Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Т. Лупашко, Н. И. Санду, О полугруппах эндоморфизмов
прямых произведений коммутативных луп Муфанг, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 1, 84–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:32:11

О полугруппах эндоморфизмов прямых произведений коммутативных луп Муфанг

© 2011 г. Н. Т. Лупашко, Н. И. Санду

Доказывается, что полугруппа эндоморфизмов коммутативной лупы Муфанг КЛМ, обладающей разложением в прямое произведение своих подлуп, изоморфна полугруппе M , M -матриц. Вводится понятие голоморфа КЛМ и для КЛМ, обладающих прямым разложением, приводится матричное представление голоморфа.

Известно, что эндоморфизмы и автоморфизмы векторных пространств могут быть представлены матрицами над соответствующими полями. Это матричное представление играет большую роль в теории линейных групп — групп автоморфизмов векторных пространств. Аналогичное матричное представление рассматривается и для прямых произведений мультиоператорных групп [1]. В данной работе этот вопрос рассматривается для наиболее изученного класса неассоциативных луп — коммутативных луп Муфанг (кратко КЛМ). Доказывается, что полугруппа эндоморфизмов КЛМ, обладающая разложением в прямое произведение своих подлуп, изоморфна полугруппе M , M -матриц. Имеются и другие сведения об эндоморфизмах и автоморфизмах прямых разложений КЛМ. В частности, вводится понятие голоморфа КЛМ и приводится матричное представление голоморфа КЛМ, обладающих разложением в прямое произведение своих подлуп.

Необходимые сведения по теории луп можно найти в [2]. Напомним только, что группа внутренних подстановок произвольной лупы порождается подстановками

$$\begin{aligned}T(a) &= L^{-1}(a)R(a), & L(a, b) &= L^{-1}(a, b)L(a)L(b), \\R(a, b) &= R^{-1}(a, b)R(b)R(a),\end{aligned}$$

где $L(a)x = ax$, $R(a)x = xa$. В КЛМ внутренние подстановки являются ее автоморфизмами.

Пусть КЛМ Q разлагается в прямое произведение своих компонент

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_r \times \dots \quad (1)$$

Если $u \in Q_i, v \in Q_j, w \in Q_t$ и по крайней мере два из трех индексов i, j, t различны, то из определения прямого произведения следует, что $uv \cdot w = u \cdot vw$. Более того, рассмотрим произведение $a = (a_1 a_2 \dots a_n)_\alpha$ при некотором распределении скобок α , где $a_i \in Q_j$. Если $(a_1 a_2 \dots a_n)_\alpha$ содержит не более двух сомножителей $a_i, a_j, i, j = 1, \dots, n$, принадлежащих одной и той же компоненте Q_k , то значение выражения $(a_1 a_2 \dots a_n)_\alpha$ не меняется при любом другом распределении скобок α и при любой перестановке сомножителей $a_1, a_2, \dots, a_n$. Такое свойство выражения a назовем компонентно ассоциативным.

Доказательство этого утверждения проведем индукцией по длине n слова a . Его справедливость для $n = 3$ указана выше. Пусть $n > 3$ и $a = uv$. Предположим, что u содержит сомножитель a_k . Тогда по индуктивному предположению $u = u_1 a_k$. Утверждение будет доказано, если мы покажем, что $a = u_1 a_k \cdot v = u_1 \cdot a_k v$ или $(u_1, a_k, v) = 1$, где $xy \cdot z = (x \cdot yz)(x, y, z)$. Предположим, что $u_1 = u_2 u_3$. Используем тождество

$$(xy, z, t) = (x, z, t)((x, z, t), x, y) \cdot (y, z, t)((y, z, t), y, x),$$

справедливое в произвольной КЛМ. Тогда

$$\begin{aligned} (u_1, a_k, v) &= (u_2 u_3, a_k, v) \\ &= (u_2, a_k, v)((u_2, a_k, v), u_2, u_3) \cdot (u_3, a_k, v)((u_3, a_k, v), u_3, u_2) = 1, \end{aligned}$$

поскольку по индуктивному предположению $(u_2, a_k, v) = 1$, $(u_3, a_k, v) = 1$. Если же $v = v_1 v_2$, то достаточно воспользоваться тождеством $(x, y, z) = (y, z, x)$ (см. [2]). Этим показано, что КЛМ Q является компонентно ассоциативной.

