Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Круглов, Условия предельной равновероятности распределений в схеме линейной авторегрессии со случайным управлением на конечной группе, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 3, 12–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:56:06

Условия предельной равновероятности распределений в схеме линейной авторегрессии со случайным управлением на конечной группе

© 2005 г. И. А. Круглов

Рассматривается последовательность случайных величин

$$\mu^{(N)} = \xi_N(\mu^{(N-1)})\zeta_N, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где $\mu^{(0)}$ — случайная величина со значениями в конечной группе $G = (G, \bullet)$, (ξ_N, ζ_N) , $N = 1, 2, \dots$, — последовательность одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в декартовом произведении $G \times \text{Aut } G$, где $(\text{Aut } G, \circ)$ — группа автоморфизмов G . Предполагается, что случайные величины $\mu^{(0)}$, (ξ_N, ζ_N) , $N = 1, 2, \dots$, независимы. В работе найдены общие необходимые и достаточные условия того, что при произвольном распределении $\mu^{(0)}$ последовательность распределений случайных величин $\mu^{(N)}$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к равновероятному на G распределению.

Работа выполнена при поддержке программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ-2358.2003.9.

Пусть $(G, \bullet)$ — конечная группа, $(\text{Aut } G, \circ)$ — группа автоморфизмов G , $\mu^{(0)}$ — случайная величина с значениями в G , (ξ_N, ζ_N) , $N = 1, 2, \dots$, — последовательность одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в декартовом произведении $G \times \text{Aut } G$. Будем предполагать, что случайные величины $\mu^{(0)}$, (ξ_N, ζ_N) , $N = 1, 2, \dots$, независимы, ξ_N и ζ_N , вообще говоря, зависимы при каждом $N = 1, 2, \dots$. Построим по индукции последовательность случайных величин

$$\mu^{(N)} = \xi_N(\mu^{(N-1)})\zeta_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Частные случаи последовательностей $\mu^{(N)}$ с значениями в конечных абелевых группах G рассматривались ранее в работах [2]–[5], где исследовались оценки отклонения распределения $\mu^{(N)}$ от равновероятного распределения на G . При этом сходимость к равновероятному распределению на G при $N \rightarrow \infty$ заведомо имела место в силу выбора значений пары (ξ_1, ζ_1) . В [1] описано предельное поведение последовательностей некоторых условных распределений случайных величин $\mu^{(N)}$ при $N \rightarrow \infty$. В данной работе найдены общие необходимые и достаточные условия для того, чтобы при произвольном распределении $\mu^{(0)}$ последовательность распределений случайных величин $\mu^{(N)}$ сходилась при $N \rightarrow \infty$ к равновероятному на G распределению.

Из условий независимости случайных величин $\mu^{(0)}$, (ξ_N, ζ_N) , $N = 1, 2, \dots$, следует, что последовательность $\mu^{(N)}$, $N = 0, 1, 2, \dots$, есть последовательность случайных величин, связанных в простую цепь Маркова $\mathcal{Z}$ с множеством состояний G , некоторой матрицей переходных вероятностей и начальным распределением, совпадающим с распределением $\mu^{(0)}$. Условие предельной равновероятности на G распределений $\mu^{(N)}$ при $N \rightarrow \infty$ независимо от выбора распределения $\mu^{(0)}$ означает, что цепь Маркова $\mathcal{Z}$ вполне регулярна (см. [6]).

Введем ряд обозначений. Для случайной величины η , принимающей значения в некотором множестве M , положим

$$\Omega(\eta) = \{m \in M \mid \mathbf{P}(\eta = m) > 0\}.$$

Пусть E — единичный автоморфизм, $\Omega(\xi_1) = \{A_1, \dots, A_s\}$, $\mathfrak{A}$ — подгруппа группы $\text{Aut } G$, порожденная множеством $\Omega(\xi_1)$. Пусть $\mathfrak{N}$ — минимальный нормальный делитель группы $\mathfrak{A}$ среди таких ее нормальных делителей L , что $\Omega(\xi_1)$ лежит в одном смежном классе группы $\mathfrak{A}$ по L . Положим $d = |\mathfrak{A} : \mathfrak{N}|$.

