Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Харин, А. И. Петлицкий, Идентификация двоичной цепи Маркова s -го порядка с r частичными связями при наличии аддитивных искажений, *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 4, 138–155

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:32:38

Идентификация двоичной цепи Маркова s -го порядка с r частичными связями при наличии аддитивных искажений

© 2010 г. Ю. С. Харин, А. И. Петлицкий

Статья посвящена решению актуальной задачи идентификации (оцениванию параметров и проверке гипотез) для двоичной цепи Маркова $\text{ЦМ}(s, r)$ при наличии аддитивных искажений.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические модели».

1. Введение

Цепи Маркова высокого порядка имеют широкое применение при исследовании зависимостей в стохастических последовательностях [1–14]. Однако число параметров (вероятностей переходов) цепи Маркова s -го порядка растет экспоненциально при увеличении s , что усложняет идентификацию этой модели на практике. Для снижения вычислительной сложности разрабатываются малопараметрические модели цепей Маркова высокого порядка: бинарная авторегрессия [5], модель Джекобса–Льюиса [6], МТД-модель Рафтери [7], цепь Маркова переменного порядка [8], цепь Маркова s -го порядка с r частичными связями [9, 10], для которой принято использовать краткое обозначение $\text{ЦМ}(s, r)$.

В приложениях возникает необходимость в так называемых усложненных моделях цепи Маркова высокого порядка: искаженная цепь Маркова [11], модель скрытой цепи Маркова [12], модель двойной цепи Маркова [13]. Ряд работ посвящен статистическому анализу цепей Маркова при наличии искажений [11, 14]. Общее условие сохранения марковости преобразования независимых двоичных последовательностей конечных однородных цепей Маркова первого порядка представлено в [14]. В [11] проведен анализ суммы цепи Маркова первого порядка и авторегрессионного процесса (в поле действительных чисел). Результаты исследования цепей Маркова при наличии искажений могут быть использованы для улучшения статистических свойств выходных последовательностей генераторов случайных и псевдослучайных последовательностей.

Данная статья посвящена решению актуальной задачи идентификации (оцениванию параметров и проверке гипотез) для двоичной цепи Маркова $\text{ЦМ}(s, r)$ при наличии аддитивных искажений.

2. Двоичная цепь Маркова с частичными связями и ее вероятностно-статистические свойства

Пусть $A = \{0, 1\}$; $J_i^k = (j_i, j_{i+1}, \dots, j_k) \in A^{k-i+1}$ — цепочка из $k - i + 1$ знаков последовательности $\{j_n\}$, $k \geq i$; $\{x_t\}$ — однородная цепь Маркова s -го порядка с множеством состояний A и вероятностями одношаговых переходов

$$p_{J_1^{s+1}} = \mathbf{P}\{x_{t+s} = j_{s+1} \mid x_{t+s-1} = j_s, \dots, x_t = j_1\}, \quad J_1^{s+1} \in A^{s+1}, \quad t \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

Цепь Маркова s -го порядка называется цепью с r частичными связями [9, 10], если ее вероятности одношаговых переходов имеют вид

$$p_{j_1, \dots, j_s, j_{s+1}} = q_{j_{m_1^0}, \dots, j_{m_r^0}, j_{s+1}}, \quad J_1^{s+1} \in A^{s+1}, \quad (1)$$

где $r \in \{1, 2, \dots, s\}$ — число связей; $M_r^0 = (m_1^0, m_2^0, \dots, m_r^0) \in \mathbf{M}$ — целочисленный r -вектор с упорядоченными компонентами $1 = m_1^0 < m_2^0 < \dots < m_r^0 \leq s$, называемый шаблоном связей, $\mathbf{M}$ — множество всевозможных таких векторов; $Q = (q_{J_1^{r+1}})_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}}$ — $(r+1)$ -мерная стохастическая матрица, то есть матрица, элементы которой неотрицательны и $\sum_{j_{r+1} \in A} q_{J_1^{r+1}} = 1$, $J_1^r \in A^r$.

Соотношение (1) означает, что вероятность перехода в состояние j_{s+1} зависит не от всех s предыдущих состояний $j_1, \dots, j_s$, а лишь от r избранных состояний $j_{m_1^0}, \dots, j_{m_r^0}$. Таким образом, вместо $N^s(N-1)$ параметров матрица вероятностей одношаговых переходов $\mathbf{CM}(s, r)$ полностью определяется $N^r(N-1) + \min\{r-1, s-r\}$ параметрами Q , M_r^0 (при $r-1 > s-r$ шаблон связей однозначно задается с помощью $s-r$ элементов, не входящих в него). Заметим, что если $r = s$, то получаем цепь Маркова s -го порядка [2], то есть $\mathbf{CM}(s, s) = \mathbf{CM}(s)$.

Теорема 1 ([10]). *Цепь Маркова s -го порядка с r частичными связями, определяемая (1), является эргодической тогда и только тогда, когда найдется $i \in \mathbf{N}$ такое, что*

$$\min_{J_1^s, J_{s+i+1}^{2s+i} \in A^s} \sum_{J_{s+1}^{s+i} \in A^i} \prod_{k=1}^{s+i} q_{j_{k+m_1^0-1}, \dots, j_{k+m_r^0-1}, j_{k+s}} > 0.$$

Следствие 1 ([10]). *Если $\min_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} q_{J_1^{r+1}} > 0$, то $\mathbf{CM}(s, r)$ является эргодической.*

В дальнейшем будем предполагать, что $\mathbf{CM}(s, r)$ является стационарной [2, 18], то есть для нее выполнено условие эргодичности и ее начальное распределение вероятностей $(\pi_{J_1^s})_{J_1^s \in A^s}$ совпадает со стационарным $(\pi_{J_1^s}^*)_{J_1^s \in A^s}$.

Примем еще несколько обозначений: $X_1^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — реализация цепи Маркова $\mathbf{CM}(s, r)$ длины n ; $F(J_1^s; M_r) = (j_{m_1}, j_{m_2}, \dots, j_{m_r})$ — функция, называемая селектором r -го порядка, $J_1^s \in A^s$, $M_r \in \mathbf{M}$; $\delta_{J_1^s, K_1^s} = \prod_{i=1}^s \delta_{j_i, k_i}$ — символ Кронекера для $J_1^s, K_1^s \in A^s$;

$$v_{J_1^{r+1}}(X_1^n; M_r) = \sum_{i=1}^{n-s} \delta_F(X_i^{t+s-1}; M_r)_{J_1^r} \delta_{x_{t+s}, j_{r+1}}, \quad J_1^{r+1} \in A^{r+1}, \quad (2)$$

— частотные статистики для шаблона $M_r \in \mathbb{M}$; $\{\pi_{J_1^s}^*: J_1^s \in A^s\}$ — стационарное распределение вероятностей $\mathbf{CM}(s, r)$;

$$\begin{aligned} \mu_{J_1^{r+1}}(M_r) &= \mathbf{P}\{F(X_t^{t+s-1}; M_r) = J_1^r, x_{t+s} = j_{r+1}\} \\ &= \sum_{K_1^s \in A^s} \delta_{F(K_1^s; M_r), J_1^r} \pi_{K_1^s}^* p_{K_1^s, j_{r+1}}, \quad J_1^{r+1} \in A^{r+1}, \end{aligned} \quad (3)$$

— распределение вероятностей $(r+1)$ -грамм для шаблона связей $M_r \in \mathbb{M}$;

$$\hat{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r) = v_{J_1^{r+1}}(X_1^n; M_r)/(n-s)$$

— частотная оценка вероятности $\mu_{J_1^{r+1}}(M_r)$, которая является несмещенной и состоятельной в среднеквадратическом оценкой при $n \rightarrow \infty$ [10]. Условимся, что если вместо какого-то индекса стоит точка, то это означает суммирование по всем возможным значениям этого индекса:

$$\mu_{J_1^r}(\cdot)(M_r) = \sum_{j_{r+1} \in A} \mu_{J_1^{r+1}}(M_r).$$

Если шаблон M_r^0 известен, то при $n \rightarrow \infty$ несмещенная и состоятельная в среднеквадратическом оценка для матрицы Q имеет вид [10]

$$\hat{Q} = (\hat{q}_{J_1^{r+1}})_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}}, \quad \hat{q}_{J_1^{r+1}} = \frac{\hat{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r^0)}{\hat{\mu}_{J_1^r}(\cdot)(M_r^0)}. \quad (4)$$

Состоятельная оценка для шаблона M_r^0 имеет вид [10]

$$\hat{M}_r = \arg \min_{M_r \in \mathbb{M}} \hat{H}(M_r), \quad (5)$$

где

$$\hat{H}(M_r) = - \sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} \hat{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r) \ln(\hat{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r) / \hat{\mu}_{J_1^r}(\cdot)(M_r^0))$$

— подстановочная оценка условной энтропии будущего символа $x_{t+s} \in A$ относительно прошлого, заданного селектором $F(X_t^{t+s-1}; M_r) \in A^r$, $M_r \in \mathbb{M}$.

