Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Чистиков, О связи задач диагностического и проверяющего тестирования бесповторных функций, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 1, 46–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 08:54:19

О связи задач диагностического и проверяющего тестирования бесповторных функций

© 2011 г. Д. В. Чистиков

Рассматривается задача построения условного диагностического теста для бесповторных функций в произвольном базисе с помощью запросов значения функции в точке и запросов проверки произвольной подфункции на тождественное равенство постоянной. Устанавливается связь этой задачи с родственной задачей проверяющего тестирования, доказывается ее полиномиальная разрешимость для широкого класса булевых функций.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 г.

Рассмотрим классическую задачу условного диагностического тестирования (расшифровки) для булевых функций, представимых формулами над множеством $\mathcal{B}$ без повторения символов переменных, бесповторных в базисе $\mathcal{B}$ функций. Требуется построить алгоритм, который, задавая вопросы о значениях неизвестной (находящейся в черном ящике) бесповторной в $\mathcal{B}$ функции $f(x_1, \dots, x_n)$, идентифицирует эту функцию. Под сложностью алгоритма при этом понимается задаваемое им число вопросов в худшем случае.

Предполагается, что алгоритмы обладают возможностью получать правильные ответы на вопросы следующих естественных типов:

- (1) каково значение f на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$?
- (2) однозначно ли определено значение f , если известны лишь значения некоторых переменных $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k} \in \{0, 1\}$?

Показывается, что в такой постановке задача диагностического тестирования для бесповторных функций является невырожденной и полиномиально разрешимой (относительно числа переменных n неизвестной функции) для широкого класса базисов, включая элементарный. Устанавливается, что достаточным условием полиномиальной разрешимости в случае произвольного конечного базиса $\mathcal{B}$ является полиномиальная разрешимость (в смысле функции Шеннона) соответствующей задачи проверяющего тестирования с использованием вопросов только типа (1).

Сделаем вначале несколько замечаний по поводу задачи диагностики с использованием только запросов значения функции в точке. Уже в случае элементарного базиса $\{\&, \vee, \neg\}$ такая постановка оказывается вырожденной: чтобы определить, какая из конъюнкций n переменных находится в черном ящике, требуется задать (в худшем случае) не

менее $2^n - 1$ вопросов. Уход от рассмотрения немонотонных функций приводит к базису $\{\&, \vee\}$, для которого алгоритм расшифровки сложности $O(n^2)$ был построен в [1].

Одна из невырожденных постановок для случая произвольного базиса изучалась в рамках вычислительной теории обучения (computational learning theory). Использовалась классическая модель Д. Англиун [2], расширяющая возможности распознающего функцию алгоритма и позволяющая выполнять (в дополнение к запросам значения функции в точке — точечным запросам) запросы эквивалентности, то есть вопросы вида: верно ли, что неизвестная функция выражается бесповторной (в данном случае) формулой $\mathcal{G}$? Ответ на этот запрос — либо да, либо контрпример (такой входной набор x , что $f(x) \neq g(x)$, где g — функция, реализуемая формулой $\mathcal{G}$)

Отметим, что возможная интерпретация различных видов запросов заключается в том, что алгоритм расшифровки может взаимодействовать с одним или несколькими оракулами — специальными агентами, каждый из которых обладает возможностью отвечать на вопросы одного конкретного типа. Данная трактовка восходит к классической работе [4].

Другой подход к построению невырожденной постановки, также связанный с расширением доступного алгоритму арсенала запросов, предполагает обращение к подкубам булева куба $\{0, 1\}^n$ или, что то же самое, к подфункциям неизвестной функции f . В работе [5] изучались возможности алгоритмов, запрашивающих сумму по модулю 2 всех значений функции на произвольном подкубе. Такие запросы, в отличие от запросов эквивалентности, являются обобщением стандартных запросов значения функции в точке. В работе показано, что при наличии информации о существенности переменных f в случае элементарного базиса $\{\&, \vee, \neg\}$ для диагностики достаточно $n^2 - n + 1$ запросов, причем любое расширение базиса приводит к экспоненциально сложной постановке. Принципиальная необходимость использования информации о существенности переменных обоснована в работе [6], где доказано, что отсутствие такого требования также приводит к задаче экспоненциальной сложности.

