Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Токарева, Группа автоморфизмов множества бент-функций, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 4, 34–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:32:06

Группа автоморфизмов множества бент-функций

© 2010 г. Н. Н. Токарева

Бент-функции — это булевы функции от четного числа переменных, удаленные от множества всех аффинных функций на максимально возможное расстояние. В работе показано, что каждое изометричное отображение множества булевых функций от n переменных в себя, оставляющее класс бент-функций на месте, является комбинацией аффинного преобразования координат и сдвига на аффинную функцию. Доказано, что аффинные функции — это в точности все те булевы функции, которые удалены от класса бент-функций на максимально возможное расстояние.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых, грант МК 1250.2009.1, Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 08–01–00671, 09–01–00528, 10–01–00424, и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., государственный контракт 02.740.11.0429.

1. Введение

Бент-функции — это булевы функции от четного числа переменных, удаленные от множества всех аффинных функций на максимально возможное расстояние. Они были введены О. Ротхаусом [6]. В настоящее время бент-функции активно изучаются и имеют много приложений в теории кодирования, криптографии, цифровой сотовой связи и других областях (см. обзоры [3, 4]). Тем не менее, в теории бент-функций много открытых вопросов. Среди них — вопрос о группе автоморфизмов множества бент-функций, ответ на который дается в данной работе.

Пусть A — невырожденная двоичная $n \times n$ матрица, пусть b и c — двоичные векторы длины n , и d — константа. Известно, что любое отображение вида

$$g(x) \rightarrow g(Ax + b) + \langle c, x \rangle + d,$$

заданное на множестве булевых функций от n переменных, оставляет класс бент-функций на месте. Существуют ли другие изометричные отображения множества булевых функций в себя, оставляющие неподвижным класс бент-функций? В данной работе показано, что других таких отображений нет.

Рассмотрим структуру статьи. Основная часть статьи посвящена доказательству того, что для любой неаффинной функции f найдется такая бент-функция g , что функция $f + g$ не является бент-функцией (теорема 1). Другими словами, множество бент-функций замкнуто относительно прибавления только аффинных булевых функций. Из этого факта будет следовать, что аффинные функции — это в точности все те булевы функции,

которые удалены от класса бент-функций на максимально возможное расстояние. Другими словами, существует в некотором смысле дуальность между определениями бент-функций и аффинных функций. Далее устанавливается, что множество бент-функций и множество аффинных функций имеют одинаковые группы автоморфизмов. Этой общей группой является полупрямое произведение полной аффинной группы $GA(n)$ на $\mathbb{Z}_2^{n+1}$ (см. теорему 2).

2. Определения и факты

Пусть $\langle x, y \rangle$ — обычное скалярное произведение двоичных векторов $x, y \in \mathbb{Z}_2^n$ по модулю 2. Расстоянием Хэмминга $d(x, y)$ между векторами x и y называется число координат, в которых они различаются.

Под расстоянием $\text{dist}(f, g)$ между булевыми функциями f и g будем понимать расстояние между их векторами значений. Через $\text{supp}(f)$ обозначим носитель функции f , то есть множество тех векторов, на которых f равна единице. Известно, что каждая булева функция f может быть представлена в алгебраической нормальной форме, степень которой обозначим через $\deg(f)$. Булевы функции степени 1 называются аффинными и имеют вид $\langle c, x \rangle + d$ для подходящего вектора c и константы d . Множество всех аффинных функций от n переменных обозначим через $\mathcal{A}_n$.

Преобразованием Уолша–Адамара булевой функции f от n переменных называется целочисленная функция

$$W_f(y) = \sum_x (-1)^{\langle x, y \rangle + f(x)}.$$

Бент-функцией называется булева функция от четного числа n переменных такая, что модуль каждого коэффициента Уолша–Адамара $W_f(y)$ этой функции равен $2^{n/2}$.

Производной булевой функции f по направлению y называется бинарная сумма $f(x) + f(x + y)$. Заметим, что булева функция f аффинна тогда и только тогда, когда ее производная по любому направлению является константой.

Эквивалентно, бент-функции могут быть определены (см. [1]) следующим образом.

Предложение 1. *Булева функция g является бент-функцией, тогда и только тогда, когда ее производная по любому ненулевому направлению y уравновешена, то есть выполняется равенство*

$$\sum_x (-1)^{g(x) + g(x+y)} = 0.$$

Множество всех бент-функций от n переменных обозначим через $\mathcal{B}_n$. Хорошо известно следующее свойство бент-функций.