Ввиду разложения (1) каждый элемент $a \in Q$ имеет вид $a = \prod_{i=1}^t a_i$. Если φ — эндоморфизм КЛМ Q , то $\varphi a = \prod_{i=1}^t \varphi a_i$. Поэтому для определения эндоморфизма φ достаточно указать, как действует φ на компонентах Q_i . Если $\varphi a_i = \prod a_{ki}$, то будем писать $\varphi a_i = \prod \varphi_{ki} a_i$. Так как элемент $a_{ki} = \varphi_{ki} a_i$ однозначно определяется элементом a_i и отображением φ , то φ_{ki} дает однозначное отображение Q_i в Q_k . Покажем, что φ_{ik} является гомоморфизмом КЛМ Q_i в КЛМ Q_k . Действительно, пусть $a_i, b_i \in Q_i$ и

$$\begin{aligned} \varphi a_i &= \varphi_{1i} a_i \cdots \varphi_{ki} a_i \cdots \varphi_{ni} a_i, \\ \varphi b_i &= \varphi_{1i} b_i \cdots \varphi_{ki} b_i \cdots \varphi_{ni} b_i. \end{aligned}$$

Ввиду компонентной ассоциативности КЛМ Q относительно подлуп Q_i , в последних двух выражениях скобки опускаем. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi a_i \varphi b_i &= (\varphi_{1i} a_i \cdots \varphi_{ki} a_i \cdots \varphi_{ni} a_i)(\varphi_{1i} b_i \cdots \varphi_{ki} b_i \cdots \varphi_{ni} b_i) \\ &= \varphi_{1i} a_i \varphi_{1i} b_i \cdots \varphi_{ki} a_i \varphi_{ki} b_i \cdots \varphi_{ni} a_i \varphi_{ni} b_i. \end{aligned}$$

Так как φ — эндоморфизм КЛМ Q , то

$$\varphi a_i \cdot \varphi b_i = \varphi(a_i b_i).$$

Пусть

$$\varphi(a_i b_i) = \varphi_{1i}(a_i b_i) \cdots \varphi_{ki}(a_i b_i) \cdots \varphi_{ni}(a_i b_i).$$

Тогда

$$\varphi_{1i} a_i \varphi_{1i} b_i \cdots \varphi_{ki} a_i \varphi_{ki} b_i \cdots \varphi_{ni} a_i \varphi_{ni} b_i = \varphi_{1i}(a_i b_i) \cdots \varphi_{ki}(a_i b_i) \cdots \varphi_{ni}(a_i b_i).$$

В этом соотношении только сомножители $\varphi_{ki} a_i \varphi_{ki} b_i$ и $\varphi_{ki}(a_i b_i)$ принадлежат компоненте Q_k . Тогда из определения прямого произведения следует, что

$$\varphi_{ki} a_i \varphi_{ki} b_i = \varphi_{ki}(a_i b_i).$$

Следовательно, φ_{ki} является гомоморфизмом КЛМ Q_i в КЛМ Q_k .

Лемма 1. Пусть КЛМ Q разлагается в прямое произведение (1) и пусть φ — эндоморфизм КЛМ Q . Тогда КЛМ Q_i является компонентно ассоциативной относительно своих подлуп $\varphi_{ik} Q_k$.

Доказательство. Пусть $a_i \in Q_i$, $b_j \in Q_j$, $c_t \in Q_t$, и пусть по крайней мере два из индексов i, j, t различны. Тогда

$$\begin{aligned} a_i b_j \cdot c_t &= a_i \cdot b_j c_t, \\ \varphi(a_i b_j \cdot c_t) &= \varphi(a_i \cdot b_j c_t), \\ \varphi a_i \varphi b_j \cdot \varphi c_t &= \varphi a_i \cdot \varphi b_j \varphi c_t. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\prod \varphi_{ki} a_i \prod \varphi_{kj} b_j \cdot \prod \varphi_{kt} c_t = \prod \varphi_{ki} a_i \cdot \prod \varphi_{kj} b_j \prod \varphi_{kt} c_t$$

Используя дальше компонентную ассоциативность КЛМ Q относительно разложения (1) получим, что

$$\begin{aligned} (\varphi_{1i} a_i \varphi_{1j} b_j \cdot \varphi_{1t} c_t) \left(\prod_{k=2} \varphi_{ki} a_i \prod_{k=2} \varphi_{kj} b_j \cdot \prod_{k=2} \varphi_{kt} c_t \right) \\ = (\varphi_{1i} a_i \cdot \varphi_{1j} b_j \varphi_{1t} c_t) \left(\prod_{k=2} \varphi_{ki} a_i \cdot \prod_{k=2} \varphi_{kj} b_j \prod_{k=2} \varphi_{kt} c_t \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_{1i} a_i \varphi_{1j} b_j \cdot \varphi_{1t} c_t = \varphi_{1i} a_i \cdot \varphi_{1j} b_j \varphi_{1t} c_t.$$

