Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Р. Беджанова, Схемы для дизъюнкции, допускающие короткие единичные диагностические тесты, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 4, 43–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 08:08:54

Схемы для дизъюнкции, допускающие короткие единичные диагностические тесты

© 2010 г. С. Р. Беджанова

В работе исследуются тесты для схем, реализующих дизъюнкцию. В схеме допускается инверсная неисправность на выходе ровно одного из функциональных элементов. Для любого функционально полного базиса B установлено, что при любом $n \geq 3$ дизъюнкцию n переменных можно реализовать схемой над B , допускающей единичный диагностический тест не более чем из двух наборов. Доказано, что в общем случае этот результат неулучшаем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-01-00863, и программы фундаментальных исследований РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

Рассматриваются схемы из функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе [1, 2], реализующие дизъюнкцию n переменных, где $n \geq 3$. Пусть в схемах в неисправное состояние может перейти выход ровно одного из элементов, и это инверсная неисправность. Таким образом, если в исправном состоянии элемент реализует функцию φ , то при его поломке на выходе элемента реализуется функция $\bar{\varphi}$. Среди всех схем, реализующих $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$, будем выделять те, которые допускают тесты минимальной возможной длины.

Функция, реализуемая на выходе схемы при наличии в схеме неисправного элемента, называется функцией неисправности. Пусть $g_1, \dots, g_k$ — все возможные функции неисправности схемы S , отличные от функции f . Множество T наборов длины n называется единичным диагностическим тестом схемы S , если для любой пары функций из множества $\{g_1, \dots, g_k, f\}$ в нем найдется набор, на котором эти функции различаются. Через $D(T)$ обозначим длину этого теста, то есть число наборов в нем. Пусть $D(S) = \min D(T)$, где минимум берется по всем единичным тестам для схемы S , а $D_{\text{ЕДТ}}(x_1 \vee \dots \vee x_n) = \min D(S)$, где минимум берется по всем схемам, реализующим $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$. Заметим, что в данной работе при исследовании единичных тестов рассматриваются, как обычно, неизбыточные схемы (определения см., например, [3, 4]).

Теорема 1. *Функция $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$ может быть реализована неизбыточной схемой, допускающей единичный диагностический тест, состоящий не более, чем из двух наборов.*

Доказательство. При конструктивном доказательстве теоремы воспользуемся классификацией базисов из [5].

Рис. 1.

1. Базисы $\{x \vee y, \bar{x}\}$, $\{x \vee \bar{y}, \bar{x}\}$. Для таких базисов утверждение теоремы доказано в [6].

2. Базис $\{x \vee y, \bar{x}\}$. Функцию $f(\bar{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$ в данном базисе можно реализовать схемой, представленной на рис. 1. При переходе в неисправное состояние любого одного из элементов $A_1, \dots, A_{2n}$, $B_1, \dots, B_{2n-2}$ получим функцию неисправности $g_1 \equiv 1$; при неисправности элемента D или элемента E получим функцию неисправности $g_2 = \bar{f}$.

Итак, получаем всего две различные функции неисправности, следовательно, $D_{\text{ЕДТ}} \leq 2$ (здесь и далее в подобных случаях достаточно воспользоваться определением единичного диагностического теста и теоремой 7 из [3]).

3. Базис $\{\bar{x} \& \bar{y}\}$. Реализуем дизъюнкцию n переменных схемой, представленной на рис. 2; в этой схеме подсхема S_2 устроена точно таким же образом, как и S_1 . Без ограничения общности предполагаем, что в блоке S_2 отсутствуют неисправности. Если неисправен элемент A_1 или элемент B_1 , то получаем функцию неисправности

$$\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \vee \dots \vee x_n \vee f \equiv 1.$$

При неисправности одного из элементов $A_i, B_i, i \in \{2, \dots, n-1\}$, получаем функцию неисправности

$$\overline{(x_1 \vee \dots \vee x_i)} \& \bar{x}_{i+1} \vee x_{i+2} \vee \dots \vee x_n \vee f \equiv 1.$$

При неисправности E или E' на выходе схемы получим $\bar{f}$. В итоге получаем две нетривиальные функции неисправности $g_1 \equiv 1$ и $g_2 = \bar{f}$, а это означает, что $D_{\text{ЕДТ}} \leq 2$.

Рис. 2.

Рис. 3.