Предложение 2. *Пусть A — невырожденная двоичная $n \times n$ матрица, b и c — двоичные векторы, d — константа. Любое отображение вида*

$$g(x) \rightarrow g(Ax + b) + \langle c, x \rangle + d,$$

заданное на множестве булевых функций от n переменных, оставляет класс бент-функций на месте.

Далее нам потребуется известная конструкция бент-функций Мак-Фарланда [5].

Предложение 3. Функция

$$f(x', x'') = \langle x', \pi(x'') \rangle + h(x'')$$

является бент-функцией от n переменных, где π — любая перестановка на $\mathbf{Z}_2^{n/2}$ и булева функция h от $n/2$ переменных произвольна.

Заметим, что разбиение переменных на две равные части x' и x'' может быть любым.

Рассмотрим векторы, у которых фиксированы значения некоторых $n - k$ координат, а значения остальных координат выбираются произвольно. Множество всех таких векторов называется гранью размерности k пространства $\mathbf{Z}_2^n$. Например, множество

$$\Gamma = \{(x', x'') : x'' = a\}$$

является гранью размерности $n/2$, где $x', x'' \in \mathbf{Z}_2^{n/2}$.

3. О сдвигах класса бент-функций

Докажем следующий факт, из которого в качестве следствий и будут получены основные результаты работы.

Теорема 1. Для любой неаффинной функции f найдется такая бент-функция g , что функция $f + g$ не является бент-функцией.

Доказательство. Предположим, что для некоторой фиксированной функции f такой, что $\deg(f) \geq 2$, справедливо равенство $f + \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n$. Покажем, что это приведет к противоречию.

Идея доказательства состоит в следующем. Сначала покажем, что некоторая сумма должна быть равна нулю для любой бент-функции (см. далее сумму (1)). Затем в классе Мак-Фарланда найдем бент-функцию — контрпример g' , для которой это равенство не будет выполняться. Бент-функция g' будет получена из специально выбранной бент-функции g инвертированием ее значений на некоторой грани Γ размерности $n/2$. Ключевым условием для возможности выбора такой грани является то, что для некоторого ненулевого y множество $D = \text{supp}(f(x) + f(x + y))$ будет собственным подмножеством пространства $\mathbf{Z}_2^n$, что возможно тогда и только тогда, когда f неаффинна.

Доказательство удобно разделить на несколько этапов.

3.1. Равенство для любой бент-функции

Поскольку $\deg(f) \geq 2$, найдется такой ненулевой вектор y , что производная функции f по направлению y не является константой. Можно считать, что $y = 1$. Действительно, так как если y — другой ненулевой вектор, то от функции f перейдем к функции $f'(x) = f(Ax)$, где $A \cdot 1 = y$. Очевидно, что производная функции f' по направлению 1 не является константой, и так же как и для f , выполняется равенство $f' + \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n$ (то есть можно доказывать теорему для f'). Поэтому всюду далее считаем, что $y = 1$.

Пусть g — произвольная бент-функция. Тогда $f + g$ — также бент-функция, и согласно утверждению 1 выполняются равенства

$$\sum_x (-1)^{g(x) + g(x+y)} = 0,$$

$$\sum_x (-1)^{g(x) + f(x) + g(x+y) + f(x+y)} = 0.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем, что

$$\sum_x (-1)^{g(x)+g(x+y)} (1 - (-1)^{f(x)+f(x+y)}) = 0.$$

Обозначим через D множество $\text{supp}(f(x) + f(x+y))$. Тогда для любой бент-функции g должно выполняться равенство

$$\sum_{x \in D} (-1)^{g(x)+g(x+y)} = 0. \quad (1)$$

3.2. Выбор грани

Так как функция $f(x) + f(x+y)$ не является константой, множество D не пусто и не совпадает со всем булевым кубом. Тогда существует $(n/2)$ -мерная грань Γ такая, что она имеет непустое пересечение и с множеством D , и с его дополнением $\mathbb{Z}_2^n \setminus D$, то есть выполняются неравенства

$$0 < m < |\Gamma| = 2^{n/2}, \quad (2)$$

где $m = |\Gamma \cap D|$. Действительно, такую грань всегда можно построить, например, как грань через любой вектор $u \notin D$ и один из векторов v или $v+y$, где $v \in D$, так как либо расстояние $d(u, v)$, либо расстояние $d(u, v+y)$ окажется не превосходящим $n/2$.

Заметим, что грань $\Gamma+y$ также имеет пересечение мощности m с множеством D , поскольку, как нетрудно заметить, $D+y = D$. Отметим также, что грани Γ и $\Gamma+y$ не пересекаются (в силу выбора $y=1$). Имеет место следующее разбиение множества D :

$$D = (\Gamma \cap D) \cup ((\Gamma+y) \cap D) \cup (D \setminus (\Gamma \cup (\Gamma+y))), \quad (3)$$

которое потребуется нам в дальнейшем.