В работе [6] предложены также другие варианты обобщения стандартных точечных запросов, один из которых (с точностью до переобозначений) и рассматривается в настоящей статье. Этот вопрос в случае ненулевой размерности возвращает 1, если f в данном подкубе тождественно равна некоторой константе, и 0 в противном случае. Пара запросов, эквивалентная запросу данного типа, вводилась еще в работе [4]. Определенные так запросы естественно называть запросами тождественности: они дают возможность получать ответы на вопросы определенных выше типов 1 и 2.

В настоящей статье доказывается, что для произвольного конечного базиса достаточным условием полиномиальной разрешимости задачи условного диагностического тестирования с запросами тождественности является полиномиальная разрешимость родственной задачи проверяющего тестирования. Особо отметим, что в отличие от описанной выше похожей постановки с запросами суммы по модулю 2 априорной информации о существенности переменных при этом не требуется. Предлагаемое доказательство основывается на полиномиальном алгоритме из [3], использующем точечные запросы и запросы эквивалентности, логически это означает, что существенным образом используется также полиномиальная разрешимость соответствующей диагностики для произвольного конечного базиса в классической модели Англиун.

Невырожденная постановка задачи проверяющего тестирования для бесповторных функций — тестирование относительно бесповторной альтернативы — была впервые описана в работе А. А. Вороненко [7]: для бесповторной в базисе $\mathcal{B}$ функции $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящей от всех своих переменных, требуется построить проверяющий тест — множество наборов, отличающих f от всех остальных бесповторных в $\mathcal{B}$ функций тех же переменных. Отметим, что и здесь невырожденность определяется наличием

априорной информации о существенности переменных функции f . Данная постановка исследовалась в различных базисах, причем изучались как тесты для индивидуальных функций, так и подходы к определению значений функции Шеннона $C_{\mathfrak{B}}(n)$ — минимального числа наборов, достаточного для тестирования (проверки) всякой бесповторной функции n переменных.

В настоящей статье устанавливается специальная верхняя оценка величины $D_{\mathfrak{B}}(n)$ — минимальной сложности условного диагностического теста (алгоритма расшифровки) для бесповторных в базисе $\mathfrak{B}$ функций n переменных. Под сложностью при этом понимается выполняемое алгоритмом число запросов в худшем случае, причем доступными являются только запросы тождественности. Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Для любого конечного базиса $\mathfrak{B}$ величины $C_{\mathfrak{B}}(n)$ и $D_{\mathfrak{B}}(n)$ связаны соотношением*

$$D_{\mathfrak{B}}(n) \leq 2nC_{\mathfrak{B}}(n) + O(n^{l+2}),$$

где l — максимальная арность функций из $\mathfrak{B}$.

Ясно, что если $C_{\mathfrak{B}}(n)$ растет не быстрее некоторого полинома от n , то и $D_{\mathfrak{B}}(n)$ ограничена полиномом, то есть рассматриваемая задача условного диагностического тестирования полиномиально разрешима. Опишем известные достаточные условия полиномиальности функции Шеннона для задачи проверяющего тестирования. В [7, 8] разработан метод, позволяющий восстанавливать бесповторную функцию по ее значениям на наборах множества гиперкубов существенности — специального множества мощности $O(n^l)$, где n — число переменных восстанавливаемой (тестируемой) функции, l — максимальная арность функции из $\mathfrak{B}$. Показано, что множество гиперкубов существенности является проверяющим тестом для всякой функции, выражаемой бесповторной формулой над $\mathfrak{B}$ без символов так называемых дискриминирующих функций арности $l - 2$ и менее (функция переменных X называется дискриминирующей, если найдется такое собственное подмножество $X' \subset X$, $X' \neq X$, что каждая из остаточных подфункций переменных X' имеет хотя бы одну фиктивную переменную). Из последнего факта и того, что все дискриминирующие функции существенно зависят от трех и более переменных, следует, что если базис $\mathfrak{B}$ состоит только из функций арности $l \leq 4$, то метод гиперкубов существенности дает проверяющие тесты длины $O(n^l)$ для всех бесповторных в $\mathfrak{B}$ функций. В работе [9] этот результат распространен на случай произвольного базиса с $l = 5$. Предположение о справедливости этого факта для любого конечного базиса $\mathfrak{B}$ было названо гипотезой гиперкуба. Выполнение этой гипотезы для базиса $\mathfrak{B}$, не содержащего функций арности более l , означает, в частности, что $C_{\mathfrak{B}} = O(n^l)$. Таким образом, на данный момент можно говорить о том, что все условия сформулированной выше теоремы выполнены, например, в случаях, описываемых следующим утверждением.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{B}$ — конечный базис, не содержащий либо дискриминирующих функций, либо функций арности 6 и более. Тогда бесповторные в $\mathfrak{B}$ функции допускают расшифровку полиномиальным числом запросов тождественности.*

