Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, Н. М. Меженная, Оценки для вероятности
плотного вложения одной дискретной последовательности
в другую, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 3, 19–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:31:50

Оценки для вероятности плотного вложения одной дискретной последовательности в другую

© 2005 г. В. Г. Михайлов, Н. М. Меженная

Получены верхняя и нижняя оценки для вероятности того, что заданная последовательность X конечной длины из знаков конечного алфавита встретится в случайной равновероятной последовательности Y знаков того же алфавита как подпоследовательность, члены которой разделены в Y не более, чем одним знаком. Указаны последовательности X , на которых достигаются эти оценки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 02-01-00266 и 05.01.00035, и программы Президента Российской Федерации государственной поддержки ведущих научных школ, проект НШ-1758.2003.1.

1. Введение

Пусть $X_n = \{x_i\}_{i=1}^n$ и $Y_m = \{y_i\}_{i=1}^m$ — последовательности знаков алфавита $A_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$. Согласно [1] последовательность X_n плотно вкладывается в начало последовательности Y_m , если $n \leq m$ и найдутся такие натуральные числа

$$1 = j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq m, \quad j_{k+1} - j_k \in \{1, 2\}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (1)$$

что $x_k = y_{j_k}$, $k = 1, \dots, n$ (в этом случае будем говорить, что k -й знак последовательности X_n вставлен в Y_m на j_k -м месте).

В работе [1] была получена оценка сверху для вероятности $P_m(X_n)$ плотного вложения последовательности X_n в последовательность $Y_m = \{y_i\}_{i=1}^m$ независимых случайных величин, распределенных равномерно на множестве A_2 . В настоящей заметке получено обобщение этого результата на случай конечного алфавита A_N с произвольным числом букв, показано, что эта верхняя оценка неулучшаема. Построена также неулучшаемая оценка снизу для вероятности $P_m(X_n)$. Основной результат работы следующий.

Теорема 1. Пусть знаки последовательности $Y_m = \{y_i\}_{i=1}^m$ распределены на множестве A_N независимо и равномерно. Тогда

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k=0}^{m-n} \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k \leq P_m(X_n) \leq P_{2n}(X_n), \quad (2)$$

если $n \leq m < 2n$, и

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{2n-1}} (2N-1)^{n-1} &\leq P_m(X_n) = P_{2n}(X_n) \\ &\leq \frac{1}{2N^{2n}} ((N - \sqrt{N^2 - N})^n + (N + \sqrt{N^2 - N})^n), \end{aligned} \quad (3)$$

если $2n \leq m$.

Верхние оценки в этой теореме при $N = 2$ совпадают с оценками работы [1]. Эти оценки при $m = 2n$ достигаются на последовательностях X_n , в которых нет совпадений соседних букв. Нижние оценки достигаются на последовательностях X_n , составленных из n одинаковых букв.

2. Доказательство верхних оценок

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся дополнительные определения. Будем говорить, что последовательность $X_n = \{x_i\}_{i=1}^n$ может быть плотно вложена во всю последовательность $Y_m = \{y_i\}_{i=1}^m$, если помимо (1) выполняется соотношение $m - j_n \in \{1, 2\}$ (в этом случае будем использовать обозначение $X_n \rightarrow Y_m$). При этом, естественно, $x_n = y_{m-1}$ или $x_n = y_m$. Если при плотном вложении X_n в Y_m знак x_n вкладывается на m -е место последовательности Y_m , то будем говорить, что последовательность X_n может быть плотно вложена в последовательность Y_m с двумя прикрепленными концами (в этом случае используем обозначение $X_n \Rightarrow Y_m$).

Сначала рассмотрим случай $m \geq 2n$. В этом случае только первые $2n - 1$ символов последовательности $\{y_i\}_{i=1}^m$ должны учитываться при вложении, а остальные могут быть произвольными. Значит,

$$P_m(X_n) = \dots = P_{2n}(X_n) = P_{2n-1}(X_n).$$

При построении верхней оценки удобно взять $m = 2n$.

