Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Рыков, О свойствах генератора, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 1, 51–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:22:36

О свойствах генератора

© 2011 г. С. В. Рыков

Генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ), порождаемый преобразованием

$$F_c(x) = x + (x^2 \vee c) \pmod{2^n},$$

был представлен Климовым и Шамиром в 2002 г. Функция $F_c(x)$ транзитивна по модулю 2^n тогда и только тогда, когда $c \equiv 5 \pmod{8}$ или $c \equiv 7 \pmod{8}$.

В работе рассматриваются свойства распределения пар $(x_i, F_c(x_i))$ ГПСЧ при всевозможных значениях $c \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ и показываются их неудовлетворительные статистические свойства, в особенности при $c \geq 2^{n/3}$.

Показано, что в случае если $n = 32$ требуется не более 9 различных пар $(x_i, F_c(x_i))$ для определения значения c с вероятностью $P \geq 0,999$.

1. Введение

Задачи построения и анализа генераторов псевдослучайных чисел (ГПСЧ), обладающих заданными статистическими, сложностными и иными характеристиками, встречаются в различных областях науки, где требуется источник псевдослучайных данных.

Особенные требования предъявляются к ГПСЧ, используемым в криптографии для построения быстрых и стойких поточных шифраторов, причем требование к скорости является критическим, так как основная область применения поточных шифраторов — это шифрование каналов связи. Для эффективной программной и аппаратной реализации шифратор должен быть изначально спроектирован в соответствии с выбранной архитектурой процессора/платы, набором поддерживаемых инструкций и рядом других условий.

Компоненты поточных шифраторов могут быть представлены композицией элементарных машинных команд. Наборы инструкций, поддерживаемые современными процессорами, постоянно расширяются, но в то же время практически каждый процессор поддерживает базовые логические (AND, OR, XOR, NOT, ...) и арифметические операции (+, -, *, /, >, <, ...), проводит вычисления по некоторому модулю 2^n (например, 2^8 , 2^{32} или 2^{64}). Заметим, что далее для обозначения машинных операций AND и OR будут использоваться $\wedge$ и $\vee$ соответственно. Иными словами, в некоторых случаях все эти операции можно рассматривать как преобразования в некотором базисе в кольце целых чисел $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$. Если из числа этих операций убрать несовместимые преобразования, такие как циклический сдвиг и сдвиг в сторону младших разрядов, то эти операции и любые их композиции будут также являться совместимыми [1].

Определение 1. Функция $f: \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ называется совместимой, если для любых $a, b \in \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ таких, что $a \equiv b \pmod{p^k}$ справедливо сравнение $f(a) \equiv f(b) \pmod{p^k}$, где p — простое и k — натуральное число.

Данный класс функций представляет особый интерес в криптографии, так как любое совместимое преобразование представимо как композиция элементарных машинных операций, что позволяет создавать новые криптографические примитивы с определенными характеристиками, имеющие эффективную программную реализацию.

С начала 1990-х В. С. Анашиным [1, 3, 4, 5, 6] активно проводятся исследования совместимых преобразований с использованием методов неархимедова анализа. Рассматриваются свойства преобразований $f: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$, удовлетворяющие условию Липшица с константой 1, являющиеся продолжением совместимых преобразований с $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ на $\mathbf{Z}_p$ (см. раздел 3.8.1 в [6]).

Определение 2. Функция $F: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $k \in \mathbf{N}$, если для любых $a, b \in \mathbf{Z}_p$ выполняется неравенство

$$|F(a) - F(b)|_p \leq k|a - b|_p,$$

где p – простое число.

В серии работ Климова и Шамира начала 2000-х [12, 13, 14, 15, 11] совместимые преобразования рассматривались в частном случае при $p = 2$. Введенное авторами определение T -функции по сути является сокращением от другого названия этого класса преобразований, известного из теории булевых функций, – преобразования треугольного вида.

Основные теоретические результаты, сформулированные в этих работах, были описаны еще в середине 1990-х [1, 2]. К практическим результатам, получившим широкое распространение, можно отнести примеры совместимых преобразований от одной и нескольких переменных. Некоторые из них были напрямую использованы при разработке алгоритмов поточного шифрования (как, например, семейство поточных шифраторов TSC) или предложены в качестве независимых компонент. К числу последних относится генератор псевдослучайных чисел TF-0, впервые описанный в работе [12]:

$$x_{i+1} = F_c(x_i) = x_i + (x_i^2 \vee c): \quad \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}.$$

На прошедшем в 2004–2008 г. европейском конкурсе поточного шифрования eSTREAM из 35 представленных 5 алгоритмов (ABC, Mir-1, MV3, TSC, VEST) были основаны на T -функциях. Отметим, что уязвимости в основном были обнаружены в функции инициализации, основная задача которой генерировать на основе ключа и вектора инициализации начальное заполнение регистров шифратора. На основное преобразование, вырабатывающее гамму и обновляющее свое внутреннее состояние, эффективных атак (за исключением младших модификаций TSC-1, TSC-2) не было найдено. Вследствие чего актуальны исследования, посвященные методам анализа шифраторов, основанным на T -функциях.

В данной работе рассматриваются некоторые подходы к анализу распределения последовательных пар заполнений регистров (x_i, x_{i+1}) основного преобразования поточного шифратора на примере ГПСЧ Климова–Шамира TF-0. В общем случае состояние x_i может рассматриваться и как один из регистров, так и независимо как внутреннее состояние ГПСЧ.

В разделе 2 рассмотрены известные работы, посвященные криптоанализу $F_c(x)$. Раздел 3 показывает наличие линейных и квадратичных зависимостей в распределении пар $(x_i, F_c(x_i))$ при произвольном фиксированном значении n и различных значениях $c \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$, раскрывающие неудовлетворительные статистические свойства генератора практически при всех значениях c .

В [6] проводится параллель между автоматами Мили и совместимыми p -адическими преобразованиями, и показывается, что всякую совместимую функцию $g: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ можно рассматривать как автоматную функцию $\Psi_{\mathcal{U}}$, соответствующую некоторому автомату Мили $\mathcal{U} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{N}, \mathcal{M}, f, F, u_0 \rangle$, где $\mathcal{H}$ — входной алфавит, $\mathcal{N}$ — непустое множество состояний, $\mathcal{M}$ — выходной алфавит, $f: \mathcal{H} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ — функция переходов, $F: \mathcal{H} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ — функция выхода. Если задать входной и выходной алфавиты равными некоторому алфавиту $\mathcal{P}$, состоящему из p символов, то можно установить взаимно однозначное соответствие между автоматной функцией $\Psi_{\mathcal{U}}$ и g .

Определение 3. Будем говорить, что совместимой функции $g: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ соответствует автомат Мили $\mathcal{U} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{N}, \mathcal{M}, f, F, u_0 \rangle$, если существует взаимно однозначное соответствие между автоматной функцией $\Psi_{\mathcal{U}}$ и g .

Очевидно, что автомат $\mathcal{U}$ в определении 3 задается неоднозначно. В данной работе более существенным фактором является не внутренняя структура самого автомата, а мощность множества состояний $\mathcal{N}$. В дальнейшем будем говорить, что g соответствует конечный автомат, если $\mathcal{N}$ — конечное множество, или бесконечный автомат, если не существует соответствующего автомата с конечным числом состояний.

Определим ГПСЧ, порождаемый преобразованием $F_c(x)$, на множестве целых 2-адических чисел, полагая

$$x_{i+1} = \mathbf{F}_C(x_i) = x_i + (x_i^2 \vee \mathbf{C}): \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2,$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{C} \equiv c \pmod{2^n}$. В разделе 4 выявляются условия, при которых $\mathbf{F}_C(x)$ соответствует конечному автомату (см. теорему 4) или бесконечному автомату (см. теоремы 5, 6).

В разделе 5 на основе данных о свойствах соответствующих автоматов рассматривается распределение пар

$$\left(\frac{x \bmod p^n}{p^n}, \frac{\mathbf{F}_C(x) \bmod p^n}{p^n} \right) \in [0, 1]^2$$

при всевозможных значениях $n \in \mathbf{N}$ и $x \in \mathbf{Z}_2$. Анализируются значения меры Лебега замыкания множества всех таких пар.

