Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Мамонтов, Д. Г. Мещанинов, Проблема полноты в функциональной системе линейных полиномов с целыми коэффициентами, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 4, 64–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:54:47

Проблема полноты в функциональной системе линейных полиномов с целыми коэффициентами

© 2010 г. А. И. Мамонтов, Д. Г. Мещанинов

В функциональной системе полиномов первой степени с целыми коэффициентами устанавливается критерий полноты в терминах предполных классов, определяется мощность базисов.

1. Введение

Методы дискретной математики находят широкое применение, в частности, в теории функциональных систем, одной из основных областей математической кибернетики [1, 2]. Функциональные системы представляют собой алгебры, элементами которых являются функции, реализуемые управляющими системами, а операции в этих алгебрах соответствуют правилам построения более сложных управляющих систем из простых. Традиционными модельными объектами теории стали функциональные системы $(P_k; C)$, $(P_\omega; C)$ функций конечнозначных и счетнозначной логик с операциями суперпозиции, $(P_{\text{од}}; C, O)$ ограниченно-детерминированных (автоматных) функций с операциями суперпозиции и обратной связи, $(P_{\text{чр}}; C, \Pi_r, \mu)$ частично-рекурсивных (вычислимых) функций с операциями суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации [1–4]. Изучены также функциональные системы не всюду определенных функций k -значной логики [5–10], системы функций, определенных на декартовом произведении нескольких множеств [11–17], системы отображений, у которых различны области значений переменных и функций [1, 2, 18–21], функциональная система отображений регулярных множеств слов в фиксированном конечном алфавите [22], система специальных множеств функций, называемых пучками [23, 24], системы с различными вариантами оператора замыкания [1, 2, 25–30], системы с операциями алгоритмического и программного типа [31–38], функциональные системы графов [39, 40] и другие.

В настоящей работе мы продолжаем изучение функциональных систем полиномов с целыми коэффициентами, начатое В. Ш. Дарсалия [41–46]. Традиционно важнейшими в функциональных системах (и более общих алгебраических системах) являются проблемы полноты и выразимости [47–49].

В конечно-порожденных алгебрах критерий полноты может быть сформулирован в терминах предполных классов (максимальных собственных подалгебр). Обозначим через $P(\mathbb{N})$, $P(\mathbb{Z})$, $P(\mathbb{Q})$ множество всех полиномов с неотрицательными целыми, целыми и рациональными коэффициентами соответственно. Функциональные системы

$(P(\mathbf{N}), C)$, $(P(\mathbf{Z}), C)$ с операцией суперпозиции являются конечно-порожденными, система $(P(\mathbf{Q}), C)$ — бесконечно-порожденной. В связи с этим В. Ш. Дарсалия были найдены все предполные классы в $P(\mathbf{N})$ (их оказалось ровно 4) и сформулирован алгоритм распознавания полноты в $P(\mathbf{N})$; установлено, что множества всех предполных классов в $P(\mathbf{Z})$ и $P(\mathbf{Q})$ континуальны, а проблема полноты в $P(\mathbf{Z})$ алгоритмически неразрешима. Решена также проблема о мощности базиса (полной системы, не содержащей собственных полных подсистем): в $P(\mathbf{N})$ все базисы имеют мощность 3 или 4, в $P(\mathbf{Z})$ для любого натурального числа существует базис мощности n , в $P(\mathbf{Q})$ любой базис является счетно-бесконечным.

В настоящей работе мы решаем аналогичные проблемы для более узкой функциональной системы $(L(\mathbf{Z}), C)$, состоящей из полиномов первой степени с целыми коэффициентами. Интерес к такой системе можно объяснить следующими обстоятельствами.

Во-первых, одной из исторических тенденций развития теории функциональных систем является усложнение множеств определения и значений функций, в частности, увеличение их мощности. Оказалось, что такое увеличение мощности приводит к качественному усложнению многих проблем, связанных с полнотой. Так, в функциональной системе (P_2, C) алгебры логики имеется ровно 5 предполных классов, множество всех замкнутых классов счетно, любой замкнутый класс имеет конечный базис [3, 4, 49–58]. Впервые эти результаты получены Э. Постом в 1921 г. [50, 51]. В 1953 г. С. В. Яблонским были найдены все предполные классы в функциональной системе (P_3, C) трехзначной логики (их оказалось 18) [52, 59, 60] и установлен критерий полноты в P_3 в терминах предполных классов. Следует отметить, что критерий полноты в P_k при $k \geq 3$, не использовавший предполных классов, был известен с 1939 г. Это результат Е. Слупецкого [61], однако он неудобен в применении, особенно с ростом k , так как предполагает наличие подсистемы, порождающей все k^k функций одной переменной (решение одной из задач об относительной полноте, также являющихся типичными в функциональных системах [46]). В дальнейшем было установлено, что множество предполных в P_k классов конечно и проблема полноты в P_k алгоритмически разрешима [3, 48]. Количество предполных классов быстро растет с ростом k , асимптотика установлена в [62], все предполные классы полностью описаны И. Розенбергом [63–67]. Также выяснено, что множество всех замкнутых классов в P_k континуально при $k \geq 3$ и существуют замкнутые классы с бесконечным счетным базисом и классы без базиса [68]. Эти проблемы еще более усложняются в счетнозначной логике, где множество всех предполных классов оказалось гиперконтинуально [69, 70]. В связи с этим функциональные системы $P(\mathbf{Z})$ и $P(\mathbf{N})$ можно рассматривать как замкнутые классы в счетнозначной логике, систему $L(\mathbf{Z})$ — как еще более узкий подкласс. Сужение системы может привести к более простым решениям многих вопросов, связанных с полнотой. Так, в функциональной системе (P_{OD}, C, O) любая критериальная система континуальна [71] и проблема полноты алгоритмически неразрешима [72], однако в ряде случаев при некоторых ограничениях на класс рассматриваемых функций она оказывается разрешимой [73–77].

Во-вторых, полиномы с целыми коэффициентами, в частности, линейные полиномы, могут найти применение во многих математических и технических задачах. Так, к проблеме выразимости в $L(\mathbf{Z})$ сводятся задачи аддитивной теории чисел: проблемы Гольдбаха, Варинга, Гильберта–Камке. Решения задач о полноте и выразимости в $P(\mathbf{Z})$ и $L(\mathbf{Z})$ могут оказаться полезными при реализации параллельных логических вычислений арифметическими полиномами [78, 79]. Линейные арифметические полиномы реализуют переключательные автоматы: коммутаторы, шифраторы и дешифраторы, мультиплексоры. Известно [78, с. 83, теорема 5], что для представления системы булевых функций достаточно трех линейных арифметических функций. Для экономной реализации требуется

подобрать базис в некотором замкнутом классе $L(\mathbf{Z})$. Линейные функции с целыми коэффициентами могут найти применение при сжатии изображений [80]. Статические растровые изображения можно представить линейной функцией, целые коэффициенты которой несут информацию о состоянии пикселей, процесс его сжатия сводится к экономному представлению его функции в некотором базисе. Кроме того, линейные целочисленные полиномы применяются в математическом программировании как целевые функции и функции ограничений, в нейронных сетях как пороговые функции возбуждения нейрона, в распознавании образов и задачах кластеризации как разделяющие функции (при этом малое число параметров — коэффициентов линейной функции позволяет, варьируя их значения, легко добиваться требуемого качества распознавания в процессе обучения).