Состоятельные оценки $\hat{s}$, $\hat{r}$ для параметров s , r ($s_- \leq s \leq s_+$, $r_- \leq r \leq r_+ \leq s_+$) построены в [15] из условия минимума байесовского информационного функционала [16]

$$\text{BIC}(s, r) = 2(n-s)\hat{H}(\hat{M}_r) + N^r(N-1)\ln(n-s). \quad (6)$$

3. Вероятностно-статистические свойства двоичной $\mathbf{CM}(s, r)$ при наличии аддитивных искажений

Под двоичной цепью Маркова с частичными связями при наличии аддитивных искажений понимается наблюдаемый временной ряд [17]

$$y_t = x_t \oplus \xi_t, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где $x_t \in A$ — ненаблюдаемая двоичная $\mathbf{CM}(s, r)$, $\xi_t \in A$ — ненаблюдаемая последовательность независимых в совокупности, одинаково распределенных двоичных случайных величин, $\mathbf{P}\{\xi_t = 0\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi_t = 1\} = p > 1/2$; $\{x_t\}$, $\{\xi_t\}$ независимы.

Отметим, что соотношение (7) определяет скрытую цепь Маркова, которая при $r = s = 1$, то есть в случае простой цепи Маркова x_t , исследована в [12]. Заметим также, что если $p = 1/2$, то y_t — равновероятная случайная последовательность Бернулли [4]; в этом случае невозможно оценить параметры цепи Маркова с частичными связями x_t по наблюдаемой реализации y_t .

Пусть $Y_1^n = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in A^n$ — наблюдаемая реализация длины n для двоичной ЦМ(s, r) при наличии аддитивных искажений.

Лемма 1. Для модели (7) функция правдоподобия параметров Q и p имеет вид

$$L(Q, p) = \sum_{J_1^n \in A^n} p^n \left(\frac{1-p}{p} \right)^{w(J_1^n \oplus Y_1^n)} \left(\pi_{J_1^s} \prod_{i=1}^{n-s} q_F(J_i^{i+s-1}; M_r^0)_{j_{i+s}} \right),$$

где $\{\pi_{J_1^s}; J_1^s \in A^s\}$ — начальное распределение вероятностей, $w(\cdot)$ — вес Хэмминга.

Доказательство. Вид функции правдоподобия получается прямым вычислением:

$$L(Q, p) = \sum_{J_1^n \in A^n} \mathbf{P}\{X_1^n = J_1^n\} \mathbf{P}\{\Xi_1^n \oplus X_1^n = Y_1^n \mid X_1^n = J_1^n\}.$$

Прямое вычисление значения функции $L(Q, p)$ при наблюдении временного ряда длины n требует произвести $O(n2^n)$ операций, что весьма затруднительно. Эта трудность также возникает в работах [12, 13].

Обозначим

$$b_{K_1^{r+1}}(M_r) = \mathbf{P}\{F(Y_t^{t+s-1}; M_r) = K_1^r, y_{t+s} = k_{r+1}\}, \quad K_1^{r+1} \in A^{r+1}, \quad (8)$$

распределение вероятностей $(r+1)$ -граммы искаженной цепи Маркова для шаблона связей $M_r \in M$.

Лемма 2. Если x_t — стационарная цепь Маркова с частичными связями, то справедливы соотношения

$$b_{K_1^{r+1}}(M_r) = \sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} \mu_{J_1^{r+1}}(M_r) p^{r+1-w(J_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1})} (1-p)^{w(J_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1})},$$

где $K_1^{r+1} \in A^{r+1}$.

Доказательство. С учетом (3), (7), (8), прямым вычислением вероятностей получаем требуемый результат.

Следствие 2. Если $p = 1/2$ (искажающая последовательность чисто случайна), то $b_{K_1^{r+1}}(M_r) = 2^{-(r+1)}$ для любых $K_1^{r+1} \in A^{r+1}$, $M_r \in M$; если $p = 1$ (искажения отсутствуют), то $b_{K_1^{r+1}}(M_r) = \mu_{K_1^{r+1}}(M_r)$.

Лемма 3. В условиях леммы 2 распределение вероятностей $(r+1)$ -граммы для искаженной ЦМ(s, r) не дальше (в евклидовой метрике) от равномерного, чем распределение $(r+1)$ -граммы для неискаженной ЦМ(s, r):

$$\sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} (b_{J_1^{r+1}}(M_r) - 2^{-(r+1)})^2 \leq \sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} (\mu_{J_1^{r+1}}(M_r) - 2^{-(r+1)})^2.$$

Доказательство. Примем матричные обозначения

$$\begin{aligned}\mu &= (\mu_{J_1^{r+1}}(M_r)) \in \mathbf{R}^{2^{r+1}}, & b &= (b_{J_1^{r+1}}(M_r)) \in \mathbf{R}^{2^{r+1}}, \\ \tau &= (2^{-(r+1)}) \in \mathbf{R}^{2^{r+1}}, & V &= (v_{J_1^{r+1}, K_1^{r+1}}) \in \mathbf{R}^{2^{r+1} \times 2^{r+1}}, \\ v_{J_1^{r+1}, K_1^{r+1}} &= p^{r+1-w(J_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1})} (1-p)^{w(J_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1})},\end{aligned}$$

причем $V = V^T$ — бистохастическая матрица, $V\tau = \tau$, $\lambda_{\max}(V) = 1$ — максимальное характеристическое число матрицы V . Тогда, используя лемму 2 и свойства характеристических чисел [22], получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} (b_{J_1^{r+1}}(M_r) - 2^{-(r+1)})^2 &= \|b - \tau\|^2 = \|V\mu - \tau\|^2 = \|V(\mu - \tau)\|^2 \\ &= (\mu - \tau)^T V^2 (\mu - \tau) \leq \lambda_{\max}(V^2) \|\mu - \tau\|^2 \\ &= \lambda_{\max}(V) \|\mu - \tau\|^2 = \|\mu - \tau\|^2 \\ &= \sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} (\mu_{J_1^{r+1}}(M_r) - 2^{-(r+1)})^2.\end{aligned}$$

В дальнейшем при доказательстве некоторых утверждений будем использовать представление $\mathbf{CM}(s, r)$ в виде цепи Маркова первого порядка с расширенным пространством состояний A^s и вероятностями переходов $p_{I_1^s, L_1^s}^* = \delta_{I_2^s, L_1^{s-1}} p_{I_1^s, L_1^s}$, $I_1^s, L_1^s \in A^s$. Пусть $p_{I_1^s, L_1^s}^{*(k)}$ — вероятность перехода за k шагов из состояния I_1^s в L_1^s ;

$$c_{I_1^s, L_1^s} = \sum_{k=0}^{\infty} (p_{I_1^s, L_1^s}^{*(k)} - \pi_{L_1^s}^*), \quad I_1^s, L_1^s \in A^s$$