Без ограничения общности считаем, что грань Γ имеет вид

$$\Gamma = \{(x', x'') : x'' = a\}$$

для некоторого вектора $a \in \mathbb{Z}_2^{n/2}$. В случае, если фиксированные координаты грани расположены иначе, доказательство проводится аналогично.

Пусть множество $\Gamma \cap D$ представляется в виде

$$\Gamma \cap D = \{(b^{(1)}, a), (b^{(2)}, a), \dots, (b^{(m)}, a)\}$$

для подходящих векторов $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(m)}$ длины $n/2$.

3.3. Специальное подмножество бент-функций

Рассмотрим подмножество G бент-функций вида

$$g(x', x'') = \langle x', \pi(x'') \rangle$$

из класса Мак-Фарланда таких, что перестановки π являются линейными преобразованиями пространства, то есть каждая перестановка π определяется как $\pi(x'') = Ax''$,

для подходящей невырожденной матрицы A . Покажем, что в классе G найдется такая бент-функция g , что сумма

$$S = \sum_{x \in \Gamma \cap D} (-1)^{g(x) + g(x+y)}$$

будет не равна нулю. Действительно, распишем эту сумму, подставляя вид произвольной функции из G . Поскольку

$$\pi(x'' + y'') = A(x'' + y'') = Ax'' + Ay'',$$

где $y = (y', y'')$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} g(x) + g(x+y) &= \langle x', Ax'' \rangle + \langle x' + y', Ax'' + Ay'' \rangle \\ &= \langle x', Ay'' \rangle + \langle y', Ax'' + Ay'' \rangle. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя в сумму S , получаем равенство

$$S = (-1)^\gamma \sum_{i=1}^m (-1)^{\langle b^{(i)}, Ay'' \rangle},$$

где $\gamma = \langle y', Aa + Ay'' \rangle$ — константа, зависящая от конкретного выбора матрицы A . Вектор y'' ненулевой (по нашему выбору $y'' = 1$) и матрица A может быть любой невырожденной матрицей, поэтому вектор $z = Ay''$ также может быть произвольным ненулевым вектором длины $n/2$. Таким образом, наша задача показать, что найдется такой ненулевой вектор z , что не равна нулю сумма

$$\sum_{i=1}^m (-1)^{\langle b^{(i)}, z \rangle}. \quad (4)$$

3.4. Поиск вектора z

Предположим обратное. Пусть для каждого ненулевого вектора z сумма (4) равна нулю. Рассмотрим двоичную матрицу M размера $(n/2) \times m$, столбцами которой являются все векторы $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$. Тогда сумма (4) есть не что иное как разность между числом нулей и числом единиц в линейной комбинации строк матрицы M , определяемой вектором z (строка i входит в комбинацию, если $z_i = 1$). По предположению, матрица M должна удовлетворять следующему условию: любая ненулевая линейная комбинация строк матрицы M содержит одинаковое число нулей и единиц. Несложно понять, что, с точностью до перестановки столбцов, эта матрица должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} \\ \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} & \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} \\ \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} & \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} & \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} & \underbrace{0 \dots 0}_{m/8} & \underbrace{1 \dots 1}_{m/8} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Отсюда сразу следует, что число столбцов матрицы должно быть не меньше, чем $2^{n/2}$, где $n/2$ — число строк. Таким образом, для существования такой матрицы M необходимо, чтобы выполнялось неравенство $m \geq 2^{n/2}$. Но это противоречит условию выбора грани Γ , а именно, неравенству (2). Следовательно, всегда найдется вектор z такой, что сумма (4) не равна нулю. Зафиксируем этот вектор z .

3.5. Построение функции-контрпримера

Пусть A — невырожденная матрица такая, что $Ay'' = z$, пусть перестановка π определяется равенством $\pi(x'') = Ax''$. Из условия выбора вектора z следует, что для функции $g(x', x'') = \langle x', \pi(x'') \rangle$ справедливо равенство

$$S = \sum_{x \in \Gamma \cap D} (-1)^{g(x) + g(x+y)} \neq 0. \quad (5)$$

Определим новую бент-функцию g' , отличающуюся от g лишь на грани Γ . Далее мы увидим, что функции $f + g$ и $f + g'$ не могут одновременно быть бент-функциями, что и приведет к противоречию с основным предположением. Итак, пусть