Рассматриваются свойства множества всех предельных неизоллированных точек этого множества (раздел 6) и находится размерность Хаусдорфа (теорема 14) этого множества в случае, когда $\mathbf{C} \in \mathbf{Z}_2 \cap \mathbf{Q}$.

2. Известные свойства

Важным свойством ГПСЧ является условие максимальности периода вырабатываемой гаммы из любого начального состояния. Функция $F_c(x)$ транзитивна по модулю 2^n для любого натурального n , то есть представляет собой перестановку с единственным циклом, если $c \equiv 5 \pmod{8}$ или $c \equiv 7 \pmod{8}$. Данное условие можно переписать с использованием j -й координатной функции:

$$\delta_0(c) = \delta_2(c) = 1,$$

где

$$\delta_j(x) = \frac{1}{2^j} (x - (x \bmod 2^j)) \pmod{2}.$$

Отметим, что $\delta_j(x)$ является значением коэффициента при 2^j в двоичном разложении $x = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j(x)2^j$.

Известно (см. [11]), что для $c < 2^{n/3}$ сложность определения внутреннего состояния генератора при условии, что на выход в качестве гаммы поступают значения $m = n/2$ старших бит этого состояния, составляет $2^{n/3}$ по времени и по памяти. При $c \geq 2^{n/3}$ данная атака не применима.

В статье [7] рассматривается случай $c \leq 2^{n/4}$. Получение внутреннего состояния генератора при тех же условиях имеет временную сложность $O(2^{n/4})$ и сложность по памяти $O(n \log_2 n)$. Поэтому предлагается выбирать значения $c > 2^{n/4}$.

В работах [16, 17] рассматриваются свойства координатной функции и находится следующее линейное свойство:

$$\delta_j(x_{i+2j-1}) + \delta_j(x_i) \equiv \delta_{j-1}(x_i) + a_2\delta_1(x_i) + a_1\delta_0(x_i) + a_0 \pmod{2},$$

где a_i — константы, зависящие от c .

В 2008 г. к похожему соотношению пришли Ванг и Ки (см. [18]) только в классе полиномов. При использовании данного соотношения сложность нахождения внутреннего состояния, как отмечают авторы, эквивалентна полному перебору.

3. Распределение пар в $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$

Для анализа качества гаммы, вырабатываемой генераторами псевдослучайных чисел, помимо различных пакетов оценочных тестов (NIST, Diehard и другие) важны графические тесты, позволяющие находить скрытые зависимости. В некоторых случаях становится возможным описать предсказанные на графике зависимости, что в конечном счете приводит к пониманию внутренней структуры ГПСЧ и созданию эффективных отличительных тестов гаммы от истинно случайной последовательности. К группе графических тестов относится исследование свойств распределения пар на плоскости.

Генератор Климова–Шамира $F_c(x)$ обладает как квадратичными, так и линейными свойствами, в зависимости от выбранной константы c . Другими словами, точки $(x_{i_1}, F_c(x_{i_1}))$, $(x_{i_2}, F_c(x_{i_2}))$, $(x_{i_3}, F_c(x_{i_3}))$, ... в некоторые моменты $i_1, i_2, i_3, \dots$ ложатся на параболы или на прямые, наблюдаемые визуальнo на графике распределения на плоскости (в квадрате $[0, 1]^2$). Каждой паре $(x_i, x_{i+1}) \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^2$ ставится в соответствие точка на плоскости $(x_i/2^n, x_{i+1}/2^n) \in [0, 1]^2$.

Далее рассматриваются некоторые свойства распределения, явно показывающие неудовлетворительные качества гаммы, вырабатываемой ГПСЧ Климова–Шамира, при всевозможных значениях $c \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$, в особенности при больших значениях c , предложенных в вышеупомянутых работах.

3.1. Разбиение на полосы

Множество всевозможных значений пар $(x, F_c(x))$ обозначим

$$\Gamma_c = \{(x, F_c(x)) : x \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}\}.$$

Замечание 1. При c таких, что $\delta_0(c) = \delta_2(c) = 1$, множество всевозможных значений пар (x_{i-1}, x_i) элементов последовательности $x_i = F_c(x_{i-1})$, порожденных из произвольного начального состояния $x_0 \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$, совпадает с

$$\Gamma_c = \{(x_{i-1}, x_i) : x_0 \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}, x_i = F_c(x_{i-1})\}$$

Пусть

$$c = \sum_{i=0}^{n-1} c_i 2^i, \quad c_i \in \{0, 1\}.$$

Введем представление c в виде двоичного вектора

$$c = (\dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)_2 \\ \dots, \tau_1^1, \tau_0^0 + l_0^0 - 1, \dots, \tau_0^0, \tau_0^1 + l_0^1 - 1, \dots, \tau_0^1$$

где под каждой компонентой записано число вида $\tau_i^j + t$, где $t \in \{0, 1, \dots, l_i^j - 1\}$, $j \in \{0, 1\}$ такое, что $c_{\tau_i^j + t} = j$. Другими словами в двоичной записи c все коэффициенты с индексами от τ_i^j до $\tau_i^j + l_i^j - 1$ равны j , а i указывает, что данная подпоследовательность, состоящая только из нулей или только из единиц, является i -й подпоследовательностью соответствующего типа.

Пример 1. Например, $\tau_0^1 = 0, l_0^1 = 1, \tau_1^1 = 2, l_1^1 \geq 1$ для всех $c \equiv 5 \pmod{8}$.

Обозначим через $k^1 - 1$ ($k^0 - 1$) номер последней подпоследовательности, состоящей из единиц (нулей), тогда

$$c = \sum_{i=0}^{k^1-1} \left(\sum_{t=0}^{l_i^1-1} 2^{\tau_i^1+t} \right) = 2^n - \sum_{i=0}^{k^0-1} \left(\sum_{t=0}^{l_i^0-1} 2^{\tau_i^0+t} \right).$$

Разобьем множество индексов $\{0, 1, \dots, n-1\}$ на два непересекающихся подмножества $\Lambda_c^0 \cup \Lambda_c^1 = \{0, 1, \dots, n-1\}$:

$$\Lambda_c^j = \bigcup_{i=0}^{k^j-1} \{ \tau_i^j, \dots, \tau_i^j + l_i^j - 1 \}, \quad j \in \{0, 1\}.$$

Определение 4. Будем называть L_γ^h полосой ширины $h \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ и координатой $\gamma \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$, если

$$L_\gamma^h = \{(x, y): x, y \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}, \gamma + x \leq y \leq \gamma + x + h - 1\}.$$

Верна следующая теорема о разбиении на полосы.

Теорема 1. Для любого натурального $n \in \mathbf{N}$ и $c \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$

$$\Gamma_c \subset \bigcup_{\gamma \in \text{Coord}_c} L_{c+\gamma}^{2^{\tau_0^1}},$$

где $\gamma \in \text{Coord}_c$, если $\delta_i(\gamma) = 0$ при

$$i \in \begin{cases} \Lambda^1, & \tau_0^1 > \tau_0^0, \\ \Lambda^1 \cup \{\tau_0^0, \dots, \tau_0^0 + l_0^0 - 1\}, & \tau_0^1 < \tau_0^0. \end{cases}$$

Доказательство. Введем функцию

$$G_c(x) = F_c(x) - x = x^2 \vee c.$$

Заметим, что $G_c(x) \geq c$ для всех x . Рассмотрим множество

$$\Gamma'_c = \{(x, G_c(x)): x \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}\}.$$

Так как

$$G_c(x) = x^2 \vee c = c + (\bar{c} \wedge x^2),$$

для Γ'_c верны включения

$$\begin{aligned} \Gamma'_c &\subset \{(x, c + (\bar{c} \wedge \alpha)): x, \alpha \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}\}, \\ \Gamma'_c &\subset \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} \times \{c + (\bar{c} \wedge \alpha): \alpha \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{A}_c = \{c + (\bar{c} \wedge \alpha): \alpha \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}\}.$$

Случай 1: $\tau_0^0 < \tau_0^1$. По построению $\tau_0^0 = 0$, $\tau_0^0 + l_0^0 = \tau_0^1$. Представим $\mathcal{A}_c$ как объединение подмножеств, у элементов $c + \gamma$ которых коэффициенты $\delta_i(\gamma)$ при значениях $i \in \Lambda_c^0 \setminus \{\tau_0^0, \dots, \tau_0^0 + l_0^0 - 1\}$ произвольны, а при $i \in \Lambda_c^1 \cup \{\tau_0^0, \dots, \tau_0^0 + l_0^0 - 1\}$ равны нулю:

$$\mathcal{A}_c = \bigcup_{\gamma} \{c + \gamma, \dots, c + \gamma + 2^{\tau_0^1} - 1\},$$

где объединение взято по γ таким, что $\delta_i(\gamma) = 0$, если $i \in \Lambda_c^1 \cup \{\tau_1^0, \dots, \tau_1^0 + l_1^0 - 1\}$.