(если ЦМ является эргодической, то этот ряд сходится [14]); $M_{r+1} = (M_r, s+1)$;

$$\tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r) = \frac{v_{K_1^{r+1}}(Y_1^n; M_r)}{n-s} = \frac{1}{n-s} \sum_{t=1}^{n-s} \delta_{F(Y_t^{t+s-1}; M_r), K_1^{r+1}} \delta_{y_{t+s}, K_{r+1}} \quad (9)$$

— частотная оценка вероятности $b_{K_1^{r+1}}(M_r)$, $K_1^{r+1} \in A^{r+1}$;

$$\kappa_{J_1^{r+1}, K_1^{r+1}} = \sum_{A(s, r)} \delta_{F(I_1^s; M_r), J_1^s} \delta_{F(L_1^s; M_r), K_1^s} p_{I_1^{s+1}} p_{L_1^{s+1}} (\pi_{I_1^s}^* c_{I_2^{s+1}, L_1^s} + \pi_{L_1^s}^* c_{L_2^{s+1}, I_1^s}),$$

где $A(s, r) = \{I_1^s, L_1^s \in A^s, i_{s+1} = j_{r+1}, l_{s+1} = k_{r+1}\}$;

$$\begin{aligned}h_{K_1^{r+1}, J_1^{r+1}}(M_r) &= p^{2r+2} \sum_{t=1}^s \sum_{B(s, r)} \left(\prod_{C(u_1, u_2)} \frac{\delta_{k_{l_1}, j_{l_2}}}{p} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{k_{l_1} \oplus i_{m_{l_1}}} - 1 \right) \pi_{I_1^s}^* \\ &\quad \times q_{F(I_1^{s+1}; M_{r+1})} \cdots q_{F(I_{t+1}^{s+t+1}; M_{r+1})} \\ &\quad \times \left(\frac{1-p}{p} \right)^{w(K_1^{r+1} \oplus F(I_1^{s+1}; M_{r+1})) + w(J_1^{r+1} \oplus F(I_{t+1}^{s+t+1}; M_{r+1}))},\end{aligned}$$

где

$$B(s, r) = \{I_1^{s+1} \in A^{s+1}, I_{s+2}^{s+t+1} \in A^t\},$$

$$C(u_1, u_2) = \{(l_1, l_2) \in \{(u_1, u_2): 1 \leq u_2 < u_1 \leq r+1, m_{u_1} = m_{u_2} + t\}\},$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{K_1^{r+1}, J_1^{r+1}}^{\tilde{b}} &= b_{J_1^{r+1}}(M_r)(\delta_{K_1^{r+1}, J_1^{r+1}} - b_{K_1^{r+1}}(M_r)) + h_{K_1^{r+1}, J_1^{r+1}}(M_r) + h_{J_1^{r+1}, K_1^{r+1}}(M_r) \\ &+ \sum_{L_1^{r+1}, I_1^{r+1} \in A^{r+1}} p^{2r+2} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{w(L_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1}) + w(I_1^{r+1} \oplus J_1^{r+1})} \kappa_{L_1^{r+1}, I_1^{r+1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Лемма 4. Если x_t — стационарная цепь Маркова $\mathbf{CM}(s, r)$, то определяемые (9) оценки $\{\tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r): K_1^{r+1} \in A^{r+1}\}$ являются несмещенными, состоятельными в среднеквадратическом, нормированные отклонения $\{\sqrt{n-s}(\tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r) - b_{K_1^{r+1}}(M_r)): K_1^{r+1} \in A^{r+1}\}$ при $n \rightarrow \infty$ имеют предельное выражение для ковариаций

$$(n-s) \text{cov}\{\tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r), \tilde{b}_{J_1^{r+1}}(M_r)\} \rightarrow \sigma_{K_1^{r+1}, J_1^{r+1}}^{\tilde{b}}$$

и распределены асимптотически нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариациями (10).

Доказательство. В силу (8), (9)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r)t\} &= \frac{1}{n-s} \sum_{t=1}^{n-s} \mathbf{P}\{F(Y_t^{t+s-1}; M_r) = K_1^r, y_{t+s} = k_{r+1}\} \\ &= b_{K_1^{r+1}}(M_r) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\{(n-s)(\tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r) - b_{K_1^{r+1}}(M_r))(\tilde{b}_{J_1^{r+1}}(M_r) - b_{J_1^{r+1}}(M_r))\} \\ &= \frac{1}{n-s} \mathbf{E}\{v_{K_1^{r+1}}(Y_1^n; M_r)v_{J_1^{r+1}}(Y_1^n; M_r)\} - (n-s)b_{K_1^{r+1}}(M_r)b_{J_1^{r+1}}(M_r) \\ &= \delta_{K_1^{r+1}, J_1^{r+1}}b_{J_1^{r+1}}(M_r) - (n-s)b_{K_1^{r+1}}(M_r)b_{J_1^{r+1}}(M_r) \\ &+ \sum_{L_1^{r+1}, I_1^{r+1} \in A^{r+1}} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \neq t_2}}^{n-s} \mathbf{P}\{F(X_{t_1}^{t_1+s}; M_{r+1}) = L_1^{r+1}, F(X_{t_2}^{t_2+s}; M_{r+1}) = I_1^{r+1}\} \\ &\times \mathbf{P}\{F(\Xi_{t_1}^{t_1+s}; M_{r+1}) = K_1^{r+1} \oplus L_1^{r+1}, F(\Xi_{t_2}^{t_2+s}; M_{r+1}) = J_1^{r+1} \oplus I_1^{r+1}\}. \end{aligned}$$

Используя лемму 3 (вид ковариаций для частотных статистик $\mathbf{CM}(s, r)$) из [10] и соотношения (8), (10), получаем предельное выражение для ковариаций.

Для доказательства асимптотической нормальности воспользуемся известным утверждением (см., например, [18]): случайный вектор имеет асимптотически нормальное распределение тогда и только тогда, когда произвольная линейная комбинация его компонент

имеет асимптотически нормальное распределение. Рассмотрим вспомогательную случайную последовательность

$$z_t = \sum_{K_1^{r+1} \in A^{r+1}} \alpha_{K_1^{r+1}} \delta_{F(Y_t^{t+s-1}; M_r), K_1^r} \delta_{y_{t+s}, k_{r+1}},$$

где $\alpha_{K_1^{r+1}} \in \mathbf{R}$ — произвольные коэффициенты линейной комбинации. Эта последовательность удовлетворяет условию φ -перемешивания как функция от последовательностей $\{x_t\}$, $\{\xi_t\}$, обладающих этим свойством [19]. Кроме того, дисперсия суммы $z_1, z_2, \dots, z_n$ при $n \rightarrow \infty$ бесконечно возрастает:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \left\{ \sum_{t=1}^{n-s} z_t \right\} &= \mathbf{D} \left\{ \sum_{K_1^{r+1} \in A^{r+1}} \alpha_{K_1^{r+1}} \nu_{K_1^{r+1}}(Y_1^n; M_r) \right\} \\ &= (n-s)^2 \mathbf{D} \left\{ \sum_{K_1^{r+1} \in A^{r+1}} \alpha_{K_1^{r+1}} \tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r) \right\} \\ &= (n-s) \sum_{K_1^{r+1}, J_1^{r+1} \in A^{r+1}} \alpha_{K_1^{r+1}} \alpha_{J_1^{r+1}} \sigma_{K_1^{r+1}, J_1^{r+1}}^{\tilde{b}} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

поэтому по центральной предельной теореме для случайных величин с φ -перемешиванием [20] получаем, что нормированная сумма

$$(n-s)^{-1/2} \sum_{t=1}^{n-s} z_t = (n-s)^{1/2} \sum_{K_1^{r+1} \in A^{r+1}} \alpha_{K_1^{r+1}} \tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r)$$

распределена асимптотически нормально.

4. Идентификация искаженной цепи Маркова в случае известного p

Идентификация двоичной цепи Маркова при наличии аддитивных искажений заключается в оценивании параметров модели (7) и проверке гипотез о значениях ее параметров по наблюдаемой реализации Y_1^n .