$$g'(x', x'') = g(x', x'') + h(x''),$$

где

$$h(x'') = \begin{cases} 1, & \text{если } x'' = a; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Другими словами, g' получена из функции g инвертированием ее значений на грани Γ . Так как g из класса Мак-Фарланда, функция g' — тоже бент-функция. Заметим, что тогда в силу разбиения (3)

$$\begin{aligned} \sum_{x \in D} (-1)^{g'(x) + g'(x+y)} &= \left(\sum_{x \in \Gamma \cap D} (-1)^{g(x) + 1 + g(x+y) + 0} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{x \in (\Gamma+y) \cap D} (-1)^{g(x) + 0 + g(x+y) + 1} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{x \in (D \setminus (\Gamma \cup (\Gamma+y)))} (-1)^{g(x) + g(x+y)} \right) \\ &= \left(\sum_{x \in (D \setminus (\Gamma \cup \Gamma+y))} (-1)^{g(x) + g(x+y)} \right) - 2S. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{x \in D} (-1)^{g'(x) + g'(x+y)} = \sum_{x \in D} (-1)^{g(x) + g(x+y)} - 4S.$$

Отсюда из равенства (1) и неравенства (5) следует, что

$$\sum_{x \in D} (-1)^{g'(x) + g'(x+y)} \neq 0.$$

Но равенство (1) должно выполняться для любой бент-функции, в том числе и для g' . Полученное противоречие доказывает теорему.

4. Дуальность определений бент-функций и аффинных функций

При четном n класс бент-функций $\mathcal{B}_n$ можно определить как множество функций, отстоящих от класса всех аффинных булевых функций $\mathcal{A}_n$ на максимально возможное расстояние $N_{\max}$, то есть

$$\mathcal{B}_n = \{g: \text{dist}(g, \mathcal{A}_n) = N_{\max}\}.$$

При этом известно, что

$$N_{\max} = 2^{n-1} - 2^{(n/2)-1}.$$

Но можно ли обратить это определение? Другими словами, верно ли, что $\mathcal{A}_n$ — это множество всех булевых функций, отстоящих от класса $\mathcal{B}_n$ на максимально возможное расстояние $N'_{\max}$? Пусть

$$\mathcal{A}'_n = \{f: \text{dist}(f, \mathcal{B}_n) = N'_{\max}\}.$$

Покажем, что подобное обращение определений действительно возможно, то есть справедливы равенства

$$N_{\max} = N'_{\max}, \quad \mathcal{A}_n = \mathcal{A}'_n.$$

Предложение 4. *Справедливо равенство*

$$N'_{\max} = 2^{n-1} - 2^{(n/2)-1}.$$

Доказательство. По определению

$$N'_{\max} = \max_f \min_{g \in \mathcal{B}_n} \text{dist}(f, g).$$

Заметим, что

$$\text{dist}(f, g) = 2^{n-1} - \frac{1}{2} W_{f+g}(0).$$

Поэтому

$$N'_{\max} = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \min_f \max_{g \in \mathcal{B}_n} |W_{f+g}(0)|.$$

Зафиксируем любую бент-функцию g' от n переменных. Поскольку класс $\mathcal{B}_n$ замкнут относительно добавления аффинных функций, каждая функция вида $g' + l_a$, где $l_a(x) = \langle a, x \rangle$, является бент-функцией. Заметим, что

$$W_{f+g'+l_a}(0) = W_{f+g'}(a).$$

Тогда очевидно, что

$$\max_{g \in \mathcal{B}_n} |W_{f+g}(0)| \geq \max_{\substack{g \in \mathcal{B}_n \\ g = g' + l_a \text{ для некоторого } a}} |W_{f+g}(0)| = \max_a |W_{f+g'}(a)|.$$

Но из равенства Парсеваля для булевой функции $f + g'$ следует, что

$$\max_a |W_{f+g'}(a)| \geq 2^{n/2}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$N'_{\max} \leq 2^{n-1} - 2^{(n/2)-1}.$$

С другой стороны, расстояние $2^{n-1} - 2^{(n/2)-1}$ до класса бент-функций достигается, например, для любой аффинной функции f . Утверждение доказано.

Предложение 5. *Справедливо равенство $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}'_n$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}'_n$. Предположим, что существует функция $f \in \mathcal{A}'_n \setminus \mathcal{A}_n$. Тогда по теореме 1 найдется бент-функция g такая, что $f + g$ не является бент-функцией, то есть существует вектор a такой, что

$$|W_{f+g}(a)| > 2^{n/2}.$$

Рассмотрим бент-функцию

$$g'(x) = g(x) + \langle a, x \rangle.$$

Для нее справедливо равенство $W_{f+g'}(0) = W_{f+g}(a)$ и в силу равенства

$$\text{dist}(f, \mathcal{B}_n) = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{g \in \mathcal{B}_n} |W_{f+g}(0)|$$

закключаем, что $\text{dist}(f, \mathcal{B}_n) < N'_{\max}$, что противоречит выбору f . Таким образом, $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}'_n$.