В-третьих, результаты о полноте и выразимости в $P(\mathbf{Z})$ и $L(\mathbf{Z})$, о решетке замкнутых классов в этих системах было бы интересно и полезно сопоставить с аналогичными результатами о замкнутых классах в P_k , полученных в последнее время [81–83], выявить аналогии и различия между этими функциональными системами.

Основными объектами нашего рассмотрения являются функции, отображающие $\mathbf{Z}^n$ в $\mathbf{Z}$ и задаваемые полиномами

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad a_i \in \mathbf{Z}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Такой полином полностью определяется вектором коэффициентов $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ и представляет ровно одну функцию $f: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}$, различным векторам коэффициентов соответствуют различные функции; поэтому мы будем отождествлять формулу (1) и представленную ею функцию, чтобы не прибегать к довольно длинному определению формулы [1–4, 88].

Кроме того, мы отождествляем каждую функцию со всеми конгруэнтными и равными ей функциями (получаемыми путем переименования переменных, а также введения и изъятия фиктивных переменных).

Множество всех таких функций мы обозначаем $L(\mathbf{Z})$ и рассматриваем его как подмножество в более обширном множестве $P(\mathbf{Z})$ функций, представимых полиномами

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n \geq 0} a(j_1, \dots, j_n) x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n},$$

где $a(j_1, \dots, j_n) \in \mathbf{Z}$. При этом $L(\mathbf{Z}) \subset P(\mathbf{Z})$ и $L(\mathbf{Z})$ является замкнутым классом в функциональной системе $(P(\mathbf{Z}), C)$ с операциями суперпозиции. Очевидно, что $P(\mathbf{Z})$ и $L(\mathbf{Z})$ являются конечно-порожденными, базисами в них являются системы $\{1, x - y, xy\}$ и $\{1, x - y\}$. Также базис в $L(\mathbf{Z})$ образует система $\{1, -x, x + y\}$.

В разделах 2–4 мы вводим некоторые семейства замкнутых классов в $L(\mathbf{Z})$. В разделе 5 мы доказываем критерий полноты в $L(\mathbf{Z})$ и устанавливаем мощность базисов. Несмотря на сужение системы $P(\mathbf{Z})$ до $L(\mathbf{Z})$ множество предполных классов остается бесконечным (но счетным в отличие от случая системы $P(\mathbf{Z})$). Основные результаты работы анонсированы ранее в [84–87].

Мы применяем в работе следующие обозначения: $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор длины n , (a, b) — наибольший общий делитель натуральных чисел a и b (из контекста будет ясно, означает ли (a, b) наибольший общий делитель или вектор длины 2), $[a_1, \dots, a_k]$ — наименьшее общее кратное натуральных чисел $a_1, \dots, a_k$, $a \mid b \iff b \equiv 0 \pmod{a}$, $[F]$ — замыкание относительно суперпозиции системы функций F . Буквами p, q (возможно с индексами) обозначаем простые числа.

Все отсутствующие определения можно найти в [1–4, 41, 52, 88].

2. Классы L^+ , $S(p)$, $U(a, m)$

Пусть L^+ — подкласс всех таких функций из $L(\mathbf{Z})$, у которых все коэффициенты при переменных неотрицательны. Ясно, что класс L^+ замкнут и система $\{1, -1, x + y\}$ является его базисом.

Предложение 1. *Класс L^+ является предполным в $L(\mathbf{Z})$.*

Доказательство. Пусть функция f вида (1) принадлежит $L(\mathbf{Z}) \setminus L^+$. Тогда при некотором i , $1 \leq i \leq n$, справедливо неравенство $a_i < 0$. Полагая $x_i = x$ и $x_j = 0$ при всех $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$, построим из f функцию

$$g(x) = a_0 + a_i x.$$

Далее с помощью функции

$$h(x, y) = -a_0 + x - (a_i + 1)y$$

построим суперпозицию

$$h(g(x), x) = -x.$$

Так как $0, x, h(x, y) \in L^+$, то $-x \in [L^+ \cup \{f\}]$. Получена полная в $L(\mathbf{Z})$ система $\{1, x + y, -x\}$. Предложение доказано.

Замечание 1. Класс всех функций из $L(\mathbf{Z})$, у которых все коэффициенты при переменных неположительны, не является замкнутым.

Для функции f вида (1) рассмотрим сумму коэффициентов

$$SC(f) = a_1 + \dots + a_n.$$

Для каждого p определим $S(p)$ как класс функций, удовлетворяющих условию

$$SC(f) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Легко проверить, что эти классы замкнуты.

Предложение 2. *Каждый класс $S(p)$ является предполным в $L(\mathbf{Z})$.*

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}) \in L(\mathbf{Z}) \setminus S(p)$. Отождествив все переменные (если их более одной) функции f , получим функцию $Ax + B$, где $A \not\equiv 1 \pmod{p}$. Из последней функции с помощью функций $x + py$, $x - py$ класса $S(p)$ получим функцию

$$\alpha(x) = Cx + D, \quad C \in \{2, 3, \dots, p\}, \quad C \equiv A \pmod{p}.$$

Далее, используя функцию

$$g(x, y, z) = x + y - z$$

из $S(p)$, строим функции

$$g(x, \alpha(y), y) = x + (C - 1)y + D,$$

$$g(x, y, \alpha(y)) = x - (C - 1)y - D.$$

Применяя функции $1 + x$ и $-1 + x$ класса $S(p)$, можем построить функции

$$\varphi_1(x, y) = x + (C - 1)y,$$

$$\varphi_2(x, y) = x - (C - 1)y.$$

При этом $(C - 1, p) = 1$. Пусть целые M, N таковы, что

$$(C - 1)M + Np = 1.$$

Тогда из φ_1, φ_2 получим функцию $x + (C - 1)My$, а из последней функции, применяя $x + py, x - py$, строим функции

$$x + (C - 1)My + Npy = x + y,$$

$$g(x, z, y + z) = x - y,$$

$$x - x = 0.$$

Подставляя 0 в функцию $1 + x$ класса $S(p)$, получим 1.

Построен базис $\{1, x - y\}$ в $L(\mathbf{Z})$, то есть

$$L(\mathbf{Z}) = [S(p) \cup \{f\}].$$

Предложение доказано.

Для каждого $m \in \mathbf{N}$ и $a = 0, 1, \dots, m - 1$ обозначим через $U(a, m)$ класс всех функций, сохраняющих множество

$$\mathbf{Z}(a, m) = \{c \in \mathbf{Z} : c \equiv a \pmod{m}\}.$$

Классы $U(a, m)$ замкнуты как классы сохранения множеств, $U(0, 1) = L(\mathbf{Z})$ и $x + y - z \in U(a, m)$ при всех m и a .

Предложение 3. Для всех простых p и $a = 0, 1, \dots, p - 1$ классы $U(a, p)$ являются предполными в $L(\mathbf{Z})$.

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}) \notin U(a, p)$. Тогда для некоторых $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}(a, p)$ справедливо соотношение $f(\tilde{a}) = b \not\equiv a \pmod{p}$. С помощью функций $a, x + p, x - p, f$ построим константы $a_1, \dots, a_n, b$ и наименьший неотрицательный вычет c числа b по модулю p . образуем также функции $x + c - a$ и $x + a - c$. Далее, пусть целые M, N таковы, что $pM + (c - a)N = -1$. Тогда за $|M|$ итераций функции $x + p$ или $x - p$ получим $x + pM$, аналогично построим $x + (c - a)N$. Далее получаем

$$(x + pM) + (c - a)N = x - 1.$$

Если требуется, из a с помощью $x - 1$ получим константы 1 и 0. Наконец,

$$x + 0 - y = x - y.$$

Нами построен базис в $L(\mathbf{Z})$, поэтому

$$[U(a, p) \cup \{f\}] = L(\mathbf{Z}).$$

Предложение доказано.