Как уже отмечалось, из-за экспоненциальной вычислительной сложности использовать методы оценивания параметров модели (7) на основе функции правдоподобия не представляется возможным. Применим метод подстановки [21]. Согласно леммам 2, 4, оценки параметров для $\{\mu_{J_1^{r+1}}(M_r): J_1^{r+1} \in A^{r+1}\}$ по наблюдаемой реализации Y_1^n будем находить как решение неоднородной системы N^{r+1} линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} \mu_{J_1^{r+1}}(M_r) &= 1, \\ \sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} \mu_{J_1^{r+1}}(M_r) p^{r+1-w(J_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1})} (1-p)^{w(J_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1})} &= \tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r), \end{aligned} \quad (11)$$

где $K_1^{r+1} \in A^{r+1} \setminus \{0\}^{r+1}$.

Приведем две леммы, которые понадобятся в дальнейшем при доказательстве свойств оценок, найденных из (11).

Лемма 5. Для любых $K_1^{r+1}, I_1^{r+1} \in A^{r+1}$ справедливо соотношение

$$\left(\frac{p^2}{2p-1}\right)^{r+1} \sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{w(J_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1})} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{w(J_1^{r+1} \oplus I_1^{r+1})} = \delta_{K_1^{r+1}, I_1^{r+1}}. \quad (12)$$

Доказательство. Рассмотрев два случая: $K_1^{r+1} = I_1^{r+1}$ и $K_1^{r+1} \neq I_1^{r+1}$, требуемый результат получаем прямым вычислением левой части (12).

Примем матричные обозначения

$$V'_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

E_{2i} — единичная матрица порядка 2^i ,

$$E_{2i+1}^* = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \alpha E_{2^{i+1}-1} & & \end{array} \right), \quad \begin{aligned} V_{2i+1} &= \left(\begin{array}{c|c} V_{2i} & \alpha V_{2i} \\ \hline \alpha V_{2i} & \alpha V_{2i} \end{array} \right), \\ V_{2i+1}^* &= \left(\begin{array}{c|c} E_{2i}^* & V_{2i}^* \\ \hline \alpha V_{2i}' & V_{2i}' \end{array} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots$

Лемма 6. Для любого $i = 1, 2, \dots$ определитель матрицы V_{2i+1}^* , заданной рекуррентной формулой (13), равен нулю тогда и только тогда, когда $\alpha = \pm 1$.

Доказательство. Используя (13) и формулу для определителя блочных матриц [22], находим, что

$$\begin{aligned} |V_{2i+1}^*| &= |V_{2i}'| |E_{2i} - \alpha E_{2i}^*| |V_{2i}^*| = |V_2^*| \prod_{k=1}^i (|V_{2k}'| |E_{2k} - \alpha E_{2k}^*|), \\ |V_{2i+1}'| &= |V_{2i}'|^2 |E_{2i} - \alpha^2 E_{2i}| = |V_2'|^{2^i} \prod_{k=1}^i (1 - \alpha^2)^{2^{2i-k}}, \\ |V_2^*| &= 1 - \alpha, \quad |V_2'| = 1 - \alpha^2, \quad |E_{2i} - \alpha E_{2i}^*| = (1 - \alpha)(1 - \alpha^2)^{2^i - 1}, \end{aligned}$$

откуда получаем требуемый результат.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \sigma_{J_1^{r+1}, K_1^{r+1}}^{\tilde{\mu}} &= \chi_{J_1^{r+1}, K_1^{r+1}} - \mu_{J_1^{r+1}}(M_r) \mu_{K_1^{r+1}}(M_r) + \left(\frac{p}{2p-1}\right)^{2r+2} \\ &\quad \times \sum_{I_1^{r+1}, L_1^{r+1} \in A^{r+1}} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{w(I_1^{r+1} \oplus J_1^{r+1}) + w(L_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1})} \\ &\quad \times (\delta_{I_1^{r+1}, L_1^{r+1}} b_{I_1^{r+1}}(M_r) + h_{I_1^{r+1}, L_1^{r+1}}(M_r) \\ &\quad + h_{L_1^{r+1}, I_1^{r+1}}(M_r)), \end{aligned} \quad (14)$$

где $J_1^{r+1}, K_1^{r+1} \in A^{r+1}$.

Теорема 2. Если x_t — стационарная ЦМ(s, r) и $p \neq 1/2$, то оценки

$$\tilde{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r) = \left(\frac{p}{2p-1}\right)^{r+1} \sum_{K_1^{r+1} \in A^{r+1}} \tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r) \left(\frac{p-1}{p}\right)^{w(J_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1})}, \quad (15)$$

найденные как решение системы (11), являются несмещенными, состоятельными в среднеквадратическом; нормированные отклонения $\{\sqrt{n-s}(\tilde{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r) - \mu_{J_1^{r+1}}(M_r)) : J_1^{r+1} \in A^{r+1}\}$ при $n \rightarrow \infty$ имеют предельное выражение для ковариаций

$$(n-s) \text{cov}\{\tilde{\mu}_{K_1^{r+1}}(M_r), \tilde{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r)\} \rightarrow \sigma_{K_1^{r+1}, J_1^{r+1}}^{\tilde{\mu}},$$

и распределены асимптотически нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариациями (14).

Доказательство. Используя лемму 5, непосредственной проверкой убеждаемся, что оценки (15) являются решением системы (11). Из леммы 6 при $p \neq 1/2$ следует единственность решения системы (11); при этом в обозначениях (13) параметр $\alpha = (1-p)/p$.

Поскольку величины $\{\tilde{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r) : J_1^{r+1} \in A^{r+1}\}$, определяемые (15), являются линейными комбинациями величин $\{\tilde{b}_{K_1^{r+1}}(M_r) : K_1^{r+1} \in A^{r+1}\}$, из леммы 4 следуют несмещенность, состоятельность в среднеквадратическом и соотношение для ковариаций

$$\sigma_{J_1^{r+1}, K_1^{r+1}}^{\tilde{\mu}} = \left(\frac{p}{2p-1}\right)^{2r+2} \sum_{I_1^{r+1}, L_1^{r+1} \in A^{r+1}} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{w(I_1^{r+1} \oplus J_1^{r+1}) + w(I_1^{r+1} \oplus K_1^{r+1})} \sigma_{I_1^{r+1}, L_1^{r+1}}^{\tilde{b}}.$$

Асимптотическая нормальность следует из теоремы из [21] о непрерывном функциональном преобразовании (15) асимптотически нормальных случайных последовательностей и леммы 4.

С использованием подстановочного принципа [21] оценки $\tilde{Q}$, $\tilde{M}_r$, $\tilde{r}$, $\tilde{s}$ для матрицы Q , шаблона M_r^0 , числа связей r и порядка s , соответственно, можно получить с помощью формул (4)–(6), в которые вместо $\{\hat{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r) : J_1^{r+1} \in A^{r+1}\}$ подставлены оценки $\{\tilde{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r) : J_1^{r+1} \in A^{r+1}\}$, определяемые в (15).

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \sigma_{J_1^{r+1}, K_1^{r+1}}^{\tilde{q}} &= \frac{1}{\mu_{J_1^r}(M_r^0) \mu_{K_1^r}(M_r^0)} \left(\frac{p}{2p-1}\right)^{2r+2} \sum_{l_1, l_2 \in A} (\delta_{j_{r+1}, l_1} - q_{J_1^{r+1}})(\delta_{k_{r+1}, l_2} - q_{K_1^{r+1}}) \\ &\times \sum_{I_1^{r+1} \in A^{r+1}} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{w(I_1^r \oplus J_1^r) + w(I_1^r \oplus K_1^r) + w(i_{r+1} \oplus l_1) + w(i_{r+1} \oplus l_2)} b_{I_1^{r+1}}(M_r^0), \end{aligned} \quad (16)$$

где $J_1^{r+1}, K_1^{r+1} \in A^{r+1}$.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 при $n \rightarrow \infty$ оценки $\tilde{Q}$, $\tilde{M}_r$, $\tilde{r}$, $\tilde{s}$ являются состоятельными, и при известном истинном шаблоне M_r^0 справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\tilde{q}_{J_1^{r+1}}\} &\rightarrow q_{J_1^{r+1}}, \\ (n-s) \text{cov}\{\tilde{q}_{K_1^{r+1}}, \tilde{q}_{J_1^{r+1}}\} &\rightarrow \sigma_{K_1^{r+1}, J_1^{r+1}}^{\tilde{q}}, \end{aligned}$$

а случайные величины $\{\sqrt{n-s}(\tilde{q}_{J_1^{r+1}} - q_{J_1^{r+1}}), J_1^{r+1} \in A^{r+1}\}$ распределены асимптотически нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариациями (16).