Случай 2: $\tau_0^0 > \tau_0^1$. Для данного случая $\tau_0^1 = 0$, $\tau_0^1 + l_0^1 = \tau_0^0$ и множество $\mathcal{A}_c$ можно представить как

$$\mathcal{A}_c = \bigcup_{\gamma} \{c + \gamma\}$$

где объединение взято по γ таким, что $\delta_i(\gamma) = 0$, если $i \in \Lambda_c^1$.

Объединяя оба случая (с учетом того, что при $\tau_0^0 > \tau_0^1$ значение $2^{\tau_0^1} - 1 = 0$) получим, что

$$\{c + (\bar{c} \wedge \alpha): \alpha \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}\} = \bigcup_{\gamma \in \text{Coord}_c} \{c + \gamma, \dots, c + \gamma + 2^{\tau_0^1} - 1\}.$$

Подчеркнем, что соответствие между Γ_c и Γ'_c выражается следующим образом:

$$\Gamma_c = \{(x, y): (x, y) = (x', x' + y'), \forall (x', y') \in \Gamma'_c\}.$$

Теперь можно выписать общее выражение для Γ_c :

$$\Gamma_c \subset \bigcup_{\gamma \in \text{Coord}_c} \{(x, x + c + \gamma + j): x \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}, 0 \leq j \leq 2^{\tau_0^1} - 1\}.$$

Для завершения доказательства остается переписать данное включение с использованием определения полосы:

$$\Gamma_c \subset \bigcup_{\gamma \in \text{Coord}_c} L_{c+\gamma}^{2^{\tau_0^1}}.$$

Замечание 2. В данном представлении для всех ненулевых c есть один недостаток: в случае $c \equiv 5 \pmod{8}$ или $c \equiv 7 \pmod{8}$, при которых $F_c(x)$ имеет максимальный период, значение $\tau_0^1 = 0$ и визуально на графике Γ_c отследить данные полосы практически невозможно. Поэтому можно предложить обобщенное разбиение на полосы.

3.2. Обобщенное разбиение на полосы

Для $j \in \{0, 1, \dots, k^1 - 1\}$ множеством координат полос будем называть множество

$$\text{Coord}_c(j) = \left\{ \gamma: \gamma = \sum_{i=\tau_j^1}^{n-1} d_i 2^i \in \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}, d_i \in \{0, 1\}, i \in \Lambda_c^1 \Rightarrow d_i = 1 \right\}.$$

Верна следующая теорема об обобщенном разбиении на полосы.

Теорема 2. Пусть $c \in \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}$ таково, что $\delta_0(c) = \delta_2(c) = 1$, тогда для любого $j \in \{0, 1, \dots, k^1 - 1\}$

$$\Gamma_c \subset \bigcup_{\gamma \in \text{Coord}_c(j)} L_{c+\gamma}^{2^{\tau_j^1}}.$$

Следствие 1. Число полос в обобщенном разбиении Γ_c при $j \in \{0, 1, \dots, k^1 - 1\}$ равно $2^{\sum_{t=j+1}^{k^0} l_t^0}$.

Доказательство. Утверждение следует из того, что число независимых компонент d_i равно $\sum_{t=j+1}^{k^0} l_t^0$.

Таким образом, все точки $(x, F_c(x))$ попадают на полосы заданной ширины. Теорема 1 дает инструмент для анализа выхода генератора, когда известно значение c и требуется построить оракул для определения следующего выхода генератора, а также в более сложных случаях, когда значение c неизвестно, а имеется выход генератора, по которому сначала определяется значение c , а затем строится оракул.

Приведенная теорема о разбиении на полосы показывает, что при достаточно больших значениях c (к примеру, при $c > 2^{n/4}$, как предлагается в вышеупомянутых работах) распределение на плоскости будет обладать значительными изъянами. Следовательно, выбор таких значений c ведет к получению заведомо неравномерно распределенной гаммы.

Пример 2. Выберем $n = 15$, $c = (101000000000101)_2$, $j = 2$, $\tau_j^1 = 12$, $l_{j+1}^0 = 1$, $l_{k^0}^0 = l_4^0 = 1$. Число полос равно $2^{1+1} = 4$ (см. рис. 1).

Несмотря на то, что последовательность при данном c будет иметь максимальный период, множество пар значений $(x, F_c(x))$ будет ложиться на полосы, показанные на рис. 1. Непосредственно из теоремы об обобщенном разбиении на полосы следует, что есть две полосы шириной $2^{n-2} = 2^{13}$, причем в каждой полосе находятся еще по две полосы шириной уже $2^{n-4} = 2^{11}$.

В случае, когда значение $c < 2^{n/4}$, в проекции распределения пар на единичный квадрат $[0, 1]^2$ прослеживаются квадратичные зависимости, не исчезающие с ростом n .

3.3. Семейство квадратичных структур Π^+

Для произвольных $a, b, \varepsilon \in \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}$ квадратичной структурой назовем множество вида

$$\mathcal{Q}(a, b, \varepsilon) = \{(x, y): x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}, y = F_c(x) + b\};$$

они образуют семейство Π^+ , состоящее из структур $\mathcal{Q}(a, b, \varepsilon)$ при всевозможных фиксациях a, b, ε .

Рис. 1. $n = 15$, $c = (101000000000101)_2$

Пусть $x = \alpha 2^{n-k} + \varepsilon$, где $\alpha \in \mathbf{Z}/2^k \mathbf{Z}$, $\alpha \equiv 1 \pmod{2}$, $\varepsilon \in \mathbf{Z}/2^{\lfloor n/4 \rfloor} \mathbf{Z}$, $k \leq \lfloor n/4 \rfloor$, $c \leq 2^{n/4}$. Тогда

$$F_c(x) = \alpha 2^{n-k} + \varepsilon + \alpha 2^{n-k+1} \varepsilon + (\varepsilon^2 \vee c).$$

Представим ε как $\varepsilon(\tilde{\varepsilon}', \tilde{\varepsilon}'') = 2^{k-1} \tilde{\varepsilon}' + \tilde{\varepsilon}''$:

$$F_c(x) = \alpha 2^{n-k} + \varepsilon(\tilde{\varepsilon}', \tilde{\varepsilon}'') + \alpha 2^{n-k+1} \tilde{\varepsilon}'' + (\varepsilon^2(\tilde{\varepsilon}', \tilde{\varepsilon}'') \vee c).$$

Фиксируем произвольное $\tilde{\varepsilon}'' \in \mathbf{Z}/2^{k-1} \mathbf{Z}$, получим равенство

$$F_c(\alpha 2^{n-k} + \varepsilon(\tilde{\varepsilon}', \tilde{\varepsilon}'')) = F_c(\varepsilon(\tilde{\varepsilon}', \tilde{\varepsilon}'')) + \alpha 2^{n-k} + \alpha 2^{n-k+1} \tilde{\varepsilon}''.$$

Таким образом, семейство квадратичных структур, параметризованных по α и $\tilde{\varepsilon}''$, представимо в виде

$$\Pi^+ = \{Q(\alpha 2^{n-k} + \tilde{\varepsilon}'', \alpha 2^{n-k} + \alpha 2^{n-k+1} \tilde{\varepsilon}'', 2^{k-1} \tilde{\varepsilon}'')\}.$$

Пример 3. Пусть $n = 16$, $c = 5 = (101)_2$, $k = 1$, $y, \tilde{\varepsilon}'' \in \{0, 1\}$, тогда семейство Π^+ содержит 7 квадратичных структур такого вида, две из которых можно явно проследить на рис. 2, что показывает наличие нелинейных зависимостей в распределении пар даже при малых значениях c .