Пусть

$$B_{n,k,0}(X_n) = |\{Y_{n+k}: X_n \Rightarrow Y_{n+k}\}|$$

— число таких последовательностей Y_{n+k} длины $n+k$, что X_n может быть плотно вложена в Y_{n+k} с двумя прикрепленными концами, а

$$B_{n,k,1}(X_n) = |\{Y_{n+k}: X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_n \not\Rightarrow Y_{n+k}\}|$$

— число таких последовательностей Y_{n+k} длины $n+k$, что X_n может быть плотно вложена в Y_{n+k-1} с двумя прикрепленными концами, но не может быть вложена с двумя прикрепленными концами в Y_{n+k} . При этом считаем, что $B_{n,k,i}(X_n) = 0$, $i = 0, 1$, если $k < 0$ или $k > n$.

При небольших значениях n величина $B_{n,k,i}(X_n)$ легко вычисляется исходя из определения. Например, при $n = 1$

$$B_{1,0,0}(X_1) = |\{Y_1: X_1 \Rightarrow Y_1\}| = |\{Y_1: X_1 = Y_1\}| = 1,$$

$$B_{1,0,1}(X_1) = |\{Y_0: X_1 \Rightarrow Y_0\}| = 0,$$

$$B_{1,1,0}(X_1) = |\{Y_2: X_1 \Rightarrow Y_2\}| = 0,$$

$$B_{1,1,1}(X_1) = |\{Y_2: X_1 \Rightarrow Y_1, X_1 \not\Rightarrow Y_2\}| = |\{x_1 = y_1, y_2 \in A_N\}| = N.$$

Теорема 2. Для любой последовательности X_n длины n из знаков алфавита A_N , для любого $k = 0, 1, \dots, n$ выполнены соотношения

$$B_{n,k,0}(X_n) = B_{n-1,k,0}(X_{n-1}) + B_{n-1,k,1}(X_{n-1}), \quad (4)$$

$$B_{n,k,1}(X_n) \leq (N-1)B_{n,k-1,0}(X_n) + B_{n-1,k-1,1}(X_{n-1}) \quad (5)$$

с начальными условиями

$$B_{1,0,0}(X_1) = 1, \quad B_{1,0,1}(X_1) = 0, \quad B_{1,1,0}(X_1) = 0, \quad B_{1,1,1}(X_1) = N. \quad (6)$$

При этом (5) выполняется как равенство в случае $x_{n-1} \neq x_n$.

Теорема 2 будет доказана в разделе 4, а сейчас воспользуемся ею для вывода второго неравенства в (3).

Рассмотрим систему рекуррентных соотношений

$$C_{n,k,0} = C_{n-1,k,0} + C_{n-1,k,1}, \quad (7)$$

$$C_{n,k,1} = (N-1)C_{n,k-1,0} + C_{n-1,k-1,1} \quad (8)$$

с начальными условиями

$$C_{1,0,0} = 1, \quad C_{1,0,1} = 0, \quad C_{1,1,0} = 0, \quad C_{1,1,1} = N. \quad (9)$$

Она совпадает с системой (4), (5) в случае, когда неравенство (5) обращается в равенство. Из теоремы 2 следует, что

$$C_{n,k,i} \geq B_{n,k,i}(X_n), \quad (10)$$

и если в последовательности X_n нет одинаковых подряд идущих знаков, то для таких последовательностей $C_{n,k,i} = B_{n,k,i}(X_n)$ при всех $n, k = 0, \dots, n, i = 0, 1$, так как начальные условия (6) не зависят от X_1 .

Найдем $C_{n,k,i}$ при $n = 2$, используя соотношения (7), (8) и начальные условия (9):

$$C_{2,0,0} = C_{1,0,0} = 1,$$

$$C_{2,0,1} = 0,$$

$$C_{2,1,0} = C_{1,1,0} + C_{1,1,1} = N,$$

$$C_{2,1,1} = (N-1)C_{2,0,0} + C_{1,0,1} = N-1,$$

$$C_{2,2,0} = 0,$$

$$C_{2,2,1} = (N-1)C_{2,1,0} + C_{1,1,1} = N^2.$$

Положим

$$C_{n,k} = C_{n,k,0} + C_{n,k,1}. \quad (11)$$

Заметим, что величина $C_{n,k}$ определяет число таких последовательностей Y_{n+k} длины $n+k$, что последовательность X_n может быть плотно вложена во всю последовательность Y_{n+k} . Для величин $C_{n,k}$ при $n = 1, 2$ с учетом формулы (11) получим следующие значения:

$$C_{1,0} = 1, \quad C_{1,1} = N, \quad C_{2,0} = 1, \quad C_{2,1} = 2N-1, \quad C_{2,2} = N^2.$$