Доказательство. Используя теорему 2, теорему о непрерывном функциональном преобразовании [21], результаты из [10] и ограниченность $\tilde{q}_{J_1^{r+1}} \in [0, 1]$, $J_1^{r+1} \in A^{r+1}$, получаем доказываемое утверждение.

Следствие 3. В условиях теоремы 2, если шаблон связей M_r^0 известен, то при $n \rightarrow \infty$ оценка $\tilde{Q}$ является асимптотически несмещенной и состоятельной в среднеквадратическом, причем среднеквадратическая ошибка оценивания матрицы Q удовлетворяет предельному соотношению

$$\begin{aligned} n\Delta_n(\tilde{Q}) &= n\mathbf{E}\{\|\tilde{Q} - Q\|^2\} \\ &\rightarrow \left(\frac{3p^2 - 3p + 1}{4p^2 - 4p + 1}\right)^r \sum_{J_1^r, K_1^r \in A^r} \left(\frac{p - p^2}{3p^2 - 3p + 1}\right)^{w(J_1^r \oplus K_1^r)} \\ &\quad \times \frac{\mu_{K_1^r}(M_r^0)}{\mu_{J_1^r}^2(M_r^0)} \left(\frac{2p^2 - 2p + 1}{4p^2 - 4p + 1} + \sum_{j_{r+1} \in A} q_{J_1^{r+1}}(q_{J_1^{r+1}} - 2q_{K_1^r, j_{r+1}}) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Для доказательства следствия достаточно воспользоваться асимптотическими выражениями ковариаций (16) из теоремы 3.

Рассмотрим теперь задачу статистической проверки гипотез $H_0: Q = Q^0$, где $Q^0 = (q_{J_1^{r+1}}^0)_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}}$ — некоторая фиксированная стохастическая матрица, и $H_1 = \bar{H}_0: Q \neq Q^0$ — альтернатива общего вида в семействе моделей (7).

Определим статистику ρ , полагая (с использованием (4), (15))

$$\rho = \sum_{J_1^r, K_1^r \in A^r} \sum_{\substack{j_{r+1} \in D_{J_1^r}^* \\ k_{r+1} \in D_{K_1^r}^*}} (n-s)(\tilde{q}_{J_1^{r+1}} - q_{J_1^{r+1}}^0) \Sigma_{J_1^r, K_1^r}^{-1} (\tilde{q}_{K_1^{r+1}} - q_{K_1^{r+1}}^0), \quad (18)$$

где

$$D_{J_1^r} = \{j_{r+1} \in A: q_{J_1^{r+1}}^0 > 0\}, \quad D_{J_1^r}^* = D_{J_1^r} \setminus \{j\},$$

j — произвольный фиксированный элемент из $D_{J_1^r}$,

$$\Sigma = (\sigma_{J_1^{r+1}, K_1^{r+1}}^{\tilde{q}}), \quad J_1^r, K_1^r \in A^r, \quad j_{r+1}, k_{r+1} \in D_{K_1^r}^*.$$

Рассмотрим семейство решающих правил для проверки H_0, H_1 , основанных на (18):

$$\text{принимается } H_0, \text{ если } \rho \leq \Lambda, \text{ и принимается } H_1, \text{ если } \rho > \Lambda, \quad (19)$$

где $\Lambda > 0$ — некоторое пороговое значение.

Теорема 4. Если в условиях теоремы 2 справедлива гипотеза H_0 , то при $n \rightarrow \infty$ статистика ρ , определяемая (18), имеет χ^2 -распределение с

$$U = \sum_{J_1^r \in A^r} |D_{J_1^r}^*|$$

степенями свободы.

Доказательство. Используя теорему 3, теорему о распределении квадратичной формы случайных величин [23], имеющих асимптотически нормальное распределение вероятностей, получаем доказываемое утверждение.

Следствие 4. Если $\Lambda = G_U^{-1}(1 - \varepsilon)$ — квантиль уровня $1 - \varepsilon$ стандартного χ^2 -распределения с U степенями свободы, то при $n \rightarrow \infty$ размер критерия (19) стремится к заданному уровню значимости $\varepsilon \in (0, 1)$.

Следствие 5. Пусть задано семейство контигуальных альтернатив

$$H_1: Q = Q^1$$

где

$$\begin{aligned} Q^1 &= (q_{J_1^{r+1}}^1)_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}}, \quad q_{J_1^{r+1}}^1 = q_{J_1^{r+1}}^0 \left(1 + \frac{d_{J_1^{r+1}}}{\sqrt{n-s}} \right), \\ \sum_{j_{r+1} \in A} d_{J_1^{r+1}} q_{J_1^{r+1}}^0 &= 0, \quad \sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} |d_{J_1^{r+1}}| > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ мощность теста (19), в котором $\Lambda = G_U^{-1}(1 - \varepsilon)$, удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$w \rightarrow 1 - G_{U,a}(G_U^{-1}(1 - \varepsilon)), \quad (21)$$

где $G_{U,a}(\cdot)$ — функция нецентрального χ^2 -распределения с U степенями свободы и параметром нецентральности

$$a = \sum_{J_1^r, K_1^r \in A^r} \sum_{\substack{j_{r+1} \in D_{J_1^r}^* \\ k_{r+1} \in D_{K_1^r}^*}} q_{J_1^{r+1}}^0 d_{J_1^{r+1}} \Sigma_{J_1^{r+1}, K_1^{r+1}}^{-1} q_{K_1^{r+1}}^0 d_{K_1^{r+1}}.$$

Доказательство. В силу теоремы 3, соотношения (20) и теоремы об асимптотическом распределении суммы квадратов асимптотически нормальных случайных величин [24], получаем, что при $n \rightarrow \infty$ в случае справедливости гипотезы H_1 статистика ρ имеет нецентральное χ^2 -распределение с U степенями свободы и параметром нецентральности a . Таким образом, мощность критерия

$$\begin{aligned} w &= \mathbf{P}\{1 - G_U(\rho) < \varepsilon \mid H_1\} = 1 - \mathbf{P}\{\rho \leq G_U^{-1}(1 - \varepsilon) \mid H_1\} \\ &\rightarrow 1 - G_{U,a}(G_U^{-1}(1 - \varepsilon)), \end{aligned}$$

что совпадает с (21).

5. Случай неизвестного параметра p

Для идентификации модели (7) в случае неизвестного p предлагаются два способа.

Способ I. Для заданного шаблона M_r определим расширенный шаблон

$$M_{r^*}^* = (m_1^*, m_2^*, \dots, m_{r^*}^*),$$

состоящий из r^* упорядоченных по возрастанию различных компонент, принадлежащих множеству $\{m_1, \dots, m_r, s+1+m_1-m_r, \dots, s+1+m_{r-1}-m_r, s+1\}$, $r+1 \leq r^* \leq 2r$; селектор $F^*(J_k^{k+r^*-2}; M_r) = (j_{l_1}, \dots, j_{l_r})$, $l_i \in \{1, 2, \dots, r^*\}$, $m_{l_i}^* = m_i + (k-1)(s+1-m_r)$, где $i = 1, 2, \dots, r$, $k = 1, 2$, $s^* = 2s+1-m_r$.