3.4. Семейство парабол Π^-

Введем семейство парабол

$$\Pi^- = \{Q_i^t(x) : i \in \mathbf{Z}/2^{n-t+1} \mathbf{Z}, t \in \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}\},$$

где

$$Q_i^t(x) = -\frac{1}{2^t}(x - i 2^{t-1})^2 + i(i-1)2^{t-1} + 2^{t-2} + c.$$

Рис. 2. $n = 16$, $c = (101)_2$

Рассмотрим произвольный элемент семейства Π^- и найдем множество точек, где $Q_i^t(x) = F_c(x)$, для некоторых фиксированных значений i, t . Предварительно наложим небольшие ограничения на x , именно, пусть $x^2 \vee c = x^2 + c$ и $c \in \mathbf{Z}/2^{\lfloor n/4 \rfloor} \mathbf{Z}$. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^t}(x - i2^{t-1})^2 + i(i-1)2^{t-1} + 2^{t-2} + c &= x^2 + x + c - (1 + 2^{-t})x^2 + (i-1)x \\ &\quad - i^22^{t-2} + i^22^{t-1} - i2^{t-1} + 2^{t-2} \\ &= 0, \\ -(1 + 2^t)x^2 + (i-1)2^t x + ((i-1)2^{t-1})^2 &= 0. \end{aligned}$$

Пусть $t-1 \geq n/2$, тогда $x = 2^{n/2}\tilde{x}$ будет являться решением уравнения $Q_i^t(x) = F_c(x)$ для всех $\tilde{x} \in \mathbf{Z}2^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathbf{Z}$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $c \in \mathbf{Z}2^{\lfloor n/4 \rfloor} \mathbf{Z}$, тогда число точек $x \in \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}$ таких, что $F_c(x) \in \Pi^-$, не меньше $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Пример 4. Пусть $t = n-3$, $i \in \mathbf{Z}2^4 \mathbf{Z}$, $n = 16$, $c = 5$. Данные параболы явно видны на рис. 3.

3.5. Определение значения c

Определение внутреннего состояния генератора при неизвестном значении c в случае наличия нескольких пар последовательных выходов гаммы (x_{i_1}, x_{i_1+1}) , (x_{i_2}, x_{i_2+1}) , ... требует наличия малого количества таких пар.

Рассмотрим 0-й бит $x_{i+1} = F_c(x_i)$:

$$\delta_0(x_{i+1}) \equiv \delta_0(x_i) + (\delta_0(x_i^2) \vee \delta_0(c)) \pmod{2}$$

Если $\delta_0(x_i) = 0$, то $\delta_0(c)$ определяется однозначно, если же $\delta_0(x_i) = 1$, то $\delta_0(x_{i+1}) = 0$ или потребуются взять другую пару. Пусть определены младшие $s-1$ бит c . Рассмотрим

Рис. 3. $n = 16$, $c = (101)_2$

бит

$$\delta_s(x_{i+1}) \equiv \delta_s(x_i) + (\delta_s(x_i^2) \vee \delta_s(c)) + \delta_s(r_i) \pmod{2},$$

где $\delta_s(r_i)$ — бит переноса разряда. Считая, что величины $\delta_s(x_{i+1})$, $\delta_s(x_i)$, $\delta_s(x_i^2)$, $\delta_s(r_i)$ могут принимать произвольные значения из $\{0, 1\}$, получаем, что из 16 возможных состояний допустимы 13, из которых только в 4 есть неоднозначность в определении $\delta_s(c)$.

Следовательно, с вероятностью $4/13$ невозможно однозначно определить $\delta_s(c)$. Если имеется t таких пар, то с вероятностью $(4/13)^t$ невозможно будет определить $\delta_s(c)$ ни на одной из пар.

Теорема 3. Если имеется t различных пар $(x_i, F_c(x_i)) \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^2$, $i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$, то значение c можно определить с вероятностью $P \geq 1 - n(4/13)^t$.

Следствие 2. При $n = 32$ для определения значения константы c с вероятностью $P \geq 0,999$ требуется не более 9 различных пар $(x_i, F_c(x_i))$.

3.6. Линейная зависимость координатной функции

Как было упомянуто во введении, в работах [16, 17] находится следующая линейная зависимость в j -й координатной функции:

$$\delta_j(x_{i+2^j-1}) + \delta_j(x_i) \equiv \delta_{j-1}(x_i) + a_2\delta_1(x_i) + a_1\delta_0(x_i) + a_0 \pmod{2},$$

где a_i — константы, зависящие от c . Отметим, что для всех совместимых преобразований максимального периода верно соотношение

$$\delta_j(x_i) + \delta_j(x_{i+2^j}) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Отсюда несложно показать, что в общем случае $\delta_j(x_i) + \delta_j(x_{i+2^j-1})$ является функцией от переменных $\delta_{j-1}(x_i), \dots, \delta_0(x_i)$, причем от $\delta_{j-1}(x_i)$ она зависит линейно.

4. Оценка числа состояний автоматов

Т-функции могут быть рассмотрены как автоматные функции (см. гл. 8 в [6]), соответствующие автоматам Мили, и их свойства существенным образом зависят от свойств этих автоматов, в частности, от того, является автомат конечным или бесконечным. Напомним, что из-за неоднозначности задания автомата будем говорить, что Т-функции соответствует бесконечный автомат, если не существует автомата с конечным числом состояний. Далее будет показано, что $F_C(x)$ может соответствовать как конечный, так и бесконечный автомат.

Любая функция $f: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$, удовлетворяющая условию Липшица с константой 1, для любого натурального $k \in \mathbf{N}$ может быть представлена в виде

$$f(x) = f(x \bmod p^k) + p^k g_z(y),$$

где

$$y = \frac{1}{p^k}(x - (x \bmod p^k)) \in \mathbf{Z}_p, \quad z = z(x) = x \bmod p^k,$$

а $g_z: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ также удовлетворяют условию Липшица с константой 1.

В случае, если f соответствует некоторому автомату с конечным числом состояний, то число различных функций g_z при всевозможных значениях $z = x \bmod p^k$ и всех $k \in \mathbf{N}$ также конечно. Следовательно, существует такое натуральное $N \in \mathbf{N}$, что g_z для любого $k > N$ при $z = x \bmod p^k$ принадлежит

$$G_N = \{g_z: z = x \bmod p^N\}.$$

Таким образом, всего различных функций g_z не больше чем p^N .

Если f соответствует автомату с бесконечным числом состояний, то для любого натурального $N \in \mathbf{N}$ существует такое натуральное $k > N$, что g_z при $z = x \bmod p^k$ не принадлежит G_N .

Теорема 4. Пусть $C \in \mathbf{Z}_2$ является отрицательным целым числом, тогда F_C соответствует конечному автомату.

Доказательство. Число C может быть представлено в виде $C = e^- 2^k + c$, где $c \in \mathbf{Z}/2^k \mathbf{Z}$, а $e^- = (\dots 111111)_2 = -1 \in \mathbf{Z}_2$. Тогда

$$F_C(x) = x + (x^2 \vee (e^- 2^k + c)) = x + e^- 2^k + ((x^2 \bmod 2^k) \vee c),$$

так как $e^- \vee x = (\dots 111111)_2 \vee x = (\dots 111111)_2 = e^-$. Пусть $z = x \bmod 2^k$, тогда

$$\begin{aligned} F_C(x) &= F_C(x \bmod 2^k) + 2^k g_z(y) \\ &= (x \bmod 2^k) + ((x^2 \bmod 2^k) \vee c) + (y + e^-) 2^k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$g_z(y) = y + e^- = y - 1.$$

Таким образом, для всех натуральных $N > k$ мощность $|G_N| = |G_k|$ и F_C представима конечным автоматом.

Другими словами, распределение на плоскости при отрицательном рациональном целом $\mathbf{C}$ будет соответствовать распределению функции $f(x) = x - 1$, что и было показано на примере и рисунках в [6].

Теорема 5. Пусть $\mathbf{C} \in \mathbf{Z}_2$ является положительным целым числом, тогда $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}$ не представим конечным автоматом.