3. Классы $C(m)$

Пусть $p_1, \dots, p_s$ — различные простые числа, $m = p_1 \dots p_s$. Определим $C(m)$ как класс, содержащий все функции каждого из двух типов:

- (1) все коэффициенты при переменных функции кратны некоторому делителю p_i числа m ;
- (2) все коэффициенты при переменных функции кроме, возможно, одного, кратны m .

Нетрудно проверить, что классы $C(m)$ замкнуты и все константы и функции одной переменной принадлежат $C(m)$.

Теорема 1. *Классы $C(m)$ являются предполными в $L(\mathbf{Z})$.*

Доказательство. Пусть функция f вида (1) не принадлежит $C(m)$. Тогда $n \geq 2$ и существует k , $k \geq 2$, коэффициентов при переменных, каждый из которых не кратен m . Заменяя переменные, коэффициенты при которых кратны m , константой 0, применяя функцию $-a_0 + x$ класса $C(m)$ и переименовывая при необходимости коэффициенты и остальные переменные, получим функцию

$$h(x_1, \dots, x_k) = b_1 x_1 + \dots + b_k x_k,$$

где $b_i \not\equiv 0 \pmod{m}$ при $i = 1, \dots, k$ и все коэффициенты $b_1, \dots, b_k$ не имеют одновременно общего делителя с числом m . Далее рассмотрим два случая.

Случай I: $k = 2$. В этом случае

$$h(x_1, x_2) = b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad (b_1, m) = d_1, \quad (b_2, m) = d_2, \quad (d_1, d_2) = 1.$$

Рассмотрим функцию

$$h_1(x, y, z) = h(x, y) + mz.$$

Для целых k_1, k_2 таких, что $b_1 k_1 + m k_2 = d_1$, получим функцию

$$h_2(x, y, z) = h_1(k_1 x, y, k_2 x) + mz = d_1 x + b_2 y + mz.$$

Для целых l_1, l_2 таких, что $b_2 l_1 + m l_2 = d_2$, получим функцию

$$H(x, y) = h_2(x, l_1 y, l_2 y) = d_1 x + d_2 y.$$

Будем считать, что существует делитель p_i числа m такой, что $p_i \mid d_1$, в противном случае рассмотрим вместо $H(x, y)$ функцию $H(p_i x, y)$. С помощью функции $d_1 x + d_1 y$ класса $C(m)$ построим функцию

$$H_1(x, y, z) = H(d_1 x + d_1 y, z) = d_1^2 x + d_1^2 y + d_2 z.$$

Для целых m_1, m_2 таких, что $m_1 d_1^2 + m_2 d_2 = 1$, построим функцию

$$\varphi_1(x, y) = H_1(x, m_1 y, m_2 y) = d_1^2 x + y.$$

Аналогично построим функцию

$$\varphi_2(y, z) = d_2^2 y + z.$$

Далее строим

$$\psi(x, y, z) = \varphi_1(x, \varphi_2(y, z)) = d_1^2 x + d_2^2 y + z.$$

Для целых n_1, n_2 таких, что $d_1^2 n_1 + d_2^2 n_2 = 1$, получаем, что

$$\psi(n_1 x, n_2 x, y) = (d_1^2 n_1 + d_2^2 n_2)x + y = x + y.$$

Случай II: $k \geq 3$. В этом случае

$$h(x_1, \dots, x_k) = b_1x_1 + \dots + b_kx_k.$$

Пусть $\delta_1 = (b_1, b_2)$. Для целых r_1, r_2 таких, что $b_1r_1 + b_2r_2 = \delta_1$, получим функцию

$$g_1(x_2, \dots, x_k) = h(r_1x_2, r_2x_2, x_3, \dots, x_k) = \delta_1x_2 + b_3x_3 + \dots + b_kx_k.$$

Пусть $(\delta_1, b_3) = \delta_2$. Для целых s_1, s_2 таких, что $\delta_1s_1 + b_3s_2 = \delta_2$, получим функцию

$$g_2(x_3, \dots, x_k) = g_1(s_1x_3, s_2x_3, x_4, \dots, x_k) = \delta_2x_3 + b_4x_4 + \dots + b_kx_k.$$

После $k - 2$ шагов получим функцию

$$g_{k-2}(x, y) = \delta_{k-2}x + b_ky,$$

при этом $(\delta_{k-2}, b_k) = 1$. С ней поступаем далее так же, как с функцией $H(x, y)$ в случае I.

В обоих случаях полная в $L(\mathbf{Z})$ система $\{-x, 1, x + y\}$ содержится в $[C(m) \cup \{f\}]$. Теорема доказана.

4. Класс D

Обозначим через D класс, содержащий следующие функции:

- (1) все константы и функции одной переменной;
- (2) все функции, у которых каждый коэффициент при переменной кратен некоторому натуральному числу $k, k \geq 2$.

Нетрудно проверить, что класс D является замкнутым.

Теорема 2. *Класс D является предполным в $L(\mathbf{Z})$.*

Доказательство. Предположим, что функция f вида (1) принадлежит $L(\mathbf{Z}) \setminus D$. Покажем, что $x + y \in [D \cup \{f\}]$.

Заметим, что среди $a_1, \dots, a_n$ найдутся $k, k \geq 2$, коэффициентов с наибольшим общим делителем 1. Без ограничения общности считаем, что это $a_1, \dots, a_k$. Далее рассмотрим два случая.

Случай I: $k = 2$. Заменяем переменные $x_3, \dots, x_n$ (если они есть) константой 0, переименуем x_1 и x_2 в x и y , избавимся от свободного члена с помощью одноместных функций. Получим функцию $H(x, y) = a_1x + a_2y$, $(a_1, a_2) = 1$. Если $a_1 = a_2 = 1$, то $H(x, y) = x + y$; в противном случае считаем, что $a_1 \neq 1$ и $a_2 \neq 1$, иначе этого добьемся заменой соответствующей переменной (например, x) функцией mx для подходящего m . Построим функцию

$$H_1(x, y, z) = H(a_1x + a_1y, z) = a_1^2x + a_1^2y + a_2z$$

и повторим далее выкладки, приведенные в доказательстве теоремы 1 в случае I.

Случай II: $k \geq 3$. Этот случай рассматривается так же, как в доказательстве теоремы 1.

В обоих случаях полная в $L(\mathbf{Z})$ система $\{1, -x, x + y\}$ содержится в $[D \cup \{f\}]$. Теорема доказана.

5. Критерий полноты. Мощность базисов

В данном параграфе мы будем употреблять сокращенную запись вектора переменных функции $f(\tilde{x}, \dots, y, \dots)$. Это означает, что имена переменных, замененных многоточием, для нас не важны, они могут быть любыми, но отличными от явно указанных переменных $\tilde{x}, y$.

Мы также будем рассматривать функции, имеющие в своих представлениях, аналогичных (1), группы слагаемых определенного вида, в этих случаях мы будем говорить, что функция содержит линейную форму указываемого далее вида.