4. Базис $\{\bar{x} \vee \bar{y}\}$. Схема S' на рис. 3 реализует функцию $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$. Эта схема реализует также, как нетрудно заметить, следующие функции неисправности:

$$g_i = x_1 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee \bar{x}_i \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n$$

при неисправности элемента E_i , $i = 1, \dots, n$;

$$h_i = \bar{x}_1 \& \dots \& \bar{x}_{i+1} \vee x_{i+2} \vee \dots \vee x_n$$

при неисправности одного из элементов A_i или B_i , $i = 1, \dots, n-2$; и $\bar{f}$ при неисправности элемента A_{n-1} .

Рис. 4.

Рассмотрим представленную на рис. 4 схему S , которая содержит две одинаковые подсхемы S' (на рисунке это подсхемы S'_1 и S'_2) и реализует функцию $f(\tilde{x})$. Пусть без ограничения общности все элементы из S'_2 и элемент B' исправны. Тогда при наличии неисправностей в S'_1 на выходе схемы S получим следующие функции неисправности:

$$\begin{aligned} g_i \vee f &\equiv 1, & i &= 1, \dots, n; \\ h_i \vee f &\equiv 1, & i &= 1, \dots, n-2; \\ f \vee \bar{f} &\equiv 1. \end{aligned}$$

При неисправности элемента B получим функцию неисправности $f \vee \bar{f} \equiv 1$, а при неисправности E получим $\bar{f}$. Всего для схемы S возможны две нетривиальные функции неисправности и поэтому $D_{\text{ЕДТ}} \leq 2$.

5. *Базис* $\{x \& \bar{y}, \bar{x}\}$. Реализуем $f(\tilde{x})$ схемой S , представленной на рис. 5, где S'_1 устроена также, как и S_1 (одновходовые элементы реализуют $\bar{x}$, а двухходовые реализуют функцию $x \& \bar{y}$). На выходах подсхем S_1 и S'_1 (при наличии в них единственного неисправного элемента) могут оказаться реализованными следующие функции:

$$g_1 = \overline{x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n}, \quad g_2 = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_n}, \quad \dots, \quad g_n = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n} = \bar{f}.$$

На выходе всей схемы возможны следующие функции неисправности: $h_i = \overline{\bar{g}_i \bar{f}} \equiv 1$ при неисправности какого-то одного элемента в S_1 или в S'_1 , $i = 1, \dots, n$; $h_{n+1} = f \& \bar{f} \equiv 1$

Рис. 5.

при неисправности инвертора E_1 ; $h_{n+2} = \bar{f}$ при неисправности одного из элементов E_2, E_3 .

Итак, на выходе схемы могут получиться всего две различные неисправности, следовательно, $D_{\text{ЕДТ}} \leq 2$.

6. *Базисы, содержащие функцию $x \vee y$.* Для таких базисов требуемое утверждение доказано в работе [6] (теорема 6).

7. *Базисы, содержащие функцию $x \& y$.* Расширением базиса B будем считать (как и в [6]) всякий базис B' , любая функция которого либо совпадает с какой-нибудь функцией из B , либо может быть получена путем отождествления переменных какой-нибудь функции из B . Любая схема, построенная в базисе B' , является схемой и в базисе B . Следовательно, достаточно доказать теорему для базиса B' . Пусть B^* — максимальное (по числу содержащихся в нем попарно различных функций) расширение базиса B . Если B^* , кроме функции $x \& y$, содержит и функцию $\bar{x}$, то строим схему в базисе $\{x \& y, \bar{x}\}$ (см. случай 2).

Рис. 6.

Пусть теперь B^* не содержит $\bar{x}$. Базис B содержит функцию, не сохраняющую константу 0, из которой путем отождествления переменных можно получить либо инверсию, либо константу 1, и функцию, не сохраняющую константу 1, из которой аналогично можно получить либо инверсию, либо константу 0. Но B^* не содержит инверсию, значит, B^* содержит обе константы. Базис B (а значит, и B^*) содержит немонотонную функцию φ . По лемме о немонотонной функции [7], из нее можно получить инверсию путем подстановки вместо некоторых переменных констант.

Рассмотрим схему в базисе B^* , представленную на рис. 6. На этом рисунке каждая из подсхем S_1, S_2, S_3 содержит по два элемента, реализующих булевы константы (если для получения инверсий $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ можно ограничиться подачей на входы элементов верхнего яруса схемы, реализующих функцию φ , лишь какой-то одной булевой константы, то подсхемы S_1, S_2, S_3 содержат по одному элементу).

При наличии неисправного элемента в подсхеме S_1 элементы $E_1, \dots, E_n, A_3$ будут выдавать либо константу 0, либо константу 1, либо тождественную функцию (относительно переменной x , подаваемой на правый вход элемента); при этом, как нетрудно заметить, на выходе всей схемы получим одну из булевых констант. Такие же функции неисправности возможны и при неисправности элемента в S_3 . При неисправности элемента в S_2 на выходе всей схемы получим либо какую-нибудь булеву константу, либо $\bar{f}$. Наконец,

Рис. 7.