Доказательство. Величина $\mathbf{C}$ может быть представлена в виде $\mathbf{C} = c$, где $c \in \mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}$. Тогда

$$\mathbf{F}_{\mathbf{C}}(x) = x + (x^2 \vee c) = (x \bmod 2^k) + y2^k + ((x \bmod 2^k + y2^k)^2 \vee c).$$

Так как

$$\begin{aligned} (x \bmod 2^k + y2^k)^2 \vee c &= y^2 2^{2k} + 2(x \bmod 2^k)y2^k + ((x \bmod 2^k)^2 \vee c) \\ \mathbf{F}_{\mathbf{C}}(x \bmod 2^k) &= (x \bmod 2^k) + ((x \bmod 2^k)^2 \vee c), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathbf{C}}(x) &= (y^2 2^{2k} + 2(x \bmod 2^k)y + y)2^k + \mathbf{F}_{\mathbf{C}}(x \bmod 2^k) \\ &= (y^2 2^{2k} + 2zy + y)2^k + \mathbf{F}_{\mathbf{C}}(z) \\ &= q_z(y)2^k + \mathbf{F}_{\mathbf{C}}(z), \end{aligned}$$

где

$$q_z(y) = y^2 2^k + 2zy + y$$

есть полином второй степени. Согласно [6], если автоматная функция $\Psi = \Psi_{\mathcal{U}}$ является полиномом степени, большей 1, то соответствующий ей автомат $\mathcal{U}$ не имеет эквивалентных состояний и, соответственно, бесконечен.

В случае, если существует конечный автомат, реализующий $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}$, то можно также построить и конечный автомат, реализующий полином второй степени, что приводит к противоречию.

Теорема 6. Пусть $\mathbf{C} \in \mathbf{Z}_2 \setminus \mathbf{Z}$, тогда любой автомат Мили $\mathcal{U}$, соответствующий $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}$, не имеет эквивалентных состояний.

Доказательство. Предположим противное, то есть, пусть существует такой автомат $\mathcal{U}$, соответствующий $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}$, что при двух различных входах конечной длины $\mathcal{U}$ перейдет в эквивалентные состояния, при которых для любой входной последовательности выход будет одинаковым в любой момент времени. Иными словами существуют такие $x \in \mathbf{Z}/2^l\mathbf{Z}$ и $y \in \mathbf{Z}/2^s\mathbf{Z}$, $l, s \in \mathbf{N}$, что

$$\delta_{t+l}(\mathbf{F}_{\mathbf{C}}(x + z2^l)) = \delta_{t+s}(\mathbf{F}_{\mathbf{C}}(y + z2^s)) = \gamma_t(z)$$

для всех $z \in \mathbf{Z}_2$ и $t \in \mathbf{N} \cup \{0\}$,

$$\begin{aligned} \gamma_t(z) &= \gamma_t(z, x, y) = \mathbf{F}_{\mathbf{C}}(x + z2^l) \\ &= x + z2^l + ((x^2 + zx2^{l+1} + z^2 2^{2l}) \vee \mathbf{C}). \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $t > 2l$, тогда

$$\begin{aligned}\gamma_t(z) &= \delta_{t+l}(\mathbf{F}_C(x + z2^l)) \\ &= \delta_t(z) \oplus (\delta_t(2zx + z^22^l) \vee \delta_{t+l}(\mathbf{C})) \oplus r_t^x(z),\end{aligned}\quad (2)$$

где $r_t^x(z)$ — мажоритарная функция, то есть функция вида $m(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$, именно,

$$\begin{aligned}r_t^x(z) &= m(\delta_{t-1}(2zx + z^22^l) \vee \delta_{t+l-1}(\mathbf{C}), \delta_{t-1}(z), r_{t-1}^x) \\ &= m(\gamma_{t-1}(z), \delta_{t-1}(z), r_{t-1}^x).\end{aligned}$$

Аналогичные соотношения верны и для $r_t^y(z)$ при $t > 2s$.

Положим

$$r_0^x(z) = r_0^y(z) \oplus \tau, \quad \tau \in \{0, 1\},$$

тогда для всех $t \in \mathbb{N}$

$$r_t^x(z) = r_t^y(z) \oplus \tau.$$

При $t > 4 \max(l, s) + 1$ таком, что

$$\delta_{t+l}(\mathbf{C}) = 0, \quad \delta_{t+s}(\mathbf{C}) = 1, \quad (3)$$

для всех $z \in \mathbb{Z}_2$ должно быть истинно выражение

$$\begin{aligned}\delta_t(2zx + z^22^l) \vee \delta_{t+l}(\mathbf{C}) &= \delta_t(2zx + z^22^l) \\ &= \gamma_t(z) \oplus \delta_t(z) \oplus r_t^x \oplus r_t^y \\ &= \delta_t(2zy + z^22^s) \vee \delta_{t+s}(\mathbf{C}) \oplus \tau \\ &= 1 \oplus \tau.\end{aligned}$$

Пусть $z = 2^{t-1}$, тогда

$$\delta_t(2zx + z^22^l) = \delta_t(2^t x + 2^{l+2(t-1)}) = \delta_t(2^t x) = \delta_0(x) = 1.$$

Далее положим

$$\begin{aligned}z &= 2^{t-1} + 2^{t-1-\xi}, \quad \xi \in \{1, \dots, l-1\}, \\ \delta_t(2^t x + 2^{t-\xi} x + (2^{2(t-1)} + 2^{2(t-1-\xi)} + 2^{(t-1)+(t-1-\xi)+1})2^l) &= \delta_0(x) + \delta_\xi(x) = 1.\end{aligned}$$

Следовательно, $x \equiv 1 \pmod{2^l}$ при условии (3). Рассмотрим два состояния $x' = x + (z \bmod 2^\xi)2^l$ и $y' = y + (z \bmod 2^\xi)2^s$ при $\xi \in \{1, 2, \dots, 2^{\min(l, s)}\}$. В этом случае значение $\gamma_t(z', x', y')$ также представимо в виде (1), так как t было выбрано таким образом, что $t > 4, \max(l, s) + 1 > 2(\max(l, s) + \min(l, s))$, что приводит к соответствующему ограничению на x' :

$$x' = x + (z \bmod 2^\xi)2^l \equiv 1 \pmod{2^{l+\min(l, s)}}.$$

Отсюда получаем, что $z \bmod 2^\xi = 0$ и предположение о существовании двух эквивалентных состояний автомата $\mathcal{U}$ при условии (3) неверно.

В случае, когда $\delta_{t+l}(\mathbf{C}) = \delta_{t+s}(\mathbf{C})$ для всех t , достаточно взять $t > 4 \max(l, s) + 1$ такое, при котором $\delta_{t+l}(\mathbf{C}) = \delta_{t+s}(\mathbf{C}) = 0$, так как по условию $\mathbf{C} \in \mathbb{Z}_2 \setminus \mathbb{Z}$ и, следовательно, для

любого натурального n найдется $\delta_{n+j}(\mathbf{C}) = 0$. Соответственно, для всех $z \in \mathbf{Z}_2$ должно выполняться равенство $\delta_t(2zx + z^2 2^l) = \delta_t(2zy + z^2 2^s)$, из чего по аналогии, подставляя значения $z = 2^{t-1} + 2^{t-1-\xi}$ при различных ξ , получим, что $x \equiv y \pmod{2^{\min(l,s)}}$.

Таким образом, не существует автомата $\mathcal{U}$, соответствующего $\mathbf{F}_\mathbf{C}$ и имеющего эквивалентные состояния.

Следствие 3. Пусть $\mathbf{C} \in \mathbf{Z}_2 \setminus \mathbf{Z}$, тогда $\mathbf{F}_\mathbf{C}$ не представим конечным автоматом.

5. Распределение пар в $\mathbf{Z}_2$

Для оценки распределения пар $(x_i, \mathbf{F}_\mathbf{C}(x_i))$ в $\mathbf{Z}_2$ используется техника, предложенная в [6].

