Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, Асимптотика числа неповторных булевых функций в базисе B_1 , *Дискрет. матем.*, 2010, том 22, выпуск 4, 156–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 05:46:55

Асимптотика числа неповторных булевых функций в базисе B_1

© 2010 г. В. А. Воблый

Для числа S_n неповторных булевых функций от n переменных в базисе B_1 доказано, что при $n \rightarrow \infty$

$$S_n \sim cn^{-3/2} \alpha^n n!,$$

где c и α — константы.

Пусть S_n — число неповторных булевых функций от n переменных в базисе B_1 . В [1] получено рекуррентное соотношение

$$S_n = 3S_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{n-1} \left(S_i + S_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j-1} S_j S_{i-j} \right) S_{n-i}.$$

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$

$$S_n \sim cn^{-3/2} \alpha^n n!, \quad \alpha = (\ln(1 + \sqrt{5}/2) + (1 - \sqrt{5})/2)^{-1} = 7,5498 \dots$$

Доказательство. Введем производящую функцию

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n (x^n / n!).$$

Разностное уравнение для S_n равносильно следующему уравнению для $S(x)$:

$$x(S'(x) - 2) = 3xS(x) + xS'(x)S(x) + xS^2(x) + xS'(x)S^2(x).$$

Решая это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, находим, что

$$x = \ln(1 + S(x)) + \ln(1 + S(x)/2) - S(x).$$

Разлагая логарифм в окрестности точки 0, получаем сходящийся ряд

$$x = \frac{1}{2}S - \frac{5}{8}S^2 + \dots$$

Обращая этот ряд с помощью формулы обращения Лагранжа (см. с. 419 в [2]), получаем, что

$$\frac{S_n}{n!} = \frac{1}{2\pi i n} \oint \frac{dz}{(\ln(1+z) + \ln(1+z/2) - z)^n}.$$

Применим теперь метод перевала для получения асимптотики S_b при $n \rightarrow \infty$. Пусть

$$I(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{nf(z)} dz, \quad f(z) = \ln(\ln(1+z) + \ln(1+z/2) - z),$$

тогда

$$S_n = (n-1)! I(n).$$

Так как $f'(z) = 0$ при $z^2 + z + 1 = 0$, существуют две точки перевала $z = -(1 + \sqrt{5})/2$ и $z = -(\sqrt{5} - 1)/2$. Поскольку $f''(z_1) \neq 0$ и $f''(z_2) \neq 0$, обе точки являются простыми точками перевала, и асимптотика интеграла $I(n)$ при $n \rightarrow \infty$ дается формулой (см. с. 480 в [2])

$$I(n) \sim \frac{c}{\sqrt{n}} (e^{nf(z_1)} + e^{nf(z_2)}).$$

Вычисляя значения $e^{f(z)}$ в точках перевала, находим, что

$$\alpha = e^{f(z_2)} \sim 7,5,$$

$$\beta = e^{f(z_1)} \sim 0,31,$$

таким образом, вклад в асимптотику первой точки перевала экспоненциально мал по сравнению с вкладом второй точки перевала.

Теорема доказана.

Автор благодарит В. К. Леонтьева за постановку задачи.

Список литературы

1. Винокуров С. Ф., Перязев Н. А., *Избранные вопросы теории булевых функций*. Физматлит, Москва, 2001..
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. М., *Методы теории функций комплексного переменного*. Наука, Москва, 1965.

Статья поступила 18.11.2009.