Перейдем теперь к доказательству анонсированного результата. Сформулируем и докажем лемму о моделировании запроса эквивалентности с помощью запросов тождественности.

Лемма 1. *Для любого конечного базиса $\mathfrak{B}$ произвольный запрос эквивалентности моделируется не более, чем $2C_{\mathfrak{B}}(n) + O(n)$ запросами тождественности.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция, находящаяся в черном ящике, а g — функция, реализуемая формулой $\mathcal{G}$ — параметром запроса эквивалентности. Для моделирования необходимо установить, выполняется ли соотношение $f \equiv g$, и если это так, возвратить ответ «да», в противном случае предоставить контрпример y — такой входной набор, что $f(y) \neq g(y)$.

Воспользуемся тем, что функция g бесповторна в базисе $\mathfrak{B}$. Обозначим символом g' функцию, получаемую из g удалением всех ее фиктивных переменных. Согласно определению функции Шеннона, g' допускает проверяющий тест T' длины, (мощности) не более $C_{\mathfrak{B}}(n)$. Зафиксируем произвольные значения фиктивных переменных g и, расширив наборы теста T' этими значениями, получим некоторую таблицу T точечных запросов. Прдемонстрируем, как можно использовать T для моделирования запроса эквивалентности.

Выполним вначале точечные запросы для каждого набора из T . Если при каком-либо x результат запроса $f(x)$ не совпадает с $g(x)$, то x — искомый контрпример и моделирование завершается. В противном случае, поскольку T' — проверяющий тест, мы приходим к выводу, что функция g' совпадает с соответствующей подфункцией f' функции f . Рассмотрим этот случай подробнее.

Необходимо проверить справедливость равенства $f(x) = g(x)$ для всех x . Для каждого набора x' из T' выполним запрос тождественности, обращенный к подкубу, задаваемому этим набором (существенные переменные g фиксируются значениями из x' , фиктивные остаются свободными). Если все такие запросы возвратят 1, то все соответствующие подфункции — константы. Таким образом, в этом случае g' совпадает со всевозможными подфункциями функции f , получающимися подстановками констант на места всех фиктивных переменных g , поэтому моделирование завершается ответом «да». Заметим, что до сих пор было выполнено не более чем $2C_{\mathfrak{B}}(n)$ запросов.

Предположим теперь, что запрос тождественности для некоторого подкуба возвратил 0. Найдем в этом случае такой набор y , что $f(y) \neq g(y)$. Если обнаруженный нами подкуб с неконстантной остаточной подфункцией имеет размерность 1, то для поиска y достаточно одного точечного запроса. В противном случае поделим этот подкуб на два подкуба меньшей размерности и выполним запросы к этим подкубам. Если оба эти запроса вернут 1, то запрос значения f на любом из этих подкубов определит, какой из них целиком состоит из искомых контрпримеров. Если же хотя бы один из запросов к этим двум подкубам вернет 0, то продолжим процесс деления пополам для этого подкуба. Нетрудно видеть, что вся процедура поиска y требует $O(n)$ запросов, а моделирование в целом — не более $2C_{\mathfrak{B}}(n) + O(n)$ запросов, что и требовалось доказать.