при неисправности одного из элементов $A_1, \dots, A_n$ на выходе схемы получим $\bar{f}$, а при неисправности любого отличного от A_1 конъюнктора — константу 1. Таким образом, всего можно получить не более трех различных функций неисправности (а именно, 0, 1 и $\bar{f}$). Очевидно, что $\{0, \bar{f}\}$ является единичным диагностическим тестом и утверждение теоремы выполняется.

8. *Базисы, содержащие функцию $\bar{x} \vee y$ или $\bar{x} \& y$.* Если в B^* содержится инверсия, то мы получим один из рассмотренных случаев 1 или 5 соответственно. Пусть теперь в B^* нет инверсии, тогда в B^* содержатся обе константы. Схема S в базисе $\{\bar{x} \vee y, 0\}$ показана на рис. 7. Каждый двухвходовой элемент в S реализует импликацию, а константа 0, подаваемая на правые входы двухвходовых элементов, получается с использованием единственного во всей схеме элемента E_1 , реализующего данную константу; подсхема S_2 устроена точно так же, как и S_1 .

Выпишем функции $a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, e_2, e_3, \dots, e_n$, которые реализуются на выходе подсхемы S_1 при переходе в неисправное состояние элементов $A, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, E_2, E_3, \dots, E_n$ соответственно:

$$\begin{aligned} a &= a_1 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n; & a_2 &= x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_n; \\ a_3 &= x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \dots \vee x_n; \dots; & a_n &= x_1 \vee \dots \vee x_{n-1} \vee \bar{x}_n; \\ e_2 &= \overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \vee \dots \vee x_n; \\ e_3 &= \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3} \vee x_4 \vee \dots \vee x_n; \dots; & e_n &= \overline{x_1 \vee \dots \vee x_n}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при наличии неисправного элемента в подсхеме S_1 на выходе всей схемы будет реализована константа 1; эта же самая функция неисправности будет реализована и при наличии неисправного элемента в подсхеме S_2 . Легко заметить также, что на выходе схемы S получим $\bar{f}$ при неисправности выходного элемента E или константу 1 при неисправности одного из элементов E' , E_1 (напомним, что в исправном состоянии E_1 реализует константу 0). Всего для схемы S возможны две разные нетривиальные функции неисправности и утверждение теоремы для нее справедливо.

Для базиса $\{\bar{x} \& y, 1\}$ утверждение теоремы доказывается аналогичным образом с использованием схемы S^* , которая представлена на рис. 8. Нетрудно убедиться, что для схемы S^* возможны только две нетривиальные функции неисправности ($\bar{f}$ и константа 1) и утверждение теоремы для S^* выполняется.

9. Базисы, содержащие функцию

$$\varphi = xy \oplus xz \oplus yz \oplus \alpha_1 x \oplus \alpha_2 y \oplus \alpha_3 z \oplus \alpha_4.$$

Для базиса B^* в [8] показано, что если в B^* отсутствуют константы, то B^* содержит по крайней мере одну из функций $x^\sigma y^\sigma$, $x^\sigma \vee y^\sigma$ ($\sigma \in \{0, 1\}$); базисы, содержащие такие функции, уже рассмотрены. Далее считаем, что B^* содержит по крайней мере одну булеву константу β . Если константа $\bar{\beta}$ отсутствует в B^* , то возьмем подсхему (блок) E^* из двух элементов E' , E'' , где E' реализует константу β , E'' реализует функцию, не сохраняющую константу β (такая функция в силу полноты исходного базиса обязательно присутствует в B^*), и все входы элемента E'' соединены с выходом элемента E' , а выход элемента E'' является выходом блока E^* . Исправный блок E^* реализует константу $\bar{\beta}$, а единственной нетривиальной функцией неисправности этого блока является константа β . Следовательно, данный блок можно рассматривать как функциональный элемент, реализующий константу $\bar{\beta}$, и полагать далее, что базис содержит элементы, реализующие обе булевы константы. В зависимости от значений α_1 , α_2 и α_3 достаточно рассмотреть четыре варианта функции φ :

$$\varphi_1 = xy \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus \alpha_4;$$

$$\varphi_2 = xy \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus \alpha_4;$$

$$\varphi_3 = xy \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus \alpha_4;$$

$$\varphi_4 = xy \oplus xz \oplus yz \oplus \alpha_4; \quad \alpha_4 \in \{0, 1\};$$

все остальные варианты сводятся к указанным переименованием переменных. Рассмотрим первый вариант. Ясно, что

$$\varphi_1 = xy \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus \alpha_4 \in B^*$$

и φ_1 реализуется на выходе трехвходового элемента E . При подстановке в φ_1 константы 0 вместо z получаем функцию

$$\varphi_1(x, y) = xy \oplus x \oplus y \oplus \alpha_4 = (x \vee y) \oplus \alpha_4;$$

эта функция реализуется на выходе элемента E при подаче на первые два входа этого элемента переменных x , y и константы 0 (вместо z) на третий вход.