Заметим, что ключевым фактом, позволившим установить дуальность между определениями аффинных функций и бент-функций, является теорема 1.

5. Автоморфизмы бент-функций

Отображение φ множества всех булевых функций от n переменных в себя называется изометричным, если оно сохраняет расстояния между булевыми функциями, то есть

$$\text{dist}(\varphi(f), \varphi(g)) = \text{dist}(f, g).$$

Известно, что любое такое отображение однозначно представляется в виде

$$g(x) \rightarrow g(s(x)) + f(x), \quad (6)$$

где $s: \mathbf{Z}_2^n \rightarrow \mathbf{Z}_2^n$ — любая подстановка, f — произвольная функция от n переменных.

Группой автоморфизмов подмножества булевых функций $\mathcal{M}$ называется группа изометричных отображений множества всех булевых функций в себя, оставляющих неподвижным множество $\mathcal{M}$. Обозначим эту группу через $\text{Aut}(\mathcal{M})$.

Напомним, что полная аффинная группа $GA(n)$ состоит из всех отображений вида $g(x) \rightarrow g(Ax + b)$, где A — невырожденная матрица, b — произвольный вектор. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 6. *Группа $\text{Aut}(\mathcal{A}_n)$ равна полупрямому произведению полной аффинной группы $GA(n)$ на $\mathbf{Z}_2^{n+1}$.*

Действительно, для любого автоморфизма (6) сдвиг на функцию f может определяться только аффинной функцией (так как образ нулевой функции — также аффинная функция). Множество всех аффинных функций от n переменных образует группу, изоморфную $\mathbf{Z}_2^{n+1}$. Остается отметить, что каждая перестановка s , как известно, должна принадлежать группе $GA(n)$ (см., например, [2]).

Теорема 2. *Справедливы равенства*

$$\text{Aut}(\mathcal{B}_n) = \text{Aut}(\mathcal{A}_n) = GA(n) \ltimes \mathbf{Z}_2^{n+1}.$$

Доказательство. Очевидно, что $\text{Aut}(\mathcal{A}_n) \subseteq \text{Aut}(\mathcal{B}_n)$. Действительно, для любого отображения $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{A}_n)$ и любой бент-функции g

$$\text{dist}(g, \mathcal{A}_n) = \text{dist}(\varphi(g), \varphi(\mathcal{A}_n)) = \text{dist}(\varphi(g), \mathcal{A}_n).$$

Следовательно, любая бент-функция под действием φ переходит в некоторую другую бент-функцию.

Аналогично, $\text{Aut}(\mathcal{B}_n) \subseteq \text{Aut}(\mathcal{A}_n)$. Именно для любого автоморфизма $\psi \in \text{Aut}(\mathcal{B}_n)$ и любой аффинной функции f

$$\text{dist}(f, \mathcal{B}_n) = \text{dist}(\psi(f), \psi(\mathcal{B}_n)) = \text{dist}(\psi(f), \mathcal{B}_n).$$

Отсюда, согласно утверждениям 4 и 5, следует, что $\psi(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$. Получаем, что $\text{Aut}(\mathcal{B}_n) = \text{Aut}(\mathcal{A}_n)$. Из предложения 6 следует конкретный вид этой группы.

Таким образом, если отображение (6) переводит класс бент-функций в себя, то оно имеет вид

$$g(x) \rightarrow g(Ax + b) + \langle c, x \rangle + d.$$

Напомним, что бент-функции, получающиеся одна из другой с помощью такого отображения называются аффинно эквивалентными. Из полученных результатов следует, что более общего подхода к эквивалентности бент-функций на основе изометричных отображений не существует.

Список литературы

1. Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*. МЦНМО, Москва, 2004.
2. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Мир, Москва, 1979.
3. Токарева Н. Н., Бент-функции: результаты и приложения. Обзор работ. *Прикладная дискретная математика* (2009) **2**, №1, 15–37.
4. Токарева Н. Н., Обобщения бент-функций. Обзор работ. *Дискретный анализ и исследование операций* (2010) **17**, №1, 34–64.
5. McFarland R. L., A family of difference sets in non-cyclic groups. *J. Comb. Theory, Ser. A* (1973) **15**, 1–10.
6. Rothaus O., On bent functions. *J. Comb. Theory, Ser. A* (1976) **20**, 300–305.

Статья поступила 19.04.2010.

Переработанный вариант поступил 14.05.2010.