Лемма 7. Если x_t — стационарная цепь Маркова с частичными связями, $M_r = M_r^0$, то для распределения (r^*+1) -грамм справедливо соотношение

$$\mu_{J_1^{r^*+1}}(M_{r^*}^*) = \mu_{J_1^{r^*-1}}(M_{r^*}^*) q_{F^*(J_1^{r^*-1}; M_r^0), j_{r^*}} q_{F^*(J_2^{r^*}; M_r^0), j_{r^*+1}}, \quad J_1^{r^*+1} \in A^{r^*+1}.$$

Доказательство. В силу обобщенной формулы умножения вероятностей,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{x_{t+m_1^*-1} = j_1, \dots, x_{t+m_{r^*}^*-1} = j_{r^*}, x_{t+s^*} = j_{r^*+1}\} \\ &= \mathbf{P}\{x_{t+s^*} = j_{r^*+1} \mid x_{t+m_{r^*}^*-1} = j_{r^*}, \dots, x_{t+m_1^*-1} = j_1\} \\ & \quad \times \mathbf{P}\{x_{t+m_{r^*}^*-1} = j_{r^*} \mid x_{t+m_{r^*}^*-1-1} = j_{r^*-1}, \dots, x_{t+m_1^*-1} = j_1\} \\ & \quad \times \mathbf{P}\{x_{t+m_{r^*}^*-1-1} = j_{r^*-1}, \dots, x_{t+m_1^*-1} = j_1\}. \end{aligned}$$

Используя (1), приходим к доказываемому утверждению.

Как следует из лемм 2, 4, 7, теорем 2, 3 и метод подстановки [21], в качестве оценки параметра p можно предложить статистику

$$\tilde{p} = \arg \min_{p \in (1/2, 1]} \Psi(p), \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} 2\Psi(p) &= \sum_{K_1^{r^*+1} \in \Upsilon} (\Gamma_{K_1^{r^*+1}}(p) - \tilde{b}_{K_1^{r^*+1}}(M_{r^*}^*))^2, \quad \Upsilon \subseteq A^{r^*+1}, \\ \Gamma_{K_1^{r^*+1}}(p) &= p^{r^*+1} \sum_{J_1^{r^*+1} \in A^{r^*+1}} \tilde{\mu}_{J_1^{r^*+1}}(M_{r^*}^*) \tilde{q}_{F^*(J_1^{r^*+1}; M_r)}(j_{r^*}) \\ & \quad \times \tilde{q}_{F^*(J_2^{r^*}; M_r), j_{r^*+1}} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{w(J_1^{r^*+1} \oplus K_1^{r^*+1})}, \\ \tilde{\mu}_{J_2^{r^*}}(M_{r^*}^*) &= \left(\frac{p}{2p-1} \right)^{r^*-1} \sum_{K_2^{r^*} \in A^{r^*-1}} \tilde{b}_{K_2^{r^*}}(M_{r^*}^*) \left(\frac{p-1}{p} \right)^{w(J_2^{r^*} \oplus K_2^{r^*})}, \end{aligned}$$

а оценку $\tilde{Q}$ для матрицы Q построить аналогично тому, как это сделано в разделе 4 данной статьи с подстановкой вместо p оценки $\tilde{p}$.

Заметим, что при истинном значении параметров p , Q выполняются равенства

$$\Gamma_{K_1^{r^*+1}}(p) = b_{K_1^{r^*+1}}(M_{r^*}^*), \quad K_1^{r^*+1} \in \Upsilon. \quad (23)$$

Теорема 5. Если x_t — стационарная цепь Маркова с частичными связями, известен шаблон связей M_r^0 , целевая функция в (22) почти наверное имеет лишь один глобальный минимум по $p \in (1/2, 1]$, то при $n \rightarrow \infty$ оценки $\tilde{p}$, $\tilde{Q}$, определяемые (22), являются состоятельными.

Доказательство. Используя лемму 4, теоремы 2, 3 и теорему о функциональном преобразовании сходящихся по вероятности случайных последовательностей [21], получаем требуемый результат.

Следствие 6. Если x_t — стационарная ЦМ($s, 1$), $\Upsilon = \{(0, 0, 0)\}$ — одноточечное множество, $p \neq 1/2$ и

$$\lambda = \frac{\tilde{b}_1(\tilde{b}_{000}\tilde{b}_0 - \tilde{b}_{00}^2)}{\tilde{b}_0(\tilde{b}_{00}^2 + 2\tilde{b}_{00}\tilde{b}_1 - \tilde{b}_{01}\tilde{b}_{10}) - \tilde{b}_{000}} > -\frac{1}{4},$$

где $\tilde{b}_{j_1} = \tilde{b}_{j_1}(M_{r^*}^*)$, $\tilde{b}_{j_1 j_2} = \tilde{b}_{J_1^2}(M_{r^*}^*)$, $\tilde{b}_{j_1 j_2 j_3} = \tilde{b}_{J_1^3}(M_{r^*}^*)$, $M_{r^*}^* = (1, s+1)$, $J_1^3 \in A^3$, то при $n \rightarrow \infty$ состоятельной оценкой вероятности p является статистика

$$\tilde{p} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\lambda}).$$

Доказательство. Для цепи Маркова ЦМ($s, 1$) расширенный шаблон связей $M_{r^*}^*$ равен $(1, s+1)$, $r^* = 2$, поэтому уравнение

$$\Gamma_{K_1^{r^*+1}}(p; \tilde{Q}) = \tilde{b}_{K_1^{r^*+1}}(M_{r^*}^*)$$

принимает более простой вид $p(p-1) = \lambda$ и имеет единственное решение в $(1/2, 1]$. Это приводит к требуемому результату.

Вычисление оценки (22) может быть произведено прямым табулированием целевой функции $\Psi(p)$ по $p \in [1/2, 1]$ с заданным шагом h ; при этом целесообразно установить факт единственности глобального минимума функции $\Psi(p)$.

Отметим также, что в выборе Υ имеется некоторый произвол, позволяющий уменьшать сложность вычислений (22).

Используя минимаксное решающее правило [21], оценки для шаблона M_r^0 , числа связей r и порядка s можно находить с помощью формул (5), (6), в которые вместо оценки условной энтропии $\hat{H}(M_r)$ подставлена оценка $\tilde{H} = \max\{\tilde{H}_x, \tilde{H}_\xi\}$, где

$$\tilde{H}_x = \tilde{H}(M_r) = - \sum_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}} \tilde{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r) \ln \frac{\tilde{\mu}_{J_1^{r+1}}(M_r)}{\tilde{\mu}_{J_1^r}(M_r)},$$

— оценка условной энтропии ЦМ(s, r) x_t и

$$\tilde{H}_\xi = -\tilde{p} \ln \tilde{p} - (1 - \tilde{p}) \ln(1 - \tilde{p})$$

— оценка удельной энтропии последовательности ξ_t , входящей в (7).

Способ II. Этот способ основан на применении ЕМ-подхода [26]. Введем обозначения

$$\begin{aligned}\alpha_{J_1^s}(1) &= \pi_{J_1^s} p^s ((1-p)/p)^{w(J_1^s \oplus K_1^s)}, & \beta_{J_1^s}(n-s+1) &= 1, \\ \alpha_{J_1^s}(t+1) &= \mathbf{P}\{y_1 = k_1, \dots, y_{t+s} = k_{t+s}, x_{t+1} = j_1, \dots, x_{t+s} = j_s\}, \\ \beta_{J_1^s}(t) &= \mathbf{P}\{y_{t+s} = k_{t+s}, \dots, y_n = k_n \mid x_t = j_1, \dots, x_{t+s-1} = j_s\}, \\ \pi_{J_1^{s+1}}(t) &= \mathbf{P}\{x_t = j_1, \dots, x_{t+s} = j_{s+1} \mid y_1 = k_1, \dots, y_n = k_n\},\end{aligned}$$

где $K_1^n \in A^n$ — реализация временного ряда (7), $J_1^{s+1} \in A^{s+1}$, $t = 1, \dots, n-s$.

Получим специальное представление для функции правдоподобия.