Назовем словом над алфавитом $\Omega(\xi_1)$ последовательность вида

$$z = (A_{i_k}^{\varepsilon_k}, \dots, A_{i_2}^{\varepsilon_2}, A_{i_1}^{\varepsilon_1}), \quad i_r \in \{1, \dots, s\}, \quad \varepsilon_r = \pm 1, \quad r = 1, \dots, k. \quad (1)$$

Для элемента $B \in \mathfrak{A}$ будем говорить, что слово z вида (1) представляет B , если $B = A_{i_k}^{\varepsilon_k} \circ \dots \circ A_{i_1}^{\varepsilon_1}$, в частности, z — единичное слово, если z представляет E . Для единичного слова z пусть $l(z) = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)$. Нетрудно видеть, что $l(z)$ — целое число. Для $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ пусть $\xi^{(k)}$ — случайная величина с значениями в G , распределение которой есть условное распределение ξ_1 при условии $\xi_1 = A_k$. Для слова z вида (1) введем множество $\Omega(z) \subset G$ следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} v_t &= (A_{i_k}^{\varepsilon_k}, \dots, A_{i_{k-t+1}}^{\varepsilon_{k-t+1}}), \quad t = 1, \dots, k, \\ \Omega(v_1) &= \begin{cases} \Omega(\xi^{(i_k)}), & \text{если } \varepsilon_k = 1, \\ ((\Omega(\xi^{(i_k)}))^{-1})^{A_{i_k}^{-1}}, & \text{если } \varepsilon_k = -1, \end{cases} \\ \Omega(v_{t+1}) &= \begin{cases} \Omega(\xi^{(i_{k-t})})(\Omega(v_t))^{A_{i_{k-t}}}, & \text{если } \varepsilon_{k-t} = 1, \\ ((\Omega(\xi^{(i_{k-t})}))^{-1})^{A_{i_{k-t}}^{-1}} \Omega(v_t), & \text{если } \varepsilon_{k-t} = -1, \quad t = 1, \dots, k-1, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

и наконец, $\Omega(z) = \Omega(v_k)$. Так как группа $\mathfrak{A}$ конечна, существует конечная совокупность $z_1, z_2, \dots, z_t$ единичных слов в алфавите $\Omega(\xi_1)$, для которой система равенств $Z_i = E$, $i = 1, \dots, t$, является системой определяющих соотношений группы $\mathfrak{A}$, порожденной системой образующих $\Omega(\xi_1)$. Зафиксируем произвольно такую совокупность. Пусть также z_0 — произвольное единичное слово, для которого $l(z_0) = 1$. Зафиксируем произвольно элемент $x \in \Omega(z_0)$.

Для каждого $k \in \{1, \dots, s\}$ зафиксируем произвольно элемент $\sigma_k \in \Omega(\xi^{(k)})$. Обозначим через H минимальную подгруппу среди подгрупп L группы G , одновременно удовлетворяющих следующим условиям:

$$\Omega(\xi^{(k)}) \subset L\sigma, \quad k = 1, \dots, s, \quad (3)$$

$$(Lx)^{A_k} = \sigma^{-1} Lx\sigma_k, \quad k = 1, \dots, s, \quad (4)$$

$$\Omega(z_i) \subset Lx^{l(z_i)}, \quad i = 1, \dots, t. \quad (5)$$

Пусть $G^{(1)}$ — подгруппа группы G , порожденная множеством xH , тогда H — подгруппа в $G^{(1)}$, пусть $G^{(1)}/H$ — множество правых смежных классов $G^{(1)}$ по H . Для каждого элемента $B \in \mathfrak{A}$ определим элемент $\sigma_B \in G$ следующим образом: пусть $B \in A_1^v \circ \mathfrak{N}$, где $v \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, z — произвольное слово вида (1), представляющее B , тогда $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k = v + Nd$ для некоторого целого N . Фиксируем $\tau \in \Omega(z)$ и положим $\sigma_B = x^{-N}\tau$.