Для заданного преобразования $f: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$, фиксированных $k, n \in \mathbf{N}$, рассмотрим множество

$$\mathcal{P}_n^k(f) = \left\{ \left(\frac{x}{p^n}, \frac{f(x) \bmod p^n}{p^n}, \dots, \frac{f^{k-1}(x) \bmod p^n}{p^n} \right) : x \in \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} \right\}$$

и замыкание объединения $\mathcal{P}_n^k(f)$ при всех n

$$\mathcal{P}^k(f) = \text{Cl} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n^k(f) \right)$$

где $\text{Cl}(A)$ является замыканием ограниченного множества $A \subset [0, 1]^2$. Следовательно, $\mathcal{P}^k(f)$ измеримо по Лебегу.

Определение 5. Введем

$$\alpha_k(f) = \zeta_k(\mathcal{P}^k(f)),$$

где ζ_k — мера Лебега на $\mathbf{R}$.

Теорема 7. Если $f: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ удовлетворяет условию Литишица с константой 1, то $\alpha_2(f)$ равна 0 или 1.

Эта теорема доказана в [6] и названа там законом нуля и единицы.

Пусть $\alpha_2(f) = 1$, тогда для каждой точки $(a, b) \in [0, 1]^2$, для произвольного вещественного $\varepsilon > 0$ существует точка $(\tilde{y}, \tilde{v}) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n^k(f)$, лежащая в ε -окрестности $U_\varepsilon(a, b)$ точки (a, b) : $(\tilde{y}, \tilde{v}) \in \mathcal{P}^k(f) \cap U_\varepsilon(a, b)$. По построению $\mathcal{P}^k(f)$, для $(\tilde{y}, \tilde{v})$ существует такое натуральное t , что значения $\tilde{y} \cdot p^t$ и $\tilde{v} \cdot p^t$ являются натуральными числами, а при $t - 1$ — нет. Следовательно,

$$f(\tilde{y} \cdot p^t) \equiv \tilde{v} \cdot p^t \pmod{p^t}.$$

В случае $\alpha_2(f) = 0$ в любой ε -окрестности любой точки $(a, b) \in [0, 1]^2$ найдется меньшая окрестность $U_{\varepsilon'}(a + \xi_a, b + \xi_b) \in U_\varepsilon(a, b)$, не имеющая общих точек с $\mathcal{P}^k(f)$:

$$U_{\varepsilon'}(a + \xi_a, b + \xi_b) \cap \mathcal{P}^k(f) = \emptyset.$$

Рассмотрим $\alpha_2(\mathbf{F}_\mathbf{C})$ и покажем, что даже если $\mathbf{F}_\mathbf{C}$ соответствует бесконечному автомату, мера Лебега замыкания множества всех достижимых точек может быть равна как 0, так и 1.

Теорема 8. Если $C \in \mathbf{Z}_2$ является отрицательным целым числом, то $\alpha_2(\mathbf{F}_C) = 0$.

Доказательство. Так как при отрицательном целом значении C автоматная функция $\mathbf{F}_C$ соответствует конечному автомату (4), $\alpha_2(\mathbf{F}_C) = 0$ по теореме 11.10 в [6].

Теорема 9. Если $C \in \mathbf{Z}_2$ является положительным целым числом, то $\alpha_2(\mathbf{F}_C) = 1$.

Доказательство. Так как при положительном целом значении C автоматная функция $\mathbf{F}_C$ соответствует бесконечному автомату $\mathcal{U}$ (4) и $\mathcal{U}$ может быть представлен как композиция некоторого конечного автомата, обрабатывающего конечное число начальных входных символов, и бесконечного автомата, соответствующего квадратичной функции $q_z(y) = y^2 2^k + 2zy + y$, по теореме 11.11 из [6] множество $\mathcal{P}^2(f)$ является всюду плотным на $[0, 1]^2$ и, следовательно, $\alpha_2(\mathbf{F}_C) = 1$.

Определение 6. Пусть $x \in \mathbf{Z}_p$, тогда для всех натуральных $k, n \in \mathbf{N}$ определим функцию

$$H_p(x, n, k) = \frac{1}{p^n}((x \bmod p^{n+k}) - (x \bmod p^n)).$$

Ясно, что для любых допустимых значений аргументов $H_p(x, n, k) \in \{0, 1, \dots, p^k - 1\}$.

Лемма 1. Пусть $f_s(x) = (x2^l + s)^2: \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2$, где $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $s \in \{0, 1, \dots, 2^l - 1\}$. Тогда для любого $N \in \mathbf{N}$ и произвольных значений $a, b \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ для произвольного натурального $n > 3(3N + l + 2)$ существует такое $x \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$, что

$$\begin{aligned} H_2(x, n - N, N) &\equiv a \pmod{2^N}, \\ H_2(f_s(x), n + l - N, N) &\equiv b \pmod{2^N}. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Положим

$$\xi = 3N + l + 2.$$

Рассмотрим значение функции $f_s(x)$ при $x = a2^{n-N} + x_1 2^{n-l-\xi} + 2^{\xi-N-1}$, где $x_1 \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$:

$$\begin{aligned} f_s(x) &= (x2^l + s)^2 = (a2^{n-N+l} + x_1 2^{n-\xi} + 2^{\xi-1-N+l} + s)^2 \\ &= a^2 2^{2n+N+(n-3N+2l)} + x_1^2 2^{2n+N+(n-2\xi-N)} + 2^{2(\xi-1-N+l)} \\ &\quad + s^2 + ax_1 2^{n+N+(n-\xi-2N+l+1)} + a2^{n+N+(\xi-3N+2l)} \\ &\quad + as2^{n+1-N+l} + x_1 2^{n-N+l} + x_1 s 2^{n-\xi+1} + s2^\xi. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} 2^{2(\xi-1-N+l)} + s^2 + s2^\xi &< 2^{2\xi} < 2^{n-\xi} < 2^{n-N+l-1}, \\ x_1 s 2^{n-\xi+1} &< 2^{n-\xi+1+N+l} < 2^{n-N-1}, \end{aligned}$$

получаем, что

$$H_2(2^{2(\xi-1-N+l)} + s^2 + s2^\xi + x_1 s 2^{n-\xi+1}, n + l - N, N) = 0.$$

Далее, $n - 3N + 2l > 0$, $n - 2\xi - N > 0$, $n - \xi - 2N + l + 1 > 0$, $\xi - 3N + 2l > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} a^2 2^{n+N+(n-3N+2l)} + x_1^2 2^{n+N+(n-2\xi-N)} \\ + ax_1 2^{n+N+(n-\xi-2N+l+1)} + a 2^{n+N+(\xi-2N+l)} \equiv 0 \pmod{2^{n+N}} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} H_2(f_s(x), n + l - N, N) &= H_2(as 2^{n+1-N+l} + x_1 2^n, n + l - N, N) \\ &= H_2(2as + x_1, 0, N). \end{aligned}$$

Условие (4) выполняется при значении $x_1 \equiv b - 2as \pmod{2^N}$.

Теорема 10. Пусть $f_s(x) = (x2^l + s)^2: \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2$, где $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $s \in \{0, 1, \dots, 2^l - 1\}$. Тогда $\alpha_2(f_s) = 1$ для всевозможных значений параметров l и s .

Доказательство. Достаточно доказать (см. замечание 11.12 в [6]), что для любого $N \in \mathbf{N}$ и произвольных значений $a, b \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ при некотором натуральном $n \geq N$ существует такое $x \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$, что выполняется условие (4). По лемме 1, при $n > 3(3N + l + 2)$ такое x существует.

Лемма 2. Пусть $f(x): \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2$, $g(x) = x + f(x)$. Положим

$$f_s(x) = f(x2^l + s): \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2,$$

где $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $s \in \{0, 1, \dots, 2^l - 1\}$. Если $\alpha_2(f_s) = 1$ при некоторых значениях параметров l и s , то $\alpha_2(g_s) = 1$.

Доказательство. Так как $\alpha_2(f_s) = 1$, для любого $N \in \mathbf{N}$ и произвольных значений $a, b \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ существует такое натуральное $n > N$ и $x \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$, что

$$\begin{aligned} H_2(x, n - N, N) &\equiv a \pmod{2^N}, \\ H_2(f_s(x), n + l - N, N) &\equiv b - a \pmod{2^N}. \end{aligned}$$

Рассмотрим значение функции $g_s(x)$ при тех же значениях параметров:

$$\begin{aligned} g_s(x) &= f_s(x) + (x2^l + s) \equiv (b - a)2^n + (f_s(x) \bmod 2^n) + a2^n + ((x2^l + s) \bmod 2^n) \\ &\equiv b2^n + (g_s(x) \bmod 2^n) \pmod{2^{n+N}} \end{aligned}$$

Поэтому условие (4) выполняется для всех допустимых значений a, b и $\alpha_2(g_s) = 1$.