Лемма 1. Для любых $n \geq 3$, $k = 0, 1, \dots, n$, выполнено соотношение

$$C_{n,k} = C_{n-1,k} + NC_{n-1,k-1} - C_{n-2,k-1} \quad (12)$$

с начальными условиями

$$C_{1,0} = 1, \quad C_{1,1} = N, \quad C_{2,0} = 1, \quad C_{2,1} = 2N - 1, \quad C_{2,2} = N^2. \quad (13)$$

Доказательства этой и других лемм приведены в разделе 4.

Продолжим доказательство неравенства (3). Оценим число $D_m(X_n)$ детерминированных последовательностей Y_m , в начала которых может быть плотно вложена последовательность X_n . Назовем длиной вложения номер того элемента последовательности Y_m , которому (при вложении X_n в Y_m) сопоставляется последний элемент последовательности X_n (знак x_n). Для каждой пары последовательностей X_n и Y_m имеется хотя бы один вариант плотного вложения с максимальной длиной вложения.

Пусть $D_{m,k}(X_n)$ — число последовательностей Y_m , для которых максимальная длина плотного вложения X_n в Y_m равна $n + k$. Тогда

$$D_m(X_n) = \sum_{k=0}^{m-n} D_{m,k}(X_n), \quad (14)$$

причем

$$D_{m,k}(X_n) \leq B_{n,k,1}(X_n) N^{m-n-k}. \quad (15)$$

Следовательно,

$$D_m(X_n) \leq \sum_{k=0}^n N^{n-k} B_{n,k,1}(X_n).$$

Воспользуемся теперь тем, что, как уже отмечалось (см. (10)), имеет место оценка $B_{n,k,1}(X_n) \leq C_{n,k,1}$. Приходим к неравенству

$$D_m(X_n) \leq C_n,$$

где

$$C_n = \sum_{k=0}^{m-n} C_{n,k,1} N^{m-n-k}. \quad (16)$$

Поэтому

$$P_{2n}(X_n) = N^{-2n} D_{2n}(X_n) \leq N^{-2n} C_n. \quad (17)$$

Найдем величины C_1 и C_2 , используя начальные условия (6) и определение (16):

$$C_1 = \sum_{k=0}^1 N^{1-k} C_{1,k,1} = N,$$

$$C_2 = \sum_{k=0}^2 N^{2-k} C_{2,k,1} = N^2 + N.$$

Далее воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2. Для любого $n \geq 1$ величина C_n выражается формулой

$$C_n = \frac{1}{2}(N - \sqrt{N^2 - N})^n + \frac{1}{2}(N + \sqrt{N^2 - N})^n. \quad (18)$$

Теперь верхняя оценка в (3) следует из (17) и (18).

Лемма 3. Пусть последовательность X_n удовлетворяет условию

$$x_i \neq x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (19)$$

Тогда

$$D_{m,k}(X_n) = C_{n,k,1} N^{m-n-k}. \quad (20)$$

Из равенства (20) и соотношений (14) и (16) следует, что для последовательности X_n , удовлетворяющей условию (19), выполнено равенство $D_m(X_n) = C_n$. Поэтому верхняя оценка в (3) для таких последовательностей превращается в равенство.

3. Доказательство нижних оценок

Выведем нижнюю оценку для вероятности $P_m(X_n)$ в предположении, что $m \geq 2n$. Наряду с основным (описанным ранее) способом вложения последовательности X_n в последовательность Y_m , рассмотрим также вспомогательный способ. При вспомогательном способе делаем следующее. Если $x_1 = y_1$, то вставляем знак x_1 на первое место последовательности Y_m , в противном случае считаем, что последовательность X_n не может быть вставлена в Y_m . Далее рассуждаем рекурсивно. Пусть знак x_{i-1} вставлен в Y_m на $(j-1)$ -м месте. Если $x_i = y_j$, то вставляем знак x_i на j -е место последовательности Y_m . Если $x_i \neq y_j$, $x_i = y_{j+1}$, то вставляем x_i на $(j+1)$ -е место. Если же $x_i \neq y_j$, $x_i \neq y_{j+1}$, то будем считать, что последовательность X_n не может быть вставлена вспомогательным способом в Y_m .