Лемма 1. Пусть функция f имеет при переменных не менее двух коэффициентов, взаимно простых с фиксированным числом $m \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ функция f порождает функции $F_{m,1}^{(n)}(\tilde{x}, \dots)$, содержащие линейные формы вида

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i \equiv 1 \pmod{m}, \quad a_i > 0. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть взаимно простыми с m являются коэффициенты b_1, b_2 при переменных x_1, x_2 функции $f(\tilde{x}^k)$. Образует функции

$$\begin{aligned} f_2(\tilde{x}^k, \tilde{y}^{k-1}) &= f(f(\tilde{x}^k), \tilde{y}^{k-1}), \\ f_3(\tilde{x}^k, \tilde{y}^{k-1}, \tilde{z}^{k-1}) &= f(f_2(\tilde{x}^k, \tilde{y}^{k-1}), \tilde{z}^{k-1}), \\ &\dots \\ f_r(\tilde{x}^k, \tilde{y}^{k-1}, \tilde{z}^{k-1}, \dots, \tilde{u}^{k-1}) &= f(f_{r-1}(\tilde{x}^k, \tilde{y}^{k-1}, \dots), \tilde{u}^{k-1}), \end{aligned}$$

где $r = \varphi(m)$ — значение функции Эйлера. Функция f_r имеет при переменной x_1 коэффициент $b_1^r \equiv 1 \pmod{m}$, при переменной u_1 — коэффициент b_2 . Тогда

$$F_{m,1}^{(1)}(x_1, x_2, \dots, u_1, \dots) = f_r(f_r(x_1, x_0, x_0, \dots, x_0), x_2, \dots, u_1, \dots).$$

Здесь x_0 — символ переменной, отличный от всех использованных ранее. Осуществим перестановку (то есть, взаимное переименование) переменных x_2 и u_1 этой функции и, произведя $r+1$ аналогичных итераций по переменной x_2 (то есть, аналогичных подстановок формулы вместо переменной x_2), в результате получим функцию $F_{m,1,1}^{(2)}(x_1, x_2, \dots)$. Далее для $n = 2, 3, \dots$ последовательно строим

$$F_{m,1,1}^{(n+1)}(\tilde{x}^{n+1}, \dots) = F_{m,1}^{(n)}(\tilde{x}^{n-1}, F_{m,1,1}^{(2)}(x_n, x_{n+1}, \dots), \dots).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $s \geq 1$, числа $p_1, \dots, p_s$ различны, $\alpha_i \geq 1$, $m_i = p_i^{\alpha_i}$ для $i = 1, \dots, s$, $m = m_1 \dots m_s$ и система функций G не содержится ни в одном из классов $C(p_{i_1} \dots p_{i_r})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq s$. Тогда система G порождает функцию, содержащую линейную форму $\sum_{i=1}^s a_i x_i$, коэффициенты которой удовлетворяют условию

$$a_i \equiv 1 \pmod{m_i}, \quad a_i \equiv 0 \pmod{m/m_i}, \quad a_i > 0. \quad (3)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по параметру s .

Базис индукции — случай $s = 1$, $m = m_1$. Рассмотрим $f(\tilde{y}) \in G \setminus C(p_1)$. Она имеет при переменных не менее двух коэффициентов, взаимно простых с m . Применяя лемму 1,

построим из f функцию $F_{m,1}^{(1)}(x_1, \dots)$. При $s = 1$ условия (2) и (3) равносильны, поэтому базис индукции обоснован.

Осуществим индуктивный переход. Пусть $s_0 \geq 2$ и для всех $s < s_0$ утверждение леммы верно. Рассмотрим значение $s = s_0$ и функцию $f(\tilde{y}^n) \in G \setminus C(p_1 \dots p_s)$. Тогда $n \geq 2$ и возможны следующие случаи, не являющиеся взаимоисключающими.

Случай I. Функция f имеет при переменных не менее двух коэффициентов, взаимно простых с m . Тогда из f можно в силу леммы 1 построить функции $F_{m,\tilde{1}}^{(n)}(\tilde{x}, \dots)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Возьмем значение n , равное сумме коэффициентов $a_1, \dots, a_s$ требуемой линейной формы. Тогда искомая функция получается отождествлением s групп по $a_1, \dots, a_s$ переменных функции $F_{m,\tilde{1}}^{(n)}(\tilde{x}, \dots)$.

Случай II. Функция f содержит линейную форму

$$\sum_{i=1}^N c_i y_i \notin C(p_1 \dots p_s), \quad (4)$$

где $2 \leq N \leq n$ и каждый коэффициент c_i кратен какому-либо из чисел $p_1, \dots, p_s$ (этот случай реализуется, в частности, если функция f не имеет при переменных коэффициентов, взаимно простых с m). Допустим, что коэффициент c_i обладает следующим свойством:

$$(c_i, p_{i_1} \dots p_{i_k}) = 1, \quad c_i \equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i \in \{1, \dots, s\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}, \quad 1 \leq k < s.$$

Рассмотрим функцию $b_{i_1}^i x_{i_1}^i + \dots + b_{i_k}^i x_{i_k}^i + \dots$ с коэффициентами b_j^i , $j = i_1, \dots, i_k$, удовлетворяющими условию

$$b_j^i \equiv 1 \pmod{p_j}, \quad b_j^i \equiv 0 \pmod{p_l}, \quad l \in \{i_1, \dots, i_k\} \setminus \{j\}.$$

Такую функцию можно построить в силу индуктивного предположения. Подставим ее вместо переменной y_i в функцию f . В получаемой функции коэффициенты $b_j^i c_i$ при x_j^i , $j = i_1, \dots, i_k$, обладают следующим свойством:

$$(b_j^i c_i, p_j) = 1, \quad b_j^i \equiv 0 \pmod{p_l}, \quad l \in \{1, \dots, s\} \setminus \{j\}.$$

Так поступим с каждой переменной y_i линейной формы $\sum_{i=1}^N c_i y_i$, коэффициент при которой не кратен какому-то из чисел $p_1, \dots, p_s$.

Из (4) следует, что для каждого $i = 1, \dots, s$ найдется $I \in \{1, \dots, N\}$ такое, что $(c_I, p_i) = 1$. Полагая $x_i = x_i^I$, $e_i = b_i^I c_I$, приходим к функции, содержащей линейную форму $\sum_{i=1}^s e_i x_i$ с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$(e_i, p_i) = 1, \quad p_j \mid e_i \quad \text{при} \quad j \in \{1, \dots, s\} \setminus \{i\}.$$

Далее осуществим n_1 итераций этой функции по переменной x_1 , затем n_2 итераций результата по переменной x_2 и так далее. Итерации аналогичны описанным при доказательстве леммы 1. На каждой итерации по переменной x_i вводится необходимое количество новых переменных, чтобы не нарушить свойства коэффициентов при x_j для $j \in \{1, \dots, s\} \setminus \{i\}$.

Наконец, после n_s итераций по переменной x_s получим требуемую функцию. При этом

$$n_i \leq 2\varphi(m_i) \max_{j \neq i} \alpha_j, \quad i = 1, \dots, s.$$

Случай III. Функция $f(\tilde{y}) = c_0 + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ имеет при переменных ровно один взаимно простой с m коэффициент.

Допустим, не ограничивая общности, что $(c_1, m) = 1$ и $(c_2, p_i) = 1$ для некоторого $i \in \{1, \dots, s\}$. Далее рассмотрим еще две возможности и сведем случай к одному из предыдущих.