Определение 7. Под n -граммой будем понимать $\alpha \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$, $n \in \mathbf{N}$.

Определение 8. Будем говорить что $c \in \mathbf{Z}_p$ реализует n -грамму α , если существует такое $l \in \mathbf{N}$, что $H_p(c, l, n) = \alpha$.

Теорема 11. Пусть $C \in \mathbf{Z}_2$ таково, что C реализует нулевую n -грамму бесконечно много раз. Положим

$$g_s(x) = \mathbf{F}_C(x2^l + s), \quad l \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad s \in \{0, 1, \dots, 2^l - 1\}.$$

Тогда $\alpha_2(g_s) = 1$ для всевозможных значений параметров l и s .

Доказательство. По условию, для любого $N \in \mathbf{N}$ существует $n > 3(3N + l + 2) + N$ такое, что

$$H_2(\mathbf{C}, n - N, N) \equiv 0 \pmod{2^N}.$$

По лемме 1, для произвольных значений $a, b \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ существует $x_0 \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ такой, что выполняется условие (4) для квадратичной функции $f_s(x) = (x2^l + s)^2$. Рассмотрим при данном x_0 значение функции $g'_s(x) = f_s(x) \vee \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} g'_s(x_0) &\equiv (b2^{n-N+l} + (f_s(x_0) \bmod 2^{n-N+l})) \vee (\mathbf{C} \bmod 2^{n+l}), \\ &\equiv b2^{n-N+l} + (f_s(x_0) \bmod 2^{n-N+l}) \vee (\mathbf{C} \bmod 2^{n-N+l}), \\ &\equiv b2^{n-N+l} + (g'_s(x_0) \bmod 2^{n-N+l}) \pmod{2^{n+l}} \end{aligned}$$

Поэтому $\alpha_2(g'_s) = 1$ и в соответствии с леммой 2 значение $\alpha_2(g_s) = 1$.

Теорема 12. Пусть $\mathbf{C} \in \mathbf{Z}_2$ таково, что существует такое натуральное $N \in \mathbf{N}$, что $\mathbf{C}$ не реализует нулевую N -грамму, тогда $\alpha_2(\mathbf{F}_\mathbf{C}) = 0$.

Доказательство. Пусть $b \equiv a \pmod{2^{N+1}}$, тогда для того, чтобы выполнялось условие (4) для $\mathbf{F}_\mathbf{C}$, необходимо, чтобы оно выполнялось для функции $x^2 \vee \mathbf{C}$ при

$$a' \equiv a \pmod{2^{N+1}}, \quad b' \equiv b - a \equiv 0 \pmod{2^{N+1}}.$$

Но это невозможно, так как $\sum_{i=0}^N \delta_{k+i}(\mathbf{C}) \neq 0$ для всех $k \in \mathbf{N}$ и для любого x выполняется неравенство $H_2(x^2 \vee \mathbf{C}, k, N) \neq 0$. Следовательно, условие (4) не выполняется для всех пар точек вида $(a, 0)$. Из закона 0 и 1 (см. теорему 7) непосредственно следует утверждение теоремы.

Следствие 4. Пусть $\mathbf{C} \in \mathbf{Z}_2 \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{N}_0)$, тогда $\alpha_2(\mathbf{F}_\mathbf{C}) = 0$.

Следствие 5. Пусть $\mathbf{C} \in \mathbf{Z}_2$ является отрицательным целым числом, тогда $\alpha_2(\mathbf{F}_\mathbf{C}) = 0$.

6. Свойства множества предельных точек $\mathcal{P}^2(\mathbf{F}_\mathbf{C})$

В случае, если $\alpha_2(\mathbf{F}_\mathbf{C}) = 0$, особый интерес представляет множество предельных точек $\mathcal{P}^2(\mathbf{F}_\mathbf{C})$, так как, зная это множество в любой момент времени, можно проверять в первую очередь именно их ε -окрестности при данном входе x .

Определение 9. Для $f: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ обозначим через $\mathcal{L}\mathcal{P}^k(f)$ множество предельных неизолированных точек $\mathcal{P}^k(f)$.

Далее будет рассмотрена структура множества $\mathcal{L}\mathcal{P}^2(\mathbf{F}_\mathbf{C})$ и оценена размерность Хаусдорфа (также известная как размерность Хаусдорфа–Безиковича) этого множества, которая может быть использована для более точного описания структуры измеримых множеств с нулевой мерой Лебега.

Определение 10. Для всех $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} l_\alpha(x) &= \begin{cases} x + \alpha, & \text{при } x + \alpha \leq 1, \\ x + \alpha - 1 & \text{при } x + \alpha > 1, \end{cases} \\ A_\alpha &= \{(x, l_\alpha(x)) : x \in [0, 1]\} \subset [0, 1]^2. \end{aligned}$$

Определение 11. Пусть $C \in \mathbf{Z}_2 \cap \mathbf{Q}$ представимо в виде

$$C = c \sum_{i=0}^{\infty} 2^{li}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad c \in \{1, 2, \dots, 2^l - 1\},$$

тогда обозначим

$$\text{Coord}_C = \left\{ \alpha_j : \alpha_j = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^j}{2^{i+1}} \in [0, 1], \alpha_i^j \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, \dots, l-1\} \right\},$$

для которого при всех $t, j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$, если $\delta_{(l-1-j-t) \pmod l}(c) = 1$, то для всех $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ значение $\alpha_{ls+t}^j = 0$, все остальные α_i^j принимают произвольные значения из $\{0, 1\}$.

Теорема 13. Пусть $C \in \mathbf{Z}_2 \cap \mathbf{Q}$, тогда

$$\mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C) = \bigcup_{\alpha \in \text{Coord}_C} A_\alpha.$$

Доказательство. Пусть $(u, v) \in \mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C)$ — произвольная неизолированная предельная точка множества $\mathcal{P}^2(\mathbf{F}_C)$. Тогда существует последовательность $(x_i, \mathbf{F}_C(x_i) \pmod{2^{n_i}})$, $x_i \in \{0, 1, \dots, 2^{n_i} - 1\}$, $n_{i+1} > n_i$, такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{x_i}{2^{n_i}}, \frac{\mathbf{F}_C(x_i) \pmod{2^{n_i}}}{2^{n_i}} \right) = (u, v).$$

Так как

$$C \equiv (c \pmod{2^{n_i \pmod l}}) 2^{n_i - (n_i \pmod l)} + c \sum_j 2^{lj} \pmod{2^{n_i}}$$

для любого n_i , мы видим, что

$$(x_i^2 \vee C) \pmod{2^{n_i}} = \lfloor \alpha 2^{n_i} \rfloor$$

для некоторого $\alpha \in \text{Coord}_C$. Следовательно, точка (u, v) лежит на некоторой прямой l_α . Из этого можно заключить, что

$$\mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \text{Coord}_C} A_\alpha.$$

Обратно, для каждой точки произвольной прямой $l_\alpha \subset A_\alpha$ при $\alpha \in \text{Coord}_C$ можно сопоставить сходящуюся к ней последовательность $(x_i/2^{n_i}, \mathbf{F}_C(x_i) \pmod{2^{n_i}}/2^{n_i})$.

Теорема 14. Пусть $C \in \mathbf{Z}_2 \cap \mathbf{Q}$ представимо в виде

$$C = c \sum_{i=0}^{\infty} 2^{li}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad c \in \{1, 2, \dots, 2^l - 1\},$$

тогда размерность Хаусдорфа множества $\mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C)$ равна $\text{wt}(c)/l$, где

$$\text{wt}(c) = \sum_{i=0}^{l-1} \delta_i(c)$$

— вес Хэмминга.