Теорема 6. Для любого $t \in \{1, 2, \dots, n-s\}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\alpha_{J_2^{s+1}}(t+1) &= p((1-p)/p)^{k_{t+s} \oplus j_{s+1}} \sum_{j_1 \in A} q_{F(J_1^s; M_r^0), j_{s+1}} \alpha_{J_1^s}(t), \\ \beta_{J_1^s}(t) &= p \sum_{j_{s+1} \in A} q_{F(J_1^s; M_r^0), j_{s+1}} ((1-p)/p)^{k_{t+s} \oplus j_{s+1}} \beta_{J_2^{s+1}}(t+1), \\ \pi_{J_1^{s+1}}(t) &= \frac{p}{L(Q, p)} \alpha_{J_1^s}(t) q_{F(J_1^s; M_r^0), j_{s+1}} ((1-p)/p)^{k_{t+s} \oplus j_{s+1}} \beta_{J_2^{s+1}}(t+1),\end{aligned}$$

где $J_1^{s+1} \in A^{s+1}$.

Доказательство. Прямым вычислением на основе (7) получаем, что

$$\begin{aligned}\alpha_{J_2^{s+1}}(t+1) &= \mathbf{P}\{y_{t+s} = k_{t+s} \mid Y_1^{t+s-1} = K_1^{t+s-1}, X_{t+1}^{t+s} = J_2^{s+1}\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{Y_1^{t+s-1} = K_1^{t+s-1}, X_{t+1}^{t+s} = J_2^{s+1}\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_{t+s} = k_{t+s} \oplus j_{s+1}\} \sum_{j_1 \in A} \mathbf{P}\{Y_1^{t+s-1} = K_1^{t+s-1}, X_t^{t+s} = J_1^{s+1}\}, \\ \beta_{J_1^s}(t) &= \frac{1}{\mathbf{P}\{X_t^{t+s-1} = J_1^s\}} \sum_{j_{s+1} \in A} \mathbf{P}\{Y_{t+s}^n = K_{t+s}^n, X_t^{t+s} = J_1^{s+1}\} \\ &= \sum_{j_{s+1} \in A} \mathbf{P}\{x_{t+s} = j_{s+1} \mid X_t^{t+s-1} = J_1^s\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{y_{t+s} = k_{t+s} \mid X_t^{t+s} = J_1^{s+1}\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{Y_{t+s+1}^n = K_{t+s+1}^n \mid y_{t+s} = k_{t+s}, X_t^{t+s} = J_1^{s+1}\}, \\ \pi_{J_1^{s+1}}(t) &= \frac{1}{\mathbf{P}\{Y_1^n = K_1^n\}} \mathbf{P}\{Y_1^{t+s-1} = K_1^{t+s-1}, X_t^{t+s-1} = J_1^s\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{x_{t+s} = j_{s+1} \mid X_t^{t+s-1} = J_1^s, Y_1^{t+s-1} = K_1^{t+s-1}\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{y_{t+s} = k_{t+s} \mid X_t^{t+s} = J_1^{s+1}, Y_1^{t+s-1} = K_1^{t+s-1}\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{Y_{t+s+1}^n = K_{t+s+1}^n \mid X_t^{t+s} = J_1^{s+1}, Y_1^{t+s} = K_1^{t+s}\},\end{aligned}$$

откуда следуют доказываемые соотношения.

Функцию правдоподобия $L(Q, p)$, определенную в лемме 3, можно вычислить по

формуле

$$\begin{aligned}
 L(Q, p) &= \sum_{J_1^s \in A^s} \mathbf{P}\{Y_1^n = K_1^n, X_t^{t+s-1} = J_1^s\} \\
 &= \sum_{J_1^s \in A^s} \mathbf{P}\{Y_1^{t+s-1} = K_1^{t+s-1}, X_t^{t+s-1} = J_1^s\} \\
 &\quad \times \mathbf{P}\{Y_{t+s}^n = K_{t+s}^n \mid Y_1^{t+s-1} = K_1^{t+s-1}, X_t^{t+s-1} = J_1^s\} \\
 &= \sum_{J_1^s \in A^s} \alpha_{J_1^s}(t) \beta_{J_1^s}(t), t \in \{1, 2, \dots, n-s+1\}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Аналогичный подход для вычисления функции правдоподобия использовался в работах [12, 13].

На основании теоремы 6 строится алгоритм оценивания параметров модели (7).

- (1) Выбираем начальные значения $Q^{(0)}$, $p^{(0)}$ и по (24) вычисляем $L^{(0)} = L(Q^{(0)}, p^{(0)})$; целесообразно использовать матрицу

$$Q^{(0)} = (\tilde{b}_{J_1^{r+1}}(M_r^0) / \tilde{b}_{J_1^r}(M_r^0))_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}}.$$

- (2) Пусть для $i \geq 0$ известны приближения i -го шага $Q^{(i)}$, $p^{(i)}$, тогда находим

$$\begin{aligned}
 q_{J_1^{r+1}}^{(i+1)} &= \mu_{J_1^{r+1}}^{(i)}(M_r^0 / \mu_{J_1^r}^{(i)}(M_r^0), \\
 p^{(i+1)} &= \sum_{t=1}^{n-s} \sum_{I_1^s \in A^s} \pi_{I_1^s, k_{t+s}}^{(i)}(t) / (n-s),
 \end{aligned}$$

где

$$\mu_{J_1^{r+1}}^{(i)}(M_r^0) = \sum_{t=1}^{n-s} \sum_{I_1^s \in A^s} \delta_{F(I_1^s; M_r^0), J_1^r} \pi_{I_1^s, j_{r+1}}^{(i)}(t).$$

Затем согласно (24) вычисляем значение функции $L^{(i+1)} = L(Q^{(i+1)}, p^{(i+1)})$.

- (3) Если $L^{(i+1)} - L^{(i)} < \varepsilon$, то “останов” и $\tilde{Q} = Q^{(i+1)}$, $\tilde{p} = p^{(i+1)}$, иначе возвращаемся к шагу 2 при $i = i + 1$; $\varepsilon > 0$ — параметр “останова” итерационного процесса.

Заметим, что величины $\alpha_{J_1^s}(t)$, $\beta_{J_1^s}(t)$, $\pi_{J_1^{s+1}}(t)$ могут достигать значения столь близкие к нулю, что их нельзя обрабатывать на компьютере. Для преодоления этой трудности предлагается проводить нормировку указанных величин [13].

Способ II на основе ЕМ-подхода по сравнению со способом I имеет два недостатка: увеличение порядка s цепи Маркова с частичными связями ведет к экспоненциальному росту времени работы алгоритма оценивания параметров $O(n2^s)$; отсутствуют теоретические результаты о состоятельности и несмещенности оценок.

Таблица 1. Зависимость оценки $\Delta_n(\tilde{p})$ от длительности наблюдения

$n \cdot 10^{-6}$	10	15	20	25	30	35	40
$p = 0,675$	0,00808	0,00629	0,00535	0,00462	0,00418	0,00386	0,00354
$p = 0,705$	0,00358	0,00280	0,00232	0,00199	0,00175	0,00156	0,00142

Таблица 2. Зависимость оценок $\Delta_n(\tilde{p})$, γ от n

$n \cdot 10^{-4}$	10	15	20	25	30	35	40
$\Delta_n(\tilde{p})$	0.0092	0.0072	0.0064	0.0060	0.0051	0.0043	0.0043
γ	0.3125	0.1964	0.1399	0.1161	0.0625	0.0357	0.0446

6. Результаты компьютерных экспериментов

Пример 1. Исследовалась двоичная цепь Маркова ЦМ(256, 3) с шаблоном $M_r^0 = (1, 7, 90)$ и матрицей Q (в транспонированной форме)

$$Q' = \begin{pmatrix} 0,279 & 0,758 & 0,364 & 0,882 & 0,415 & 0,656 & 0,707 & 0,324 \\ 0,721 & 0,242 & 0,636 & 0,118 & 0,585 & 0,344 & 0,293 & 0,676 \end{pmatrix}$$

при наличии аддитивных искажений (7) с параметром $p \in \{0,675, 0,705\}$.