Случай III (а). В этом случае $s \geq 3$. Тогда образуем функцию

$$b_1 z_1 + \dots + b_{i-1} z_{i-1} + b_{i+1} z_{i+1} + \dots + b_s z_s + \dots$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$b_j \equiv 1 \pmod{p_j}, \quad p_l \mid b_j \quad \text{при} \quad j \in \{1, \dots, s\} \setminus \{i\}, \quad l \in \{1, \dots, s\} \setminus \{i, j\}.$$

Она может быть построена согласно индуктивному предположению. Подставим ее на место переменной y_1 в функцию f . Ситуация свелась к случаю II.

Случай III (б). В этом случае $s = 2$. Допустим, без ограничения общности, что $p_i = p_1$. По условию, $G \not\subseteq C(p_2)$, поэтому существует функция $h \in G \setminus C(p_2)$. В силу леммы 1, из h можно построить функцию

$$F_{p_2, 1, 1}^{(2)}(x_1, x_2, \dots) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots$$

Образуем суперпозицию

$$f(F_{p_2, 1, 1}^{(2)}(x, y, z, \dots, z), u_2, \dots, u_n) = c_1(\beta_1 x + \beta_2 y) + c_2 u_2 + \dots$$

Если $(\beta_1, m) = (\beta_2, m) = 1$, то получим случай I. Если, например, $(\beta_1, m) > 1$, то в силу наличия линейной формы $c_1 \beta_1 x + c_2 u_2$, где $p_2 \mid c_2$, приходим к случаю II. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для всех $k = 1, 2, \dots, t$ система G порождает функции $G_{m, k}^{(1)}(x_1, \dots)$ и $G_{m, k}^{(2)}(x_1, x_2, \dots)$, содержащие линейные формы $c_1 x_1$ и $c_1 x_1 + c_2 x_2$ соответственно, коэффициенты которых удовлетворяют условиям $c_1 \equiv c_2 \equiv k \pmod{m}$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Доказательство. При $s = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ функция $F_{m, 1}^{(n)}(\tilde{y}, \dots)$ принадлежит $[G]$ и согласно лемме 1 функция $G_{m, k}^{(1)}$ получается из $F_{m, 1}^{(n)}(\tilde{y}, \dots)$ при $n = k$, если положить $x_1 = y_1 = \dots = y_k$. Функция $G_{m, k}^{(2)}(x_1, x_2, \dots)$ получается из $F_{m, 1}^{(n)}(\tilde{y}, \dots)$ при $n = 2k$ и $x_1 = y_1 = \dots = y_k$, $x_2 = y_{k+1} = \dots = y_{2k}$.

Пусть $s \geq 2$. Рассмотрим функцию f из $[G]$, содержащую линейную форму $\sum_{i=1}^s a_i x_i$ с условием (3). Пусть $b_i \equiv b_1^i \equiv b_2^i \equiv k \pmod{m_i}$, $b_i > 0$, $b_1^i > 0$, $b_2^i > 0$ при $i = 1, \dots, s$. Как показано выше, можно построить функции $b_i x_i + \dots$ и $b_1^i x_1^i + b_2^i x_2^i + \dots$. Рассмотрим функцию $f(b_1 x_1 + \dots, \dots, b_s x_s + \dots, \dots)$. При переменных x_i она содержит коэффициенты $c_i = a_i b_i$, для которых выполняется условие $c_i \equiv k \pmod{m_i}$, $c_i \equiv 0 \pmod{m/m_i}$. Отождествив переменные $x_1, \dots, x_s$, получим $G_{m, k}^{(1)}(x_1, \dots)$. Функция $G_{m, k}^{(2)}(x_1, x_2, \dots)$ получается из суперпозиции $f(b_1^1 x_1^1 + b_2^1 x_2^1 + \dots, \dots, b_1^s x_1^s + b_2^s x_2^s + \dots, \dots)$ отождествлением переменных, отличающихся лишь верхними индексами. Лемма доказана.

Лемма 4. Если $f \notin D$, то из функции $G_{m,k}^{(1)}$, определенной в лемме 3, и функции f можно получить функцию, содержащую линейную форму $e_1x_1 + e_2x_2$ с положительными взаимно простыми коэффициентами e_1, e_2 .

Доказательство. Пусть

$$f(\tilde{y}) = a_0 + a_1y_1 + \dots + a_ny_n \notin D$$

тогда $n \geq 2$ и коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ взаимно просты. Для $i = 1, \dots, n-1$ последовательно построим функции

$$f_i(y_i, y_{i+1}, \dots, y_n, \dots) = \gamma_i y_i + a_{i+1}y_{i+1} + \dots + a_ny_n + \dots$$

с взаимно простыми коэффициентами $\gamma_i, a_{i+1}, \dots, a_n$.

При $n = 2$ положим $\gamma_1 = a_1$ и $f_1 = f$.

При $n \geq 3$ построим функцию f_2 . Пусть

$$(a_1, a_2) = \delta, \quad E = [a_3, \dots, a_n], \quad m = E\delta,$$

и целые r_1, r_2 таковы, что $a_1r_1 + a_2r_2 = \delta$. Тогда

$$f_2(y_2, \dots, y_n, \dots) = f(G_{m,r_1}^{(1)}(y_2, \dots), G_{m,r_2}^{(1)}(y_2, \dots), y_3, \dots, y_n).$$

При этом для некоторых целых t_1, t_2 и $t = a_1t_1 + a_2t_2$

$$\gamma_2 = a_1(mt_1 + r_1) + a_2(mt_2 + r_2) = mt + \delta = \delta(Et + 1).$$

Функция f_2 не принадлежит классу D , так как $\delta, a_3, \dots, a_n$ взаимно просты и

$$(Et + 1, a_j) = 1, \quad j = 3, \dots, n.$$

Аналогично, при $n \geq 4$ строим функцию f_3 , и так далее. На последнем шаге получим функцию

$$f_{n-1}(y_{n-1}, y_n, \dots) = \gamma_{n-1}y_{n-1} + a_ny_n + \dots, (\gamma_{n-1}, a_n) = 1.$$

Пусть

$$H(x_1, x_2, z) = f_{n-1}(x_1, x_2, z, z, \dots, z).$$

Тогда $H(H(x_1, z, z), H(z, x_2, z), z)$ имеет при переменных x_1 и x_2 взаимно простые коэффициенты $e_1 = \gamma_{n-1}^2, e_2 = a_n^2$.

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $1 < N < M$, $(M, N) = 1$. Тогда функция

$$v(x, \tilde{y}^N, z) = Nx - \sum_{j=1}^N My_j + P_1z + P_0$$

порождает функцию $x + Ky + L_1z + L_0$ такую, что $K < 0$.

Доказательство. Пусть $d = \varphi(M)$ — значение функции Эйлера. Для $i = 1, \dots, d$ построим функции

$$f_i(x, y, z) = a_ix + b_iy + c_iz + d_i$$

такие, что

$$a_i \equiv N^i \pmod{M}, \quad 0 < a_i < M, \quad b_i < 0.$$

Положим

$$f_1(x, y, z) = v(x, y, z, z, \dots, z).$$

Если построена функция f_i , $1 \leq i < d$, то образуем функцию

$$\begin{aligned} w(\tilde{x}^{N+1}, y, z) &= v(h_i(x_1, y, z), x_2, \dots, x_{N+1}, z) \\ &= Na_i x_1 - Mx_2 - \dots - Mx_{N+1} + Nb_i y + Pz + Q. \end{aligned}$$

Ясно, что $Nb_i < 0$. Далее, поскольку $0 < Na_i < MN$, существует R , $0 \leq R < N$, такое, что

$$a_{i+1} = Na_i - RM.$$

Тогда функция $f_{i+1}(x, y, z)$ получается из $w(\tilde{x}^{N+1}, y, z)$ в результате отождествления $x_1 = \dots = x_{R+1} = x$, $x_{R+2} = \dots = x_{N+1} = z$. После d шагов получаем искомую функцию $f_d(x, y, z)$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $(N, A) = (N, C) = 1$, $0 < N \leq A$, $C > 0$,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= Nx + Ay + B_1 z + B_0, \\ g(x, y) &= -Cx + D_1 y + D_0. \end{aligned}$$

Тогда функции f , g и $G_{N,1}^{(2)}$ (последняя определена в условии леммы 3) порождают функцию $x + Ky + L_1 z + L_0$ такую, что $K < 0$.