Ясно, что если последовательность X_n может быть вставлена в начало последовательности Y_m вспомогательным способом, то она может быть вставлена в него и основным способом. Поэтому вероятность вложения последовательности X_n в случайную последовательность Y_m вспомогательным способом меньше или равна вероятности этого же вложения основным способом.

Лемма 4. Если последовательность X_n состоит из n одинаковых знаков, то вероятности вложения X_n в случайную равновероятную последовательность Y_m основным и вспомогательным способами совпадают.

Поэтому нижняя оценка вероятности $P_m(X_n)$ достигается для таких последовательностей X_n .

Вычислим вероятность вложения X_n в Y_m вспомогательным способом. Обозначим через $D'_m(X_n)$ число детерминированных последовательностей $Y_m = \{y_j\}_{j=1}^m$, в которые данная последовательность $X_n = \{x_j\}_{j=1}^n$ может быть вставлена вспомогательным способом.

Лемма 5. Для любых $n \geq 1$ и $m \geq n$ выполнено равенство

$$D'_m(X_n) = \sum_{k=0}^{m-n} \binom{n-1}{k} (N-1)^k N^{m-n-k}. \quad (21)$$

Следствие 1. При $m \geq 2n - 1$ выполнено равенство

$$D'_m(X_n) = (2N - 1)^{n-1} N^{m-2n+1}.$$

Следствие 2. Значение $D'_m(X_n)$ не зависит от X_n .

Нам остается доказать первое из неравенств (2), так как второе неравенство очевидно. Таким образом, мы переходим к рассмотрению случая $n \leq m < 2n$.

Итак, мы можем в качестве нижней оценки для вероятности $P_m(X_n)$ взять выражение $N^{-m} D'_m(X_n)$. Согласно лемме 5 и следствиям из нее такая нижняя оценка вероятности $P_m(X_n)$ не зависит от X_n , достигается на последовательностях из одинаковых знаков и имеет вид

$$\begin{aligned} P_m(X_n) &\geq \frac{1}{N^m} D'_m(X_n) = \frac{1}{N^m} \sum_{k=0}^{m-n} \binom{n-1}{k} (N-1)^k N^{m-n-k} \\ &= \frac{1}{N^n} \sum_{k=0}^{m-n} \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

4. Доказательства вспомогательных утверждений

Доказательство теоремы 2. Используем такую же схему рассуждений, как в работе [1]. Заметим, что при $0 \leq k \leq n$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \{X_n \Rightarrow Y_{n+k}\} &= \{y_{n+k} = x_n, X_{n-1} \rightarrow Y_{n+k-1}\} \\ &= \{y_{n+k} = x_n, X_{n-1} \Rightarrow Y_{n+k-1}\} \cup \{y_{n+k} = x_n, X_{n-1} \Rightarrow Y_{n+k-2}, X_n \nRightarrow Y_{n+k-1}\}. \end{aligned}$$

В силу несовместности последних событий мы получим (4).

Докажем формулу (5). Разложим событие $\{X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_n \nRightarrow Y_{n+k}\}$ в сумму двух несовместных событий:

$$\begin{aligned} \{X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_n \nRightarrow Y_{n+k}\} &= \{y_{n+k} \neq x_n, X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_n \nRightarrow Y_{n+k}\} \\ &\cup \{y_{n+k} = x_n, X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_n \nRightarrow Y_{n+k}\}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\{y_{n+k} \neq x_n, X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_n \nRightarrow Y_{n+k}\} = \{y_{n+k} \neq x_n, X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}\}.$$

Неравенство (5) будет доказано, если мы убедимся, что

$$\begin{aligned} \{y_{n+k} = x_n, X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_n \nRightarrow Y_{n+k}\} \\ \subseteq \{X_{n-1} \Rightarrow Y_{n+k-3}, X_{n-1} \nRightarrow Y_{n+k-2}\} \cap \{y_{n+k-1} = y_{n+k} = x_n\}. \end{aligned}$$