Предположим, что $\alpha_4 = 0$. Возьмем схему S , представленную в [6] на рис. 1 (в схеме на входы выходного дизъюнктора подаются выходы двух одинаковых цепочек из дизъюнкторов длины n , каждая из которых реализует $x_1 \vee \dots \vee x_n$); в исправном состоянии S

Рис. 8.

реализует $x_1 \vee \dots \vee x_n$, а в неисправных состояниях — нетривиальные функции неисправности $g_1 \equiv 1$ и $g_2 = \overline{x_1 \vee \dots \vee x_n}$. В S добавим $2n + 1$ элемент, реализующие константу 0; все дизъюнкторы заменим на трехходовые элементы E , соединив третий вход каждого элемента E с выходом соответствующего ему элемента E_0 , и получим некоторую схему S' , реализующую, как и S , дизъюнкцию $x_1 \vee \dots \vee x_n$. При переходе одного из элементов E_0 в неисправное состояние, на выходе S' будет реализована одна из следующих функций неисправности: $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_n \vee f \equiv 1, \dots, \overline{x_1 \vee \dots \vee x_{n-1}} \vee \bar{x}_n \vee f \equiv 1, \bar{f} \vee \bar{f} = \bar{f}$. При переходе в неисправное состояние любого одного элемента E в схеме S' на выходе этой схемы будет реализована (как и на выходе исходной схемы S) одна из нетривиальных функций неисправности $1, \bar{f}$. В итоге схеме S' отвечают две нетривиальные функции неисправности и $D_{\text{ЕДТ}} \leq 2$.

Если $\alpha_4 = 1$, то в качестве исходной берем схему в базисе $\{\bar{x} \ \& \ \bar{y}\}$, представленную

на рис. 2, и, фактически повторяя вышеизложенные рассуждения (для случая $\alpha_4 = 0$), убеждаемся, что и при $\alpha_4 = 1$ можно построить схему S' , для которой $D_{\text{ЕДТ}}(S') \leq 2$.

Остальные три варианта рассматриваются аналогично. Для φ_2 рассуждения те же, что и для φ_1 . Для φ_3 полагаем $x \equiv 1$ и далее проводим рассуждения, как для φ_1 . Для φ_4 полагаем $z \equiv 1$ и далее рассуждения опять же, что и для φ_1 . В каждом случае утверждение теоремы выполняется.

10. *Произвольный базис.* Пусть B — произвольный полный конечный базис. В [6] показано, что максимальное расширение B^* базиса B содержит либо одну из функций $x^\alpha y^\beta$, $x^\alpha \vee y^\beta$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, либо функцию

$$\varphi = xy \oplus xz \oplus yz \oplus \alpha_1 x \oplus \alpha_2 y \oplus \alpha_3 z \oplus \alpha_4,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \{0, 1\}$; соответствующие базисы уже рассмотрены.

Теорема доказана.

Предложение 1. *Приведенная в теореме оценка в общем случае неулучшаема.*

Доказательство. В [6] это утверждение было доказано для схем без ветвлений выходов элементов, то есть для формул.

Заметим, что любая схема для функции $f(\tilde{x})$ в случае неисправности выходного элемента реализует нетривиальную функцию неисправности $g_1(\tilde{x}) = \bar{f}(\tilde{x})$. С учетом этого обстоятельства для доказательства предложения возьмем базис $\{x \vee y, \bar{x}\}$ и покажем, что для любой избыточной схемы S в данном базисе, реализующей $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$, возможна неисправность, при которой на выходе схемы S получается нетривиальная функция неисправности $g_2(\tilde{x})$, отличная от $g_1(\tilde{x})$.

В схеме S , реализующей $f(\tilde{x})$, выделим цепь Z из элементов, удовлетворяющую следующим условиям:

- (а) начинается Z (верхним) двухходовым элементом E_1 , то есть дизъюнктом;
- (б) заканчивается Z (нижним) элементом E_k , являющимся выходным элементом схемы S ;
- (в) входы верхнего элемента E_1 соединены с различными вершинами V_1 и V_2 схемы S и хотя бы одна из этих вершин, например, V_1 , является выходом некоторого элемента E' схемы S ;
- (г) каждый вход элемента E_i из Z , $i = 2, 3, \dots, k$, соединен с выходом элемента E_{i-1} в случае, когда E_i инвертор, и оба входа элемента E_i соединены с выходами элемента E_{i-1} в случае, когда E_i дизъюнктом (см. рис. 9);
- (д) цепь Z имеет наибольшую возможную длину при указанных условиях.