Доказательство. Если $N = 1$, то искомой функцией является $f(x, g(y, z), z)$. Пусть $N \geq 2$. Считаем, что функция $G_{N,1}^{(2)}$ зависит от трех или большего числа переменных, в противном случае введем фиктивные переменные. Построим функцию

$$u_1(x, y, z) = G_{N,1}^{(2)}(G_{N,1}^{(2)}(z, x, z, \dots, z), G_{N,1}^{(2)}(y, z, \dots, z), z, \dots, z).$$

При переменных x и y она имеет одинаковые коэффициенты Q , $Q > 0$, $(Q, N) = 1$. Пусть $2^r > N$. Для $m = 2, \dots, r$ последовательно образуем функции

$$\begin{aligned} u_m(\tilde{x}^{2^m}, z) &= u_1(u_{m-1}(\tilde{x}^{2^{m-1}}, z), u_{m-1}(x_{2^{m-1}+1}, \dots, x_{2^m}, z), z) \\ &= \sum_{j=1}^{2^m} Q^m x_j + R_1 z + R_0. \end{aligned}$$

Далее, построим функцию

$$\begin{aligned} v(x, \tilde{y}^N, z) &= f(x, g(u_r(\tilde{y}^N, z, \dots, z), z), z) \\ &= Nx - \sum_{j=1}^N ACQ^r y_j + P_1 z + P_0. \end{aligned}$$

Введем обозначение $M = ACQ^r$ и с помощью леммы 5 получим искомую функцию. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть система G содержит функцию

$$h(x, y, z) = x + y - z$$

и функции f_p , не принадлежащие $S(p)$ для каждого p . Тогда система G порождает константу.

Доказательство. Построим функции

$$g_i(x) = (a_i + 1)x + b_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

такие, что $|a_1| > a_2 > \dots > a_{k-1} > a_k = 1$. Положим

$$g_1(x) = f_2(x, \dots, x),$$

при этом $a_1 \neq 0$. Пусть построена функция $g_i(x)$, $|a_i| \neq 1$, и q — это $(i + 1)$ -е простое число в естественной нумерации ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, и т. д.). Рассмотрим функцию

$$w_q(x) = f_q(x, \dots, x) = (c + 1)x + d.$$

Тогда $(|c|, q) = 1$. Положим

$$a_{i+1} = (|a_i|, |c|),$$

при этом

$$a_{i+1} = Ma_i + Nc$$

для некоторых целых M и N . С помощью функции $h(x, y, z)$ построим функции

$$u(x, y_1, y_2, z_1, z_2) = x + My_1 - My_2 + Nz_1 - Nz_2,$$

$$g_{i+1}(x) = u(x, g_i(x), x, w_q(x), x).$$

После k шагов получена функция g_k такая, что $|a_k| = 1$. Если $a_k = -1$ (это значение возможно только при $k = 1$), то получена константа b_1 . В остальных случаях

$$h(x, x, 2x + b_k) = -b_k.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть система G содержит константу c , функцию

$$h(x, y, z) = x + y - z,$$

а также функции $v_{a,p}$, не принадлежащие классам $U(a, p)$ для каждого простого p и всех $a = 0, 1, \dots, p - 1$. Тогда G — полная в $L(\mathbf{Z})$ система.

Доказательство. Построим последовательно функции

$$g_i^+(x) = x + a_i, \quad g_i^-(x) = x - a_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

такие, что $a_1 > a_2 > \dots > a_{k-1} > a_k = 1$.

Пусть $i = 1$, $p > |c|$, c_1 — наименьший неотрицательный вычет числа c по модулю p . Тогда получаем отличную от c константу $b = v_{c_1, p}(c, \dots, c)$, а также функции

$$\begin{aligned}x + b - c &= h(x, b, c), \\x + c - b &= h(x, c, b),\end{aligned}$$

то есть g_1^+ и g_1^- при $a_1 = |b - c|$.

Пусть построены функции g_i^+ , g_i^- , $a_i > 1$, $q \mid a_i$, a — наименьший неотрицательный вычет числа c по модулю q . Тогда получаем константу $d = v_{a, q}(c, \dots, c)$, причем $d \not\equiv a \pmod{q}$, следовательно, $d \not\equiv c \pmod{a_i}$. Далее строим функции

$$\begin{aligned}x + c - d &= h(x, c, d), \\x + d - c &= h(x, d, c),\end{aligned}$$

из которых при помощи функций g_i^+ , g_i^- получим g_{i+1}^+ , g_{i+1}^- .

После k шагов получены функции

$$g_k^+(x) = x + 1, \quad g_k^-(x) = x - 1.$$

С их помощью из константы c получим 0. Таким образом, построена система $\{0, x + 1, x + y - z\}$, которая, как нетрудно проверить, есть базис в $L(\mathbf{Z})$. Лемма доказана.

Теорема 3 (критерий полноты). Система G функций из $L(\mathbf{Z})$ полна в $L(\mathbf{Z})$ тогда и только тогда, когда при любых различных простых числах $p_1, p_2, \dots, p_n$, $n = 1, 2, \dots$, любом простом p и всех $a \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$ она не содержится ни в одном из классов L^+ , D , $S(p)$, $C(p_1 \dots p_n)$, $U(a, p)$.

Доказательство. Необходимость очевидна в силу того, что каждый из этих классов замкнут и отличен от $L(\mathbf{Z})$.

Докажем достаточность. С использованием леммы 3, для любого $m \geq 2$ при всех $k = 1, \dots, m$ построим функции $G_{m, k}^{(1)}(x_1, \dots)$ и $G_{m, k}^{(2)}(x_1, x_2, \dots)$. Так как $G \not\subseteq D$, система G содержит функцию, не принадлежащую классу D . Поэтому с помощью леммы 4 получим функцию, содержащую линейную форму $Ax + By$ с положительными взаимно простыми коэффициентами A , B . Далее из этой функции строим

$$f(x, y, z) = Nx + Ay + B_1z + B_0.$$

Допустим, не ограничивая общности, что $N \leq A$. Поскольку $G \not\subseteq L^+$, система G содержит функцию $g'(x, \dots) = -Qx + \dots$, где $Q > 0$. Из этой функции строим $g_0(x, y) = -Qx + \dots$. Рассмотрим $l > 1$, $C = A(A + B)^l Q - B$ такие, что $C > 0$. Для $i = 1, \dots, l$ образуем функции

$$g_i(x, y) = g_{i-1}(f(x, x, y), y)$$

и положим

$$g(x, y) = f(g_l(x, y), x, y) = -Cx + D_1y + D_0.$$

С помощью леммы 6 получим функцию

$$h_1(x, y, z) = x + Ky + L_1z + L_0$$

с отрицательным коэффициентом K . С помощью $h_1(x, y, z)$ из функции

$$G_{-K,1}^{(2)}(x_1, x_2, \dots) = (1 + N_1 K)x_1 + (1 + N_2 K)x_2 + \dots$$

получим

$$t(x, y, z) = x + y + T_1 z + T_0.$$

При $K < -1$ для $j = 1, \dots, -K - 1$ последовательно строим

$$h_{j+1}(x, y, z) = t(h_j(x, y, z), y, z).$$

Далее получим

$$x + y - z = h_{-K}(x, h_{-K}(z, y, z), z)$$

и с помощью лемм 7, 8 строим все функции $L(\mathbf{Z})$. Теорема доказана.