Пусть

$$\mathfrak{B} = \{B \in \mathfrak{N} \mid \sigma_B \in G^{(1)}\}.$$

Определим отображение $\varphi: \mathfrak{B} \rightarrow G^{(1)}/H$, полагая $\varphi(B) = H\sigma_B$ для всех $B \in \mathfrak{B}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Последовательность распределений случайных величин $\mu^{(N)}$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к равновероятному на G распределению при любом распределении $\mu^{(0)}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие два условия: φ сюръективно и $|\mathfrak{B}| |G : G^{(1)}| = |\mathfrak{N}|$.*

Доказательство теоремы мы проведем после того, как докажем три леммы, которые справедливы независимо от выполнения условий теоремы.

Лемма 1. *Подгруппа H есть нормальный делитель группы $G^{(1)}$, множество $\mathfrak{B}$ есть подгруппа группы $\mathfrak{N}$, отображение φ есть гомоморфизм группы $\mathfrak{B}$ в фактор-группу $G^{(1)}/H$.*

Доказательство. Заметим, что из (4) следуют соотношения

$$L^{A_k} = \sigma_k^{-1} L \sigma_k, \quad k = 1, \dots, s. \quad (6)$$

Для произвольного $B \in \mathfrak{A}$ и слова z , представляющего элемент B , из соотношений (2)–(4) вытекают равенства

$$H\Omega(z) = H\sigma = \sigma H^B, \quad (Hx)\Omega(z) = Hx\sigma = \sigma(xH)^B, \quad \sigma \in \Omega(z). \quad (7)$$

При $B = E$ и $z = z_0$ из (7) получаем равенство $Hx = xH$, следовательно, H — нормальный делитель $G^{(1)}$.

Из соотношений (7) следует, что для всех $B \in \mathfrak{A}$

$$G^{(1)}\sigma_B = \sigma_B(G^{(1)})^B. \quad (8)$$

Для слов v, w обозначим (v, w) слово, полученное приписыванием w справа от v , если w представляет B , то в силу (2)

$$\Omega((v, w)) = \Omega(w)(\Omega(v))^B. \quad (9)$$

Из соотношений (7) и (9) следуют равенства

$$H\sigma_{A \circ B} = H\sigma_B(\sigma_A)^B, \quad A, B \in \mathfrak{N}, \quad (10)$$

$$G^{(1)}\sigma_{A \circ B} = G^{(1)}\sigma_B(\sigma_A)^B, \quad A, B \in \mathfrak{A}. \quad (11)$$

Докажем, что $\mathfrak{B}$ — подгруппа $\mathfrak{N}$. Так как группа $(\mathfrak{N}, \circ)$ конечна, достаточно доказать, что множество $\mathfrak{B}$ замкнуто относительно групповой операции. Пусть $A, B \in \mathfrak{B}$, тогда

$$\sigma_A, \sigma_B \in G^{(1)}. \quad (12)$$

Используя соотношения (11), (8), (12), получим цепочку равенств

$$G^{(1)}\sigma_{A \circ B} = G^{(1)}\sigma_B(\sigma_A)^B = \sigma_B(G^{(1)}\sigma_A)^B = \sigma_B(G^{(1)})^B = G^{(1)}\sigma_B = G^{(1)}.$$

Следовательно, $\sigma_{A \circ B} \in G^{(1)}$ и $A \circ B \in \mathfrak{B}$, что и требовалось доказать.