Учитывая, что S реализует дизъюнкцию не менее чем трех переменных, легко заметить, что указанная непустая цепь Z существует и находится единственным образом. Очевидно также, что на выходе элемента E_1 реализуется либо $f(\tilde{x})$, либо $\bar{f}(\tilde{x})$.

Предположим, что в цепи Z содержится нечетное число инверторов, а на выходе элемента E_1 реализуется $\bar{f}(\tilde{x}) = \overline{x_1 \vee \dots \vee x_n}$. В этом случае либо в каждой из вершин V_1, V_2 реализуется $\bar{f}$, либо в одной из вершин реализуется константа 0, а в другой $\bar{f}$. Если в вершине V_i реализуется константа 0, то V_i — выход элемента, и при неисправности этого элемента на его выходе будет реализована константа 1, а на выходе всей схемы — константа 0; ясно, что в этом случае $g_2(\tilde{x}) \neq g_1(\tilde{x})$.

Рис. 9.

Пусть в вершинах V_1, V_2 реализуется одна и та же функция $\bar{f}$. Поскольку в схеме S нет циклов, функция, реализуемая на выходе хотя бы одного из элементов E', E'' , не зависит от состояния другого элемента; предположим, что на выходах элементов E', E'' реализуются соответственно функции φ, ψ и функция ψ не зависит от состояния элемента E' . При неисправности элемента E' на его выходе, а вслед за ним и на выходе всей схемы опять же будет реализована константа и опять же получаем, что $g_2(\tilde{x}) \neq g_1(\tilde{x})$.

Далее будем считать, что в цепи Z содержится четное число инверторов, а это означает, что на выходе элемента E_1 реализуется f . Рассмотрим отдельно два случая.

1. V_1, V_2 — выходы двух разных элементов E' и E'' , реализующих φ и ψ соответственно.
2. V_1 — выход элемента E' , а V_2 — вход схемы, отвечающий, скажем, переменной x_1 .

Рассмотрим первый случай. Как было замечено выше, без ограничения общности можно предположить, что функция ψ не зависит от состояния элемента E' . Если $\varphi \equiv \psi$, то при неисправности элемента E' на выходе элемента E_1 , а значит, и на выходе всей схемы будет реализована булева константа; получаем отличную от $\bar{f}$ функцию неисправности g_2 .

Пусть $\varphi \neq \psi$. Если $\psi \equiv 0$, то при неисправности элемента E'' на выходе схемы получим константу и $g_2 \neq g_1$. Будем считать ниже, что $\psi \neq 0$; заметим также, что $\varphi(\tilde{0}) = \psi(\tilde{0}) = 0$, иначе на выходе исправной схемы S для входного набора $\tilde{0}$ получим 1, а не 0. Поскольку ψ не является константой 0, найдется набор $\tilde{\sigma}$, отличный от $\tilde{0}$, на котором $\psi(\tilde{\sigma}) = 1$. При неисправности элемента E' для функции неисправности g_2 будет выполнено равенство $g_2(\tilde{0}) = g_2(\tilde{\sigma})$, а это означает, что $g_2 \neq g_1$.

Во втором случае при неисправности элемента E' для g_2 выполняется условие $g_2(\tilde{0}) = g_2(\tilde{1})$, свидетельствующее о том, что $g_2 \neq g_1$.

При наличии двух попарно различных нетривиальных функций неисправности предположение следует, например, из теоремы 21 в [2].

Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. Изд-во МГУ, Москва, 1984.
2. Редькин Н. П., *Дискретная математика*. Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, Москва, 2007.
3. Редькин Н. П., *Надежность и диагностика схем*. Изд-во МГУ, Москва, 1992.
4. Яблонский С. В., Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем. *Математические вопросы кибернетики* (1988) **1**, 5–25.
5. Редькин Н. П., Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов. *Математические вопросы кибернетики* (2003) **12**, 217–230.
6. Беджанова С. Р., О минимальных тестах для схем, реализующих дизъюнкцию. *Дискретный анализ и исследование операций* (2008) **15**, №2, 3–11.
7. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
8. Редькин Н. П., О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов. *Математические вопросы кибернетики* (1992) **2**, 198–222.

Статья поступила 15.04.2010.