Аналогично проверяются равенства

$$\varphi_{ki} a_i \varphi_{kj} b_j \cdot \varphi_{kt} c_t = \varphi_{ki} a_i \cdot \varphi_{kj} b_j \varphi_{kt} c_t, \quad k = 2, 3, \dots$$

Рассмотрим теперь произведение $d = d_1 d_2 \dots d_n$ при некотором распределении скобок, где $d_i \in \varphi_{kj} Q_j$, $d_i = \varphi_{kj} a_j$, и при условии, что в слове d встречаются не более двух переменных, принадлежащих одной и той же подгруппе $\varphi_{kj} Q_j \subseteq Q_k$. Пусть $a = a_1 a_2 \dots a_n$. Тогда $\varphi a = d$. Элемент a компонентно ассоциативен относительно сомножителей a_i . Отсюда следует, что и элемент d компонентно ассоциативен относительно сомножителей $d_i \in \varphi_{kj} Q_j$. Этим доказательство леммы завершается.

Теперь, по аналогии с [1], введем следующие понятия. Пусть M, N — два множества и L — алгебраическая система с частичными операциями умножения $\cdot$, сложения $+$ и нулевой операцией 0 , свойства которых будут указаны в конкретных примерах. Будем рассматривать всевозможные функции $A, B, \dots$ двух переменных, определенные на декартовом произведении $A \times B$ и со значениями в L . Такие функции назовем M, N -матрицами над L . Через $a_{\alpha\beta}$ будем обозначать значения функции при аргументах α и β : $A(\alpha, \beta) = a_{\alpha\beta}$, а саму функцию-матрицу обозначим через $(a_{\alpha\beta})$. Если $A = (a_{\alpha\beta})$ — матрица, то, фиксируя в ней первый аргумент, мы получим функцию одной переменной — строку $\bar{a}_\alpha = (\bar{a}_\alpha(\beta))$, и аналогично, фиксируя второй аргумент, получим столбец $\bar{a}^\beta = (\bar{a}^\beta(\alpha))$. Матрицу A назовем конечнострочной, если во всех ее строках имеется лишь конечное число ненулевых значений. Соответственно определяются матрицы с конечными столбцами. Пусть теперь A — M, N -матрица и B — N, K -матрица, причем либо A — конечнострочная, либо B — конечностолбцовая. Тогда их произведение $C = AB$ — M, K -матрица, определяемая формулой

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta},$$

где $\alpha \in M$, $\gamma \in N$, $\beta \in K$, и мы считаем, что, суммируя бесконечное число нулей, снова получим нуль. Наконец, функция $\bar{a} = (\bar{a}_{\alpha\alpha})$ — это главная диагональ M , M -матрицы $(a_{\alpha\beta})$.

Теперь переходим к исследованию связей между M , M -матрицами и эндоморфизмами КЛМ Q , обладающей разложением в прямое произведение (1). Как указано перед леммой 1, любому эндоморфизму φ КЛМ Q можно поставить в соответствии конечно-строчную и конечно-столбцовую M , M -матрицу из гомоморфизмов $\varphi_{ki}: Q_i \rightarrow Q_k$. Если разложение (1) содержит n сомножителей, то матрица (φ_{ki}) , соответствующая эндоморфизму φ , состоит из n^2 гомоморфизмов φ_{ki} .

Докажем обратное утверждение, что M , M -матрица, состоящая из гомоморфизмов $\varphi_{ki}: Q_i \rightarrow Q_k$ и удовлетворяющая условиям леммы 1, однозначно определяет эндоморфизм φ КЛМ Q . Действительно, пусть a, b — произвольные элементы из Q и пусть

$$a = \prod_{i=1}^k a_i, \quad b = \prod_{i=1}^k b_i, \quad a_i = \prod_{j=1}^t a_{ji}, \quad b_i = \prod_{j=1}^t b_{ji},$$

где $a_i, b_i \in Q_i$, $a_{ji}, b_{ji} \in Q_j$. При помощи заданных гомоморфизмов $\varphi_{ji}: Q_i \rightarrow Q_j$ определим отображение ψ множества Q , полагая

$$\psi a_i = \prod_{j=1}^t \varphi_{ji} a_i, \quad \psi b_i = \prod_{j=1}^t \varphi_{ji} b_i, \quad \mu a = \prod_{i=1}^k \psi a_i, \quad \mu b = \prod_{i=1}^k \psi b_i.$$