Докажем, что φ — гомоморфизм групп. Пусть $A, B \in \mathfrak{B}$, тогда $\sigma_A, \sigma_B \in G^{(1)}$, и для некоторого натурального k верно равенство

$$H\sigma_A = Hx^k. \quad (13)$$

Используя соотношения (10), (7), (13), получим, что

$$\begin{aligned} H\sigma_{A \circ B} &= H\sigma_B(\sigma_A)^B = \sigma_B(H\sigma_A)^B = \sigma_B(Hx^k)^B \\ &= Hx^k\sigma_B = Hx^k H\sigma_B = H\sigma_A H\sigma_B. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi(A \circ B) = \varphi(A)\varphi(B)$ для всех $A, B \in \mathfrak{B}$, что и требовалось доказать.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любых $A, B \in \mathfrak{N}$ равенство $\mathfrak{B} \circ A = \mathfrak{B} \circ B$ выполняется тогда и только тогда, когда верно равенство $G^{(1)}\sigma_A = G^{(1)}\sigma_B$.

Доказательство. Для элементов $A, B \in \mathfrak{N}$ положим $C = B \circ A^{-1}$. Пусть

$$\mathfrak{B} \circ A = \mathfrak{B} \circ B,$$

тогда из соотношения (11) и включения $C \in \mathfrak{B}$ следует, что

$$G^{(1)}\sigma_B = G^{(1)}\sigma_{C \circ A} = \sigma_A(G^{(1)}\sigma_C)^A = \sigma_A(G^{(1)})^A = G^{(1)}\sigma_A.$$

Обратно, пусть

$$G^{(1)}\sigma_B = G^{(1)}\sigma_A,$$

тогда из соотношения (1) следует, что

$$\sigma_A(G^{(1)}\sigma_C)^A = G^{(1)}\sigma_B = G^{(1)}\sigma_A = \sigma_A(G^{(1)})^A,$$

следовательно,

$$G^{(1)}\sigma_C = G^{(1)}, \quad \sigma_C \in G^{(1)}, \quad B \circ A^{-1} \in \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B} \circ A = \mathfrak{B} \circ B.$$

Лемма 2 доказана.

Определим подмножество T элементов группы G , полагая

$$T = \bigcup_{B \in \mathfrak{N}} H\sigma_B. \quad (14)$$

Так как φ — гомоморфизм групп, однозначно определена подгруппа K группы $G^{(1)}$ такая, что $H \subset K$, $\varphi(\mathfrak{B}) = K/H$.

Лемма 3. Множество T есть объединение правых смежных классов группы G по ее подгруппе K . Для любых $\sigma, \tau \in T$ равенство $G^{(1)}\sigma = G^{(1)}\tau$ выполняется тогда и только тогда, когда верно равенство $K\sigma = K\tau$.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Пусть $\tau \in T$, $\theta \in K$, нужно доказать, что $\tau \in H\sigma_A$, $\theta \in H\sigma_C$, $H\sigma_C = Hx^k$. Пусть $B = C \circ A$. Используя (7), (10), получим цепочку соотношений

$$\theta\tau \in H\sigma_C H\sigma_A = Hx^k \sigma_A = \sigma_A (Hx^k)^A = H\sigma_A (\sigma_C)^A = H\sigma_B \subset T,$$

то есть $\theta\tau \in T$.

Докажем второе утверждение леммы. Так как K — подгруппа $G^{(1)}$, из равенства $K\sigma = K\tau$ следует, что $G^{(1)}\sigma = G^{(1)}\tau$. Обратно, пусть $G^{(1)}\sigma = G^{(1)}\tau$, $\sigma, \tau \in T$, введем обозначение $\theta = \sigma\tau^{-1}$, $\theta \in G^{(1)}$. Существуют элементы $A, B \in \mathfrak{N}$ такие, что $\sigma \in H\sigma_B$, $\tau \in H\sigma_A$. Пусть $C = B \circ A^{-1}$, тогда по лемме 1 $H\sigma_C = Hx^k$. Используя соотношения (7), (10), получим, что

$$\begin{aligned} H\theta\tau &= H\sigma = H\sigma_B = H\sigma_A (\sigma_C)^A = \sigma_A (H\sigma_C)^A \\ &= \sigma_A (Hx^k)^A = Hx^k \sigma_A = H\sigma_C \sigma_A \subset K\sigma_A = K\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, $\theta \in K$ и $K\sigma = K\tau$.