Напомним, что базисом функциональной системы называется полная система, у которой любая собственная подсистема не полна. Шефферовой функцией называется функция f такая, что система $\{f\}$ есть базис.

Теорема 4. Для любого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ в $L(\mathbf{Z})$ существует базис мощности n . Множество базисов мощности n счетно. Бесконечного базиса и универсальной функции в $L(\mathbf{Z})$ не существует.

Доказательство. Система $\{1, x_1 - x_2\}$ — базис мощности 2. Если $k \geq 2$, простые числа $p_1, \dots, p_k$ различны и $A = p_1 \dots p_k$, то система $\{A/p_1, \dots, A/p_k, x_1 - x_2\}$ — базис мощности $k + 1$, причем в силу счетности множества простых чисел множество базисов мощности $k + 1$ не менее чем счетно, в то же время в силу счетности $L(\mathbf{Z})$ множество базисов мощности $k + 1$ не более чем счетно. Бесконечного базиса не существует, так как класс $L(\mathbf{Z})$ является конечно-порожденным. Допустим, что система $\{f\}$ из одной функции — базис в $L(\mathbf{Z})$. Тогда $f \notin S(2)$, поэтому сумма коэффициентов $SC(f)$ четна. С другой стороны, $f \notin U(0, 2)$, $f \notin U(1, 2)$, поэтому число $SC(f)$ нечетно. Полученное противоречие доказывает отсутствие шефферовой функции. Теорема доказана.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., *Функциональные системы*. Изд-во МГУ, Москва, 1982.
2. Кудрявцев В. Б., Относительно функциональных систем. *Пробл. киберн.* (1984) **41**, 5–40.
3. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.
4. Гаврилов Г. П., *Функциональные системы дискретной математики*. Изд-во МГУ, Москва, 1985.
5. Фрейвалд Р. В., Критерий полноты для частичных функций алгебры логики и многозначной логики. *Доклады АН СССР* (1966) **167**, №6, 1249–1250.
6. Фрейвалд Р. В., Функциональная полнота для не всюду определенных функций алгебры логики. *Дискретный анализ* (1966) **8**, 55–68.
7. Ромов Б. А., О максимальных подалгебрах алгебры частичных функций многозначной логики. *Кибернетика* (1980) №1, 28–36.
8. Ло Чжу Кай, Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики. *Киберн. сб.* (1988) **25**, 131–141.

9. Ло Чжу Кай, Теория полноты для частичных функций многозначной логики. *Киберн. сб.* (1988) **25**, 142–161.
10. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., О некоторых замкнутых классах в частичной двужанной логике. *Дискретная математика* (1994) **6**, №4, 58–79.
11. Кудрявцев В. Б., О функциональной системе P_{Σ} . *Доклады АН СССР* (1973) **210**, №3, 521–522.
12. Кудрявцев В. Б., Относительно функциональной системы P_{Σ} . *Ж. вычисл. матем. и матем. физики* (1974) **14**, №1, 198–208.
13. Тайманов В. А., О декартовых степенях P_2 . *Доклады АН СССР* (1983) **270**, №6, 1327–1330.
14. Ромов Б. А., О полноте на квадрате функций алгебры логики и в системе $P_k \times P_l$. *Кибернетика* (1987) №4, 9–14.
15. Ромов Б. А., Об одной серии максимальных подалгебр прямых произведений алгебр конечных значений логик. *Кибернетика* (1989) №3, 11–16.
16. Марченков С. С., О предполных классах Слупецкого в системах $P_k \times \dots \times P_l$. *Дискретная математика* (1992) **4**, №3, 135–148.
17. Марченков С. С., О предполных классах в декартовых произведениях P_2 и P_3 . *Дискретная математика* (1994) **6**, №2, 21–42.
18. Доу Ж., Вопросы полноты для конечно порожденных функциональных систем $\langle P_{k,E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k,E_2}, \hat{\Omega} \rangle$. *Дискретная математика* (1990) **2**, №3, 128–136.
19. Доу Ж., Вопросы полноты для конечно порожденных функциональных систем $\langle P_{k,2}, \tilde{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k,2}, \hat{\Omega} \rangle$. *Дискретная математика* (1990) **2**, №4, 116–124.
20. Арутюнян Л. А., О решетке замкнутых классов неоднородных функций со следом типа C . *Дискретная математика* (1993) **5**, №1, 130–145.
21. Арутюнян Л. А., О мощности следов классов неоднородных функций. *Дискретная математика* (1993) **5**, №3, 35–39.
22. Коляда К. В., О полноте регулярных отображений. *Пробл. киберн.* (1984) **41**, 41–47.
23. Кудрявцев В. Б., О функциональной системе $P_{k,P}$. *Дискретная математика* (1991) **3**, №3, 124–134.
24. Кудрявцев В. Б., О функциональной системе пучков логических функций. *Фундаментальная и прикладная математика* (1999) **5**, №1, 149–192.
25. Бувевич В. А., О τ -полноте в классе автоматных отображений. *Доклады АН СССР* (1980) **252**, №5, 708–712.
26. Бувевич В. А., *Условия A-полноты для конечных автоматов*, 1–2. Изд-во МГУ, Москва, 1986–1987.
27. Голунков Ю. В., Аппроксимационная полнота в алгебрах частично рекурсивных функций и предикатов. *Кибернетика* (1987) №6, 26–30.
28. Марченков С. С., S -классификация функций многозначной логики. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 125–152.
29. Марченков С. С., *S -классификация функций трехзначной логики*. Физматлит, Москва, 2001.
30. Тарасова О. С., Классы k -значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции. *Вестник МГУ, Сер. 1: математика, механика* (2001) №6, 54–57.
31. Голунков Ю. В., К теории систем алгоритмических алгебр. *Доклады АН СССР* (1997) **232**, №4, 749–752.
32. Голунков Ю. В., О полноте операций в системах алгоритмических алгебр. В сб.: *Алгоритмы и автоматы*. Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1978, с. 11–53.

33. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л., *Алгебра. Языки. Программирование*. Наукова думка, Киев, 1978.
34. Лисовик Л. П., Алгебры полилинейных преобразований над размеченными деревьями. *Вычислительные системы* (1988) **124**, 114–143.
35. Голунков Ю. В., Полнота систем операций в операторных алгебрах, реализующих функции k -значной логики. *Вероятностные методы и кибернетика* (1980) **17**, 23–34.
36. Андреева О. В., Голунков Ю. В., Программно-замкнутые классы функций алгебры логики и предикатов. *Кибернетика* (1981) №1, 133.
37. Тайманов В. А., О функциональных системах k -значной логики с операциями программного типа. *Доклады АН СССР* (1983) **268**, №6, 1307–1310.
38. Голунков Ю. В., Полнота по модулю идеала в функциональных системах программного типа. *Дискретная математика* (1990) **2**, №2, 112–120.
39. Иорданский М. А., Функциональный подход к представлению графов. *Доклады РАН* (1997) **353**, №3, 303–305.
40. Иорданский М. А., Структура и способы порождения замкнутых классов графов. *Дискретная математика* (2003) **15**, №3, 105–116.
41. Дарсалия В. Ш., Условия полноты для полиномов с натуральными, целыми и рациональными коэффициентами. *Фундаментальная и прикладная математика* (1996) **2**, №2, 365–374.
42. Дарсалия В. Ш., О мощностях множеств всех предполных классов в функциональных системах полиномов. *Теоретические проблемы информатики и ее приложения* (1997) №1, 35–44.
43. Дарсалия В. Ш., *Проблема полноты для функциональных систем полиномов*, Дисс. канд. физ.-мат. наук, Москва, 1998.
44. Дарсалия В. Ш., Об алгоритмической разрешимости свойства выразимости для полиномов. *Фундаментальная и прикладная математика* (1999) **5**, №3, 931–935.
45. Дарсалия В. Ш., О базисах функциональных систем полиномов. *Фундаментальная и прикладная математика* (2001) **7**, №3, 673–682.
46. Дарсалия В. Ш., Относительная полнота для функциональных систем полиномов. *Фундаментальная и прикладная математика* (2002) **8**, №4, 967–977.
47. Кузнецов А. В., О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем. В сб.: *Труды III Всесоюзного матем. съезда*, **2**. Изд-во АН СССР, 1956, с. 145–146.
48. Кузнецов А. В., Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты. *Успехи матем. наук* (1961) **16**, №2, 201–202.
49. Гаврилов Г. П., *Вопросы выразимости и мощностной характеристики для дискретных функциональных систем с операцией суперпозиции*, Дисс. докт. физ.-мат. наук, Москва, 1997.
50. Post E. L., Introduction to a general theory of elementary propositions. *Amer. J. Math.* (1921) **43**, №3, 163–185.
51. Post E. L., *The two-valued iterative systems of mathematical logic*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
52. Яблонский С. В., Функциональные построения в k -значной логике. *Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР* (1958) **51**, 5–142.
53. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
54. Гаврилов Г. П., Индуктивное представление булевых функций и конечная порождаемость классов Поста. *Алгебра и логика* (1984) **23**, №1, 3–26.
55. Марченков С. С., К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций. *Алгебра и логика* (1984) **23**, №1, 88–99.

56. Угольников А. Б., О замкнутых классах Поста. *Известия вузов. Математика* (1988) №7, 79–88.
57. Марченков С. С., Угольников А. Б., *Замкнутые классы булевых функций*. ИПМ АН СССР, Москва, 1990.
58. Марченков С. С., *Замкнутые классы булевых функций*. Физматлит, Москва, 2000.
59. Яблонский С. В., *Вопросы функциональной полноты в k -значном исчислении*, Дисс. канд. физ.-мат. наук, Москва, 1953.
60. Яблонский С. В., О функциональной полноте в трехзначном исчислении. *Доклады АН СССР* (1954) **92**, №6, 1153–1156.
61. Słupecki J., Kryterium pełności wielowartościowych systemów logiki zdań. *C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III* (1939) **32**, 102–109.
62. Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В., О предполных классах в k -значных логиках. *Доклады АН СССР* (1969) **186**, №3, 509–512.
63. Rosenberg I. G., La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini. *C. R. Acad. Sci. Paris* (1965) **260**, 3817–3819.
64. Rosenberg I. G., Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. *Rozpr. Česk. Akad. Věd, Řada Mat. Přír. Věd* (1970) **80**, №4, 3–39.
65. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А., *Анализ и синтез схем в многозначных логиках*, I. Изд-во МЭИ, Москва, 1989.
66. Марченков С. С., Предполнота замкнутых классов в P_k : предикатный подход. *Матем. вопросы киберн.* (1996) **6**, 117–132.
67. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А., *Предполные классы в многозначных логиках*. Изд-во МЭИ, Москва, 1997.
68. Янов Ю. И., Мучник А. А., О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. *Доклады АН СССР* (1959) **127**, №1, 44–46.
69. Гаврилов Г. П., О функциональной полноте в счетнозначной логике. *Пробл. киберн.* (1965) **15**, 5–64.
70. Перфильева И. Г., Построение гиперконтинуального семейства предполных классов счетнозначной логики. *Пробл. киберн.* (1979) **35**, 29–44.
71. Кудрявцев В. Б., О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. *Доклады АН СССР* (1963) **151**, №3, 493–496.
72. Кратко М. И., Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. *Доклады АН СССР* (1964) **155**, №1, 35–37.
73. Летичевский А. А., Условия полноты для конечных автоматов. *Ж. вычисл. матем. и матем. физики* (1961) №4, 702–710.
74. Часовских А. А., Об алгоритмической разрешимости проблемы полноты для линейных автоматов. *Вестник МГУ, Сер. I: математика, механика* (1985) №3, 82–84.
75. Бабин Д. Н., Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций. *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 41–56.
76. Бабин Д. Н., О разрешимости проблемы полноты для специальных систем автоматов. *Дискретная математика* (1996) **8**, №4, 79–91.
77. Бабин Д. Н., Эффективная проверяемость полноты систем автоматных функций с полной булевой частью. *Дискретная математика* (2003) **15**, №1, 110–130.
78. Малюгин В. Д., *Параллельные логические вычисления посредством арифметических полиномов*. Наука, Москва, 1997.
79. Выхованец В. С., Малюгин В. Д., Мультипликативная алгебра и ее применение в логической обработке данных. *Проблемы управления* (2004) №3, 67–77.

80. Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В., *Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео*. Диалог–МИФИ, Москва, 2002.
81. Крохин А. А., Сафин К. Л., Суханов Е. В., О строении решетки замкнутых классов полиномов. *Дискретная математика* (1997) **9**, №2, 24–39.
82. Мещанинов Д. Г., О первых d -разностях функций k -значной логики. *Матем. вопросы киберн.* (1998) **7**, 265–280.
83. Мещанинов Д. Г., О замкнутых классах k -значных функций, сохраняющих первые d -разности. *Матем. вопросы киберн.* (1999) **8**, 219–230.
84. Мамонтов А. И., Исследование структуры подалгебр в алгебрах полиномов с целыми коэффициентами. В сб.: *Тезисы докладов IX Международной научно-технической конференции «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика»*, **1**. Изд-во МЭИ, Москва, 2003, с. 263–264.
85. Мамонтов А. И., Критерий полноты в алгебре линейных полиномов с целыми коэффициентами. В сб.: *Тезисы докладов X Международной научно-технической конференции «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика»*, **1**. Изд-во МЭИ, Москва, 2004, с. 286–287.
86. Мамонтов А. И., Мещанинов Д. Г., Проблема полноты в функциональной системе линейных полиномов с целыми коэффициентами. В сб.: *Труды VI Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем»*. Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, Москва, 2004, с. 50–52.
87. Мамонтов А. И., Некоторые возможные применения алгебр полиномов с целыми коэффициентами. В сб.: *Научная сессия МИФИ'2005: Сборник научных трудов*, **14**. МИФИ, Москва, 2005, с. 52–53.
88. Марченков С. С., *Функциональные системы с операцией суперпозиции*. Физматлит, Москва, 2004.

Статья поступила 14.11.2008.

Переработанный вариант поступил 8.04.2009.