Доказательство. Пусть Θ_j — покрытие множества $\mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C)$,

$$\Theta_j = \bigcup_{\beta} \{A_{\beta+\xi} : \xi \in [0, 1/2^{l(j+1)}]\} = \bigcup_{\beta} B_{\beta}$$

для всех $\beta \in [0, 1]$, $\beta 2^{l(j+1)} = c \sum_{i=0}^{j-1} 2^{li} \in \mathbf{N}$, для которого по построению

$$\Theta_0 \subset \Theta_1 \subset \dots \subset \Theta_n \subset \dots \subset \mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C).$$

С учетом того, что мера Лебега элементов B_{β} равна $2^{-l(j+1)}$ и Θ_j является ε -покрытием $\mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C)$ при $\varepsilon = 2^{-l(j+1)}$, значение α -меры Хаусдорфа удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} M_{\alpha}(\mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C)) &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{\beta} (2^{-l(j+1)})^{\alpha} = \lim_{j \rightarrow \infty} 2^{wt(c)(j+1)} (2^{-l(j+1)})^{\alpha} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} 2^{(j+1)(wt(c)-\alpha l)}. \end{aligned}$$

Для любого минимального ε -покрытия Θ'_{ε} множества $\mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C)$ можно найти натуральное j' такое, что $\Theta_{j'} \subset \Theta'_{\varepsilon}$ и

$$M_{\alpha}(\mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \Theta'_{\varepsilon} \geq \lim_{j' \rightarrow \infty} \sum_{\beta} (2^{-l(j'+1)})^{\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$M_{\alpha}(\mathcal{LP}^2(\mathbf{F}_C)) = \lim_{j \rightarrow \infty} 2^{(j+1)(wt(c)-\alpha l)}.$$

При $\alpha > \alpha_0 = wt(c)/l$ α -мера равна нулю. При $\alpha < \alpha_0 = wt(c)/l$ α -мера равна ∞ . Таким образом, α_0 является размерностью Хаусдорфа.

7. Заключение

В работе были детально рассмотрены свойства гаммы, вырабатываемой ГПСЧ Климова–Шамира, и показаны их неудовлетворительные статистические свойства. Некоторые исследователи, отмечая слабые криптографические свойства генератора при $c < 2^{n/3}$, предлагают выбирать значения $c \geq 2^{n/3}$ (см. раздел 2). В данном случае, в соответствии с теоремой 2, множество пар точек $(x, F_c(x))$ распадается на полосы. Техника, предложенная в теореме, наглядно продемонстрирована в примере 2.

Показано (см. следствие 2), что в случае, если $n = 32$, требуется не более 9 различных пар $(x_i, F_c(x_i))$ для определения значения c с вероятностью $P \geq 0,999$. Для изучения свойств распределения пар $(x, f(x))$ Т-функции $f: \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ продемонстрирован подход, впервые описанный в 2009 г. в [6], включающий исследование этого распределения в более общем случае, с использованием продолжения Т-функции f на множество целых p -адических чисел $F: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$. В рамках этого подхода исследуется мощность множества состояний $\mathcal{N}$ автомата Мили $\mathcal{U} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{N}, \mathcal{M}, f, F, u_0 \rangle$, для автоматной функции $\Psi_{\mathcal{U}}$ которого существует взаимно однозначное соответствие с F .

Если существует такой автомат с конечным числом состояний, то в общем случае ГПСЧ или поточный шифратор не может считаться хорошим.

Для ГПСЧ Климова–Шамира $\mathbf{F}_C$, в зависимости от значения константы $\mathbf{C} \in \mathbf{Z}_2$, полностью описаны условия, при которых существует и не существует соответствующий конечный автомат $\mathcal{U}$.

Определены условия, при которых $\mathbf{F}_C$ позволяет приблизить произвольную точку $(a, b) \in [0, 1]^2$ точкой $(x/p^n, (\mathbf{F}_C(x) \bmod p^n)/p^n)$, вырабатываемой $\mathbf{F}_C$ на входе длины n , что является одной из характеристик качества гаммы при использовании $\mathbf{F}_C$ как генератора псевдослучайных чисел. В терминах монографии [6] проведен анализ функции $\alpha_2(\mathbf{F}_C)$ — меры Лебега замыкания проекции на $[0, 1]^2$ множества всех достижимых точек.

Отметим, что в поточных шифраторах в целях увеличения быстродействия используются преобразования $F: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$, удовлетворяющие условию Липшица с константой 1, соответствующие конечным автоматам. Например, к их числу относятся поточный шифратор ABC и семейство TSC-i. В этом случае, согласно теореме 11.10 из [6], всегда $\alpha_2(F) = 0$.

Для оценки структуры множества $\mathcal{P}^2(F)$ предложен подход на примере $\mathbf{F}_C$, связанный с оценкой множества всех предельных неизолированных точек $\mathcal{LP}^2(F)$ с использованием размерности Хаусдорфа.

Отметим, что использование операции возведения в квадрат сравнивает по скорости работы F_C и квадратичные генераторы. Теоретические исследования распределения пар (x_i, x_{i+1}) , троек (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) , разреженных пар (x_i, x_{i+2}) проводились в классе полиномов степени 2 (см. [10, 8, 9] соответственно) в середине 90-х и позволяют строить квадратичные конгруэнтные генераторы с равномерным распределением.

Автор выражает признательность В. С. Анашину за ценные советы и поддержку при написании статьи.

Список литературы

1. Анашин В. С., Равномерно распределенные последовательности целых p -адических чисел. *Математические заметки* (1994) **55**, №2, 3–46.
2. Anashin V. S., Uniformly distributed sequences over p -adic integers. In: *Proc. Intern. Conf. "Number theoretic and algebraic methods in computer science"* (van der Poorten A. J., Shparlinsky I., Zimmer H. G., eds.). World Scientific, Singapore, 1995, pp. 1–18.
3. Anashin V. S., Uniformly distributed sequences in computer algebra, or how to construct program generators of random numbers. *J. Math. Sci.* (1998) **89**, №4, 1355–1390.
4. Анашин В. С., Равномерно распределенные последовательности целых p -адических чисел. *Дискретная математика* (2002) **14**, №4, 3–64.
5. Anashin V. S., Ergodic transformations in the space of p -adic integers. *AIP Conf. Proc.* (2006) **826**, 3–24.
6. Anashin V. S., Khrennikov A. Yu., *Applied algebraic dynamics*. de Gruyter, Berlin, 2009.
7. Bénony V., Recher F., Wegrzynowski E., Fontaine C., Cryptanalysis of a particular case of Klimov–Shamir Pseudo-Random Generator. *Lect. Notes Computer Sci.* (2004) **3486**, 313–322.
8. Eichenauer-Herrmann J., Quadratic congruential pseudorandom numbers: Distribution of triples. *J. Comput. Appl. Math.* (1995) **62**, 239–253.
9. Eichenauer-Herrmann J., Quadratic congruential pseudorandom numbers: Distribution of lagged pairs. *J. Comput. Appl. Math.* (1997) **79**, 75–85.
10. Emmerich F., Equidistribution properties of quadratic congruential pseudorandom numbers. *J. Comput. Appl. Math.* (1997) **79**, 207–214.
11. Klimov A., *Applications of T-functions in cryptography*, PhD Thesis, Dept. Appl. Math. Computer Sci. Weizmann Institute of Science, Rehovot, 2005.
12. Klimov A., Shamir A., A new class of invertible mappings. *Lect. Notes Comput. Sci.* (2002) **2523**, 470–483.

13. Klimov A., Shamir A., Cryptographic applications of T-functions. *Lect. Notes Comput. Sci.* (2003) **3006**, 248–261.
14. Klimov A., Shamir A., New cryptographic primitives based on multiword T-functions. *Lect. Notes Comput. Sci.* (2004) **3017**, 1–15.
15. Klimov A., Shamir A., New applications of T-functions in block ciphers and hash functions. *Lect. Notes Comput. Sci.* (2005) **3557**, 18–31.
16. Molland H., Helleseht T., A linear weakness in the Klimov-Shamir T-function. In: *Proc. ISIT'2005*. IEEE, 2005, pp. 1106–1110.
17. Molland H., Helleseht T., Linear properties in T-functions. *IEEE Trans. Inform. Theory* (2006) **52**, №11, 5151–5157.
18. Wang J.-S., Qi W.-F., Linear equation on polynomial single cycle T-functions. *Lect. Notes Comput. Sci.* (2008) **4990**, 256–270.

Статья поступила 16.04.2010.