В табл. 1 представлена зависимость экспериментального значения $\Delta_n(\tilde{p}) = \mathbf{E}\{|\tilde{p} - p|\}$ отклонения оценки $\tilde{p}$, найденной способом I (при $h = 10^{-3}$), от длительности наблюдения n . Компьютерное моделирование проводилось по методу Монте-Карло (при числе прогонов, равном 10^3).

На рис. 1 представлена зависимость среднеквадратической ошибки оценивания матрицы Q от длительности наблюдения n (a — экспериментальные значения $\Delta_n(\tilde{Q})$ и 99% доверительные границы при неизвестном $p = 0,675$; b — экспериментальные, теоретические значения среднеквадратической ошибки оценивания (17) и 99% доверительные границы при известном $p = 0,675$; c — экспериментальные, теоретические значения среднеквадратической ошибки оценивания (17) и 99% доверительные границы при известном $p = 0,705$). Экспериментальные значения среднеквадратической ошибки оценивания получены с помощью компьютерного моделирования по методу Монте-Карло.

Из рассмотренного примера видно, что экспериментальные значения среднеквадратической ошибки оценивания согласуются с теоретическими (17); чем ближе параметр p к $1/2$, тем ниже точность идентификации цепи Маркова при наличии искажений.

Для оценивания параметра p матрицы Q по одной реализации длительности $n = 30 \cdot 10^6$ на Intel Celeron CPU 1.70GHz затрачивалось примерно 13,43 с.

Пример 2. Исследовалась двоичная цепь Маркова ЦМ(32, 3) с шаблоном $M_r^0 = (1, 4, 27)$ и матрицей Q (в транспонированной форме)

$$Q' = \begin{pmatrix} 0,649 & 0,881 & 0,195 & 0,731 & 0,395 & 0,695 & 0,304 & 0,642 \\ 0,351 & 0,119 & 0,805 & 0,269 & 0,605 & 0,305 & 0,696 & 0,358 \end{pmatrix}$$

при наличии аддитивных искажений (7) с параметром $p = 0,75$. В предположении, что p и M_r^0 неизвестны, исследовалась зависимость экспериментальных значений $\Delta_n(\tilde{p})$, $\gamma = \mathbf{P}\{\tilde{M}_r \neq M_r^0\}$, найденных методом Монте-Карло (при числе прогонов, равном 10^3). Численные результаты, представленные в табл. 2, демонстрируют состоятельность оценки $\tilde{p}$, найденной первым способом при $h = (1/2) \cdot 10^{-2}$, и оценки $\tilde{M}_r$, построенной с помощью минимаксного решающего правила.

Рис. 1. Зависимость среднеквадратической ошибки оценивания от длительности наблюдения

Таблица 3. Зависимость оценок $\Delta_n(\tilde{p})$, $\Delta_n(\tilde{Q})$ от n

$n \cdot 10^{-4}$		1	2	3	4	5	6	7
$\Delta_n(\tilde{p})$	I	0.0336	0.0220	0.0190	0.0159	0.0145	0.0131	0.0127
	II	0.0795	0.0710	0.0566	0.0450	0.0342	0.0283	0.0250
$\Delta_n(\tilde{Q})$	I	0.0340	0.0174	0.0124	0.0095	0.0076	0.0064	0.0061
	II	0.0743	0.0626	0.0458	0.0324	0.0205	0.0148	0.0118

Пример 3. Для двоичной цепи Маркова ЦМ(6, 2) с шаблоном $M_r^0 = (1, 6)$ и матрицей Q (в транспонированной форме)

$$Q = \begin{pmatrix} 0,398 & 0,714 & 0,656 & 0,183 \\ 0,602 & 0,286 & 0,344 & 0,817 \end{pmatrix}$$

при наличии аддитивных искажений (7) с параметром $p = 0,825$ исследована точность оценок $\tilde{p}$, $\tilde{Q}$, найденных двумя способами (способы I, II). В табл. 3 представлена зависимость экспериментальных значений $\Delta_n(\tilde{p})$, $\Delta_n(\tilde{Q})$, найденных методом Монте-Карло (при числе прогонов, равном 250), от длительности наблюдения n при $h = 10^{-3}$ для способа I, $p^{(0)} = 0,9$ и $\varepsilon = 0,1$ для способа II.

Полученные экспериментальные результаты иллюстрируют два факта:

- (1) состоятельность оценок $\tilde{p}$, $\tilde{Q}$;
- (2) способ I более точно оценивает параметры, чем способ II на основе ЕМ-подхода.

Авторы глубоко благодарны А. М. Зубкову за уточнения постановок задач и замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Список литературы

1. Алферов А. П., Зубов А. Ю., Кузьмин А. С., Черемушкин А. В., *Основы криптографии*. Гелиос, Москва, 2001.
2. Дуб Дж., *Вероятностные процессы*. ИЛ, Москва, 1956.
3. Зубков А. М., Датчики псевдослучайных чисел и их применения. В сб.: *Труды II Международной научной конф. «Математика и безопасность информационных технологий»*. Изд-во МГУ, Москва, 2003, с. 200–206.
4. Харин Ю. С., Берник В. И., Матвеев Г. В., Агиевич С. В., *Математические и компьютерные основы криптологии*. Новое знание, Минск, 2003.
5. Максимов Ю. И., О цепях Маркова, связанных с двоичными регистрами сдвига со случайными элементами. *Труды по дискретной математике* (1997) **1**, 203–220.
6. Jacobs P. A., Lewis P. A. W., Discrete time series generated by mixtures. I: Correlational and runs properties. *J. Royal Stat. Soc., Ser. B* (1978) **40**, 94–105.
7. Raftery A. E., A model for high-order Markov chains. *J. Royal Statist. Soc.* (1985) **47**, 528–539.
8. Bühlmann P., Wyner A., Variable length Markov chains. *Ann. Stat.* (1999) **27**, №2, 480–513.
9. Харин Ю. С., Цепи Маркова с r -частичными связями и их статистическое оценивание. *Докл. НАН Беларуси* (2004) **48**, №1, 40–44.
10. Харин Ю. С., Петлицкий А. И., Цепь Маркова s -го порядка с r частичными связями и статистические выводы о ее параметрах. *Дискретная математика* (2007) **19**, №2, 109–130.
11. Sugimoto S., Ishizuka I., Identification and estimation algorithms for a Markov chain plus AR process. *Proc. IEEE ICASSP'83* **8**, 247–250.
12. Rabiner L. R., A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. *Proc. IEEE* (1989) **77**, 257–286.
13. Berchtold A., The double chain Markov model. *Commun. Stat., Theory Methods* (1999) **28**, №11, 2569–2589.
14. Кемени Дж. Г., Снелл Дж. Л., *Конечные цепи Маркова*. Наука, Москва, 1970.
15. Харин Ю. С., Петлицкий А. И., Об оценивании порядка цепи Маркова с частичными связями. В сб.: *Труды ИСТ'2006*, **1**, с. 156–161.
16. Csiszar I., Shields P. C., The consistency of the BIC Markov order estimator. *Ann. Stat.* (2000) **28**, №6, 1601–1619.
17. Петлицкий А. И., Харин Ю. С., Статистический анализ двоичной цепи Маркова с частичными связями при наличии аддитивных искажений. *Весці НАН Беларусі, Сер. фіз.-мат. навук* (2008) №4, 30–36.
18. Ширяев А. Н., *Вероятность*. Наука, Москва, 1989.
19. Bradley R. C., Basic properties of strong mixing conditions. A survey and some open questions. *Probab. Surv.* (2005) **2**, 107–144.
20. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., *Независимые и стационарно связанные величины*. Наука, Москва, 1965.
21. Боровков А. А., *Математическая статистика*. Наука, Москва, 1984.
22. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. Наука, Москва, 1966.
23. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., *Математическая статистика*. Высшая школа, Москва, 1984.
24. Большев Л. Н., Смирнов Н. В., *Таблицы математической статистики*. Наука, Москва, 1983.
25. Самарский А. А., Гулин А. В., *Численные методы*. Наука, Москва, 1989.
26. Gourieroux C., Monfort A., *Statistics and econometric models: General concepts, estimation, prediction, and algorithms*, **1**. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.