alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$ и $f_{02}(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = 1$, так что формула (2) верна для набора $\tilde{\alpha}$.

Пусть теперь для набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ справедливо равенство $f_0(\tilde{\alpha}) = 0$. Если $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$, то среди $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ есть хотя бы один нуль и

$$f_{01}(\alpha_2, \dots, \alpha_n) = f_0(0, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0) \vee f_0(1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0) = 0.$$

Если же $\alpha_1 = 1$ и среди $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ есть хотя бы одна единица, то

$$f_{02}(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = f_0(1, 0, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \vee f_0(1, 1, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = 0 \vee 0 = 0$$

(поскольку $I_0(1, x_2, \dots, x_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = 0$, см. определение функции $I_0(\tilde{x})$).

Если $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$, то

$$f_{02}(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = f_0(0, 0, \alpha_3, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0) \vee f_0(0, 1, \alpha_3, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0) = 0.$$

Если же $\alpha_1 = 0$ и среди $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ есть хотя бы одна единица, то

$$f_{01}(\alpha_2, \dots, \alpha_n) = f_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \vee f_0(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0 \vee 0 = 0$$

($f_0(\tilde{\alpha}) = 0$ по предположению, а $f_0(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ по определению f_0).

Таким образом, во всех случаях получается либо $f_{01}(\tilde{\alpha}) = 0$, либо $f_{02}(\tilde{\alpha}) = 0$, так что формула (2) верна.

Для функций $f_{01}(x_2, \dots, x_n)$ и $f_{02}(x_1, x_3, \dots, x_n)$ набор $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ с $k-1$ единицами и $n-k$ нулями является единичным набором с наименьшим числом единиц, и по предположению индукции эти функции реализуются $\tilde{\sigma}$ -схемами без участия переменных x_1 и x_2 соответственно.

Аналогично доказывается, что

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = f_{11}(x_2, \dots, x_n) \& f_{12}(x_1, x_3, \dots, x_n), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} f_{11}(x_2, \dots, x_n) &= f_1(0, x_2, \dots, x_n) \vee f_1(1, x_2, \dots, x_n), \\ f_{12}(x_1, x_3, \dots, x_n) &= f_1(x_1, 0, x_3, \dots, x_n) \vee f_1(x_1, 1, x_3, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Для функций $f_{11}(x_2, x_3, \dots, x_n)$ и $f_{12}(x_1, x_3, \dots, x_n)$ набор $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ с $k-1$ единиц и $n-k$ нулями является набором с наименьшим числом единиц, и по предположению индукции эти функции реализуются $\tilde{\sigma}$ -схемами без участия переменных x_1 и x_2 соответственно.

В силу формул (2), (3) и леммы 1 функции f_0 и f_1 реализуются $\tilde{\sigma}$ -схемами.

Предложение 1 и теорема 2 доказаны.

Список литературы

1. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. МГУ, Москва, 1984.
2. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Высшая школа, Москва, 2002.
3. Яблонский С. В., Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем. *Матем. вопросы кибернетики* (1988) **1**, 5–25.
4. Редькин Н. П., *Надежность и диагностика схем*. МГУ, Москва, 1992.
5. Reddy S. M., Easily testable realization for logic functions. *IEEE Trans. Computers* (1972) **21**, 124–141.
6. Бородина Ю. В., О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов. *Вестник Московского университета. Сер. 1, матем. механ.* (2008), № 5, 49–52.

Статья поступила 23.01.2009.