Для этого перепишем событие в левой части последнего включения следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \{y_{n+k} = x_n, X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_n \not\Rightarrow Y_{n+k}\} \\
 &= \{X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_{n-1} \not\Rightarrow Y_{n+k-1}, X_{n-1} \not\Rightarrow Y_{n+k-2}\} \cap \{x_n = y_{n+k}\} \\
 &= \{X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_{n-1} \not\Rightarrow Y_{n+k-1}, X_{n-1} \not\Rightarrow Y_{n+k-2}, X_{n-1} \Rightarrow Y_{n+k-3}\} \cap \{x_n = y_{n+k}\} \\
 &= \{X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_{n-1} \not\Rightarrow Y_{n+k-2}, X_{n-1} \Rightarrow Y_{n+k-3}, x_n = y_{n+k}\} \\
 &\quad \setminus \{X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_{n-1} \Rightarrow Y_{n+k-1}, x_n = y_{n+k}\} \\
 &= \{X_{n-1} \not\Rightarrow Y_{n+k-2}, X_{n-1} \Rightarrow Y_{n+k-3}, x_n = y_{n+k} = y_{n+k-1}\} \\
 &\quad \setminus \{X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_{n-1} \Rightarrow Y_{n+k-1}, x_n = y_{n+k}\}.
 \end{aligned}$$

При этом $\{X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_{n-1} \Rightarrow Y_{n+k-1}, x_n = y_{n+k}\} = \emptyset$, если $x_{n-1} \neq x_n$.

Из последнего равенства следует, что

$$\begin{aligned}
 & \{y_{n+k} = x_n, X_n \Rightarrow Y_{n+k-1}, X_n \not\Rightarrow Y_{n+k}\} \\
 & \subseteq \{X_{n-1} \not\Rightarrow Y_{n+k-2}, X_{n-1} \Rightarrow Y_{n+k-3}, x_n = y_{n+k} = y_{n+k-1}\}.
 \end{aligned}$$

В случае, когда $x_{n-1} \neq x_n$, это включение выполняется в форме равенства.

Таким образом, неравенство (5) доказано. Начальные условия были получены нами ранее. Доказательство теоремы 2 завершено.

Доказательство леммы 1. Из соотношения (7) вытекает, что

$$C_{n,k,0} = C_{n-1,k}. \quad (22)$$

Поэтому с учетом уравнения (7) получаем, что

$$C_{n,k,1} = (N-1)C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k-1,1}. \quad (23)$$

Из соотношения (11) находим, что $C_{n-1,k-1} = C_{n-1,k-1,0} + C_{n-1,k-1,1}$. Следовательно, с учетом равенства (22), $C_{n-1,k-1,1} = C_{n-1,k-1} - C_{n-2,k-1}$. Подставив этот результат в уравнение (23), получим, что

$$C_{n,k,1} = (N-1)C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k-1} - C_{n-2,k-1} = NC_{n-1,k-1} - C_{n-2,k-1}.$$

После этого из формулы (11) следует, что

$$C_{n,k} = C_{n-1,k} + NC_{n-1,k-1} - C_{n-2,k-1}.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть

$$C'_n = \sum_{k=0}^n N^{n-k} C_{n,k}.$$

Воспользуемся выражением (12) для величины $C_{n,k}$, тогда

$$\begin{aligned}
 C'_n &= \sum_{k=0}^n N^{n-k} C_{n,k} = \sum_{k=0}^n N^{n-k} (C_{n-1,k} + NC_{n-1,k-1} - C_{n-2,k-1}) \\
 &= 2NC'_{n-1} - NC'_{n-2}.
 \end{aligned}$$

Из определения C'_n следует, что

$$C'_n = C_n + \sum_{k=0}^n N^{n-k} C_{n,k,0}.$$

Второе слагаемое с учетом уравнения (4) равно

$$\sum_{k=0}^n N^{n-k} C_{n-1,k} = NC'_{n-1}.$$

Поэтому

$$C_n = C'_n - NC'_{n-1}.$$

Ясно, что C_n удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и C'_n . Следовательно,

$$C_n = 2NC_{n-1} - NC_{n-2}. \quad (24)$$

Как известно (см. [2]), решение рекуррентного соотношения (24) следует искать в виде