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через e_G единичный элемент группы G . Как уже было отмечено выше, для выполнения условия предельной равновероятности распределения $\mu^{(N)}$ при $N \rightarrow \infty$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательности $\mu^{(N)}$ цепь Маркова $\mathfrak{Z}$ была вполне регулярна. Из свойств обратимости групповых операций в G и $\text{Aut } G$ следует, что матрица переходных вероятностей цепи Маркова $\mathfrak{Z}$ дважды стохастическая. Из общей теории цепей Маркова (см., например, [6]) следует, что условие вполне регулярности $\mathfrak{Z}$ будет выполнено тогда и только тогда, когда множество G образует единственный класс сообщающихся состояний без циклических подклассов. При проверке последнего условия можно считать, что с вероятностью единица $\mu^{(0)} = e_G$, тогда для выполнения условия вполне регулярности цепи Маркова $\mathfrak{Z}$ необходимо, чтобы существовало N_0 , для которого $\Omega(\mu^{(N)}) = G$ при всех $N > N_0$, и достаточно, чтобы существовало N_0 , для которого $\Omega(\mu^{(N_0)}) = G$.

Пусть $r = |G^{(1)} : H|$. Из теоремы параграфа 4 статьи [1] следует, что существует натуральное N_0 , для которого

$$\Omega(\mu^{(k_N)}) = \bigcup_{B \in \mathfrak{N}} H\sigma_B, \quad k_N = rdN, \quad N > N_0.$$

Суммируя сказанное выше, можно утверждать, что для выполнения условия предельной равновероятности распределения величины $\mu^{(N)}$ при $N \rightarrow \infty$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $G = T$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество представлений правых смежных классов группы $\mathfrak{N}$ по подгруппе $\mathfrak{B}$. Тогда

$$T = \bigcup_{B \in \mathfrak{N}} H\sigma_B = \bigcup_{A \in \mathfrak{M}} \bigcup_{C \in \mathfrak{B}} H\sigma_{C \circ A}.$$

Из лемм 2 и 3 следует, что для всех $A \in \mathfrak{M}$

$$\bigcup_{C \in \mathfrak{B}} H\sigma_{C \circ A} = K\sigma_A$$

и что $K \circ \sigma_A \cap K \circ \sigma_B = \emptyset$ для всех $A, B \in \mathfrak{M}$, $A \neq B$.

Следовательно,

$$T = \bigcup_{A \in \mathfrak{M}} K \sigma_A$$

есть объединение попарно не пересекающихся множеств, откуда, $|T| = |K| |\mathfrak{N} : \mathfrak{B}|$. В силу леммы 2 $|\mathfrak{N} : \mathfrak{B}| \leq |G : G^{(1)}|$, кроме того, $|K| \leq |G^{(1)}|$. Таким образом, равенство $T = G$ выполняется тогда и только тогда, когда одновременно выполнены равенства $K = G^{(1)}$ и $|\mathfrak{N} : \mathfrak{B}| = |G : G^{(1)}|$, что равносильно условию теоремы.

Теорема доказана.

С учетом леммы 1 теорема 1 может быть переформулирована следующим образом.

Следствие 1. Последовательность распределений случайных величин $\mu^{(N)}$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к равновероятному на G распределению при любом распределении $\mu^{(0)}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие два условия: φ — эпиморфизм и $|G : G^{(1)}| = |\mathfrak{N} : \mathfrak{B}|$.

Относительная громоздкость условий доказанной теоремы обусловлена общностью постановки задачи. При некоторых дополнительных условиях на распределение (ξ_1, ζ_1) условия предельной равновероятности распределения $\mu^{(N)}$ удастся существенно упростить. Приведем пример соответствующего утверждения (см. также [7]).