Из леммы, в частности, следует, что если для конечного базиса $\mathfrak{B}$ верна гипотеза гиперкуба, то запрос эквивалентности можно промоделировать $O(n^l)$ запросами тождественности, где l — максимальная арность функций из $\mathfrak{B}$. Отметим, что в вырожденном случае $l = 0$, так что запрос эквивалентности моделируется одним точечным запросом. Докажем, используя лемму, сформулированную выше теорему.

Доказательство теоремы 1. Применение леммы к алгоритму расшифровки из [3], использующему $O(n^{l+2})$ точечных запросов и n запросов эквивалентности, дает необходимый алгоритм. Число выполненных запросов не превосходит величины

$$n(2C_{\mathfrak{B}}(n) + O(n)) + O(n^{l+2}) = 2n(C_{\mathfrak{B}}(n) + O(n^{l+2})),$$

и из подкубов ненулевой размерности обращаются не более, чем к $n(C_{\mathfrak{B}}(n) + O(n^2))$ из них. Теорема доказана.

Итак, если $\mathfrak{B}$ — конечный базис, для которого верна гипотеза гиперкуба, то задача условного диагностического тестирования (расшифровки) для бесповторных в $\mathfrak{B}$ функций допускает решение алгоритмом, выполняющим $O(n^{l+2})$ запросов тождественности, где l — максимальная арифность функций из $\mathfrak{B}$, что и приводит нас к утверждению следствия. В общем случае, если $S_{\mathfrak{B}(n)}(n) = O(n^k)$, то справедливо соотношение $D_{\mathfrak{B}}(n) = O(n^{\max\{k+1, l+2\}})$, а к подкубам нулевой размерности обращается не более $O^{\max\{k+1, 2\}}$ запросов.

В заключение отметим, что мы могли бы определить запрос тождественности не как обобщение точечного запроса, а несколько иначе: положить возвращаемое значение равным 1 для любого подкуба размерности 0 (точки булева куба). В этом случае естественно было бы разрешить алгоритмам использовать также стандартные запросы значения функции в точке, при этом техника моделирования осталась бы прежней, а основные полученные результаты сохранили бы справедливость с соответствующими уточнениями формулировок.

Список литературы

1. Angluin D., Hellerstein L., Karpinski M., Learning read-once functions with queries. *J. ASM* (1993) **40**, 185–210.
2. Angluin D., Queries and concept learning. *Machine Learning* (1987) **2**, 319–342.
3. Bshouty N. H., Hancock T. R., Hellerstein L., Learning Boolean read-once formulas over generalized bases. *J. Comput. Syst. Sci.* (1995) **50**, №3, 521–542.
4. Valiant L. G., A theory of the learnable. *Comm. ACM* (1984) **27**, 1134–1142.
5. Вороненко А. А., Чистиков Д. В., Расшифровка бесповторных функций оракулом — счетчиком четности. *Прикладная математика и информатика* (2010) **34**, 93–106.
6. Вороненко А. А., О задачах глобального тестирования (расшифровки) бесповторных булевых функций. В сб.: *Материалы III Российской школы-семинара «Синтаксис и семантика логических систем»*. Изд-во ГОУ ВПО «Восточно-Сибирская государственная академия образования», Иркутск, 2010, с. 17–22.
7. Вороненко А. А., О проверяющих тестах для бесповторных функций. *Математические вопросы кибернетики* (2002) **11**, 163–176.
8. Вороненко А. А., Распознавание бесповторности в произвольном базисе. *Прикладная математика и информатика* (2006) **23**, 67–84.
9. Вороненко А. А., Чистиков Д. В., О тестировании бесповторных булевых функций в базисе B_5 . В сб.: *Материалы XVII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*. ИМСО РАН, Новосибирск, 2008, с. 24–30.

Статья поступила 15.11.2010.