$$C_n = k_1 q_1^n + k_2 q_2^n,$$

где q_1, q_2 — корни квадратного уравнения $q^2 - 2Nq + N = 0$. Так как

$$q_1 = N - \sqrt{N^2 - N}, \quad q_2 = N + \sqrt{N^2 - N},$$

общее решение уравнения (24) имеет вид

$$C_n = k_1 (N - \sqrt{N^2 - N})^n + k_2 (N + \sqrt{N^2 - N})^n,$$

где константы k_1, k_2 находятся из начальных условий и равны $k_1 = k_2 = 1/2$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Заметим, что неравенство

$$D_{m,k}(X_n) < B_{n,k,1}(X_n) N^{m-n-k} \quad (25)$$

возможно лишь в том случае, когда наряду с теми последовательностями Y_m , для которых максимальная длина плотного вложения X_n в Y_m равна $n+k$, имеется последовательность Y_m , в которую возможно вложение с длиной, не меньшей $n+k+2$. Покажем, что для последовательности X_n , удовлетворяющей условию (19), это невозможно.

Пусть существует два разных варианта плотного вложения такой последовательности X_n в начало Y_m и $n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq n$ — номера тех элементов X_n , которые вкладываются этими способами одинаково. В частности, $n_1 = 1$.

Заметим, что знаки $x_2, \dots, x_{n_2-1}$ каждым из этих вариантов могут быть вложены лишь поочередно: на места $2, 4, \dots, 2n_1 - 2$ и на места $3, 5, \dots, 2n_1 - 3$ соответственно, а знак x_{n_2} вставляется на место с номером $2n_2 - 1$. То же самое выполняется для всех остальных элементов последовательности X_n . Поэтому длины вложения этими способами могут различаться не более, чем на единицу. Значит, неравенство (25) невозможно, и для таких последовательностей X_n

$$D_{m,k}(X_n) = B_{n,k,1}(X_n) N^{m-n-k}.$$

Осталось воспользоваться теоремой 2, согласно которой для рассматриваемых последовательностей X_n выполнено равенство $B_{n,k,1}(X_n) = C_{n,k,1}$. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Рассмотрим последовательность $X = (a, \dots, a)$, которая может быть вставлена в начало последовательности Y_m основным способом. В этом случае множество $\{1 \leq i \leq m: y_i = a\}$ состоит не менее, чем из n элементов, причем первые n из них удовлетворяют условию (1). Следовательно, последовательность X_n может быть вставлена именно на эти первые места. Это означает, что последовательность X_n вставляется в начало последовательности Y_m вспомогательным способом.

Как мы уже отмечали, если последовательность X_n может быть вставлена в начало последовательности Y_m вспомогательным способом, то она может быть вставлена в него и основным способом. Таким образом, вероятности вставить последовательность X_n указанного вида в начало последовательности Y_m обоими способами совпадают. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Для любых X_n и Y_m существует не более одного варианта вставки последовательности X_n в последовательность Y_m вспомогательным способом. Это свойство позволяет найти число $D'_m(X_n)$ следующим образом. Выберем число k , $0 \leq k \leq n-1$ и будем считать, что из n знаков последовательности X_n любые $n-k$ знаков вставлены вспомогательным способом сразу за предшествующим вставленным знаком последовательности X_n , а остальные k знаков вставлены через пропуск знака. Число последовательностей Y_{n+k} длины $n+k$, в которые данная последовательность X_n может быть вставлена вспомогательным образом, равно $\binom{n-1}{k}(N-1)^k$. Последние $m-n-k$ символов последовательности Y_m могут быть выбраны произвольно, то есть N^{m-n-k} способами. В итоге, суммируя по k в диапазоне от 0 до $m-n$, получаем, что

$$D'_m(X_n) = \sum_{k=0}^{m-n} \binom{n-1}{k} (N-1)^k N^{m-n-k}$$

Лемма 5 доказана.

Авторы признательны А. М. Зубкову, обратившему их внимание на рассматриваемую задачу и на статью [1], а также А. А. Ахметшину за идею доказательства леммы 3.

Список литературы

1. Golic J. D., Constrained embedding probability for two binary strings. *SIAM J. Discrete Math.* (1996) 9, №3, 360–364.
2. Холл М., *Комбинаторика*. Мир, Москва, 1970.

Статья поступила 30.11.2004.