Следствие 2. Пусть множество $\Omega(\xi)$ не лежит в одном смежном классе группы $\mathfrak{A}$ по ее собственной подгруппе, а также существует элемент $\sigma \in \Omega(\xi_1)$, для которого $\mathbf{P}(\xi_1 = \sigma, \zeta_1 = A) > 0$ для всех $A \in \Omega(\xi_1)$. Тогда последовательность распределений случайных величин $\mu^{(N)}$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к равновероятному на G распределению при любом распределении $\mu^{(0)}$, если и только если не существует собственной подгруппы L группы G , удовлетворяющей соотношениям

$$\Omega(\xi_1) \subset L\sigma, \quad L\sigma_1 = \sigma_1 L, \quad (L\sigma_1)^A = (L\sigma_1) \quad \forall A \in \Omega(\xi_1). \quad (15)$$

Доказательство. Докажем, что при выполнении предположений следствия подгруппа H есть минимальная подгруппа группы G , удовлетворяющая соотношениям (15). Из условий следствия вытекает, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}$, $d = 1$, кроме того, можно считать, что $\sigma_1 = \dots = \sigma_s$. Можно также считать, что $\sigma_{A_k} = x^{-1}\sigma_k = x^{-1}\sigma_1$ для любого $k = \{1, \dots, s\}$, следовательно, $G^{(1)}\sigma_{A_k} = G^{(1)}\sigma_{A_j}$ для всех $j, k = 1, \dots, s$. Но тогда по условиям следствия $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. По определению подгруппы $\mathfrak{B}$ из включения $A_1 \in \mathfrak{B}$ следует, что $\sigma_1 \in G^{(1)}$; существует целое число k такое, что $H\sigma_1 = Hx^k$. Из соотношений (3), (4), выполненных при $L = H$, и коммутативности фактор-группы $G^{(1)}/H$ следует, что для подгруппы $L = H$ справедливы условия (15). С другой стороны, если подгруппа L группы G удовлетворяет соотношениям (15), то (при условии, что $\mathbf{P}(\mu^{(0)} = e_G = 1) \Omega(\mu^{(N)}) \subset L\sigma_1^N$ для всех $N \geq 1$). Из доказательства теоремы вытекает, что существует $N \geq 1$ такое, что $\Omega(\mu^{(N)}) \supset H$, таким образом, $L \supset H$. Итак, в условиях следствия подгруппа H есть минимальная подгруппа среди подгрупп L группы G , удовлетворяющих соотношениям (15).

Из (15) при $L = H$ следует, что для любого слова z вида (1) справедливо включение $\Omega(z) \subset H\sigma_1^N$, где $N = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$. Следовательно, $\sigma_B \in H$ для всех $B \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{N} = \mathfrak{A}$, а образ гомоморфизма φ есть элемент H фактор-группы $G^{(1)}/H$. Условия теоремы 1 в рассматриваемом случае эквивалентны равенствам $H = G^{(1)} = G$. С учетом приведенного выше описания подгруппы H мы получаем утверждение следствия.

Список литературы

1. Горчинский Ю. Н., Круглов И. А., Капитонов В. М., Вопросы теории распределений на конечных группах. *Труды по дискретной математике* (1997) **1**, 85–112.
2. Егоров Б. А., Максимов Ю. И., Об одной последовательности случайных величин, принимающих значения из компактной коммутативной группы. *Теория вероятностей и ее применения* (1968) **13**, №4, 621–630.
3. Chung F. R. K., Diaconis P., Graham R. L., A random walk problem arising in random number generation. *Ann. Probab.* (1987) **15**, 1148–1165.
4. Diaconis P., Graham R. L., An affine walk on the hypercube. *J. Comput. Appl. Math.* (1992) **41**, 215–235.
5. Hildebrand M., Random processes of the form $X_{n+1} = a_n X_n + b_n \pmod{p}$. *Ann. Probab.* (1993) **21**, 710–720.
6. Романовский В. И., *Дискретные цепи Маркова*. Гостехиздат, Москва, 1949.
7. Круглов И. А., О суммировании случайных величин со значениями в конечной группе, связанных в функцию от простой однородной цепи Маркова. *Обзорение прикладной и промышленной математики* (2003) **10**, №2, 354–355.

Статья поступила 15.12.2004.