Отметим, что при переходе к матричному изображению эндоморфизма φ определение гомоморфизмов φ_{ji} зависит от элементов подлуп Q_i и Q_j . Покажем, что отображение μ является эндоморфизмом КЛМ Q . Пусть еще

$$ab = \prod_{i=1}^k (ab)_i, \quad (ab)_i = \prod_{j=1}^t \varphi_{ji} (ab)_i.$$

Тогда

$$\mu(ab) = \prod_{i=1}^k \left(\prod_{j=1}^t \varphi_{ji} (ab)_i \right).$$

Преобразуем $\psi(ab)$. Для этого будем использовать соотношение

$$\varphi_{ji} (ab)_i = \varphi_{ji} (a_i b_i) = \varphi_{ji} a_i \varphi_{ji} b_i$$

и компонентную ассоциативность КЛМ Q_j относительно $\varphi_{ji} Q_i$. Из этого соотношения следует, что ψ является эндоморфизмом подлуп Q_i . После будем использовать компонентную ассоциативность КЛМ Q относительно подлуп Q_i . Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mu(ab) &= \prod_{i=1}^k \psi (ab)_i = \prod_{i=1}^k \left(\prod_{j=1}^t \varphi_{ji} (ab)_i \right) \\ &= \prod_{i=1}^k \left(\prod_{j=1}^t (\varphi_{ji} a_i \cdot \varphi_{ji} b_i) \right) = \prod_{i=1}^k \left(\prod_{j=1}^t \varphi_{ji} a_i \cdot \prod_{j=1}^t \varphi_{ji} b_i \right) \\ &= \prod_{i=1}^k (\psi a_i \cdot \psi b_i) = \prod_{i=1}^k \psi a_i \cdot \prod_{i=1}^k \psi b_i = \mu a \cdot \mu b. \end{aligned}$$

Следовательно, μ — эндоморфизм КЛМ Q , который индуцирует те же гомоморфизмы между подлупами Q_i, Q_j , что и φ . Тогда эндоморфизмы μ и φ совпадают. Этим показано, что между эндоморфизмами КЛМ Q и M , M -матрицами с условием компонентной ассоциативности существует взаимно однозначное соответствие.

Найдем далее матрицу, отвечающую произведению эндоморфизмов. Для этого предварительно покажем, как применение эндоморфизма к элементам КЛМ Q с разложением (1) сводится к матричному умножению. Пусть $a \in Q$ и φ — эндоморфизм КЛМ Q . Согласно (1), $a = \prod a_i$, где $a_i \in Q_i, i = 1, 2, \dots, r, \dots$, и только конечное число сомножителей a_i отличны от единицы. Через $\bar{a}$ обозначим матрицу-столбец с элементами $a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$, а через $\bar{\varphi} = (\varphi_{kj})$ — M , M -матрицу, соответствующую эндоморфизму φ . Тогда $\overline{\varphi a} = \bar{\varphi} \cdot \bar{a}$, где справа матрица умножается на столбец и в результате получается столбец.

В дальнейшем для компонентно ассоциативного выражения $a = a_1 a_2 \dots a_n$ будем использовать и аддитивную запись $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Тогда

$$(\varphi a) = \sum_j \left(\sum_k \varphi_{jk} a_k \right).$$

Покажем, что

$$\sum_j \left(\sum_k \varphi_{jk} a_k \right) = \sum_k \left(\sum_j \varphi_{jk} a_k \right). \quad (2)$$

Будем использовать соотношение $\varphi_{jk} a_k \in Q_j$ для $a_k \in Q_k$, а также компонентную ассоциативность КЛМ Q относительно своих подлуп Q_i и компонентную ассоциативность КЛМ Q_j относительно своих подлуп $\varphi_{jk} Q_k$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^t \varphi_{jk} a_k &= (\varphi_{11} a_1 + \varphi_{12} a_2 + \varphi_{13} a_3 + \dots + \varphi_{1t} a_t) \\ &\quad + (\varphi_{21} a_1 + \varphi_{22} a_2 + \varphi_{23} a_3 + \dots + \varphi_{2t} a_t) \\ &\quad + (\varphi_{31} a_1 + \varphi_{32} a_2 + \varphi_{33} a_3 + \dots + \varphi_{3t} a_t) + \dots \\ &\quad + (\varphi_{t1} a_1 + \varphi_{t2} a_2 + \varphi_{t3} a_3 + \dots + \varphi_{tt} a_t) \\ &= ((\varphi_{11} a_1 + (\varphi_{12} a_2 + \varphi_{13} a_3 + \dots + \varphi_{1t} a_t)) \\ &\quad + (\varphi_{21} a_1 + (\varphi_{22} a_2 + \dots + \varphi_{2t} a_t))) \\ &\quad + (\varphi_{31} a_1 + \varphi_{32} a_2 + \dots + \varphi_{3t} a_t) + \dots \\ &\quad + (\varphi_{t1} a_1 + \varphi_{t2} a_2 + \varphi_{t3} a_3 + \dots + \varphi_{tt} a_t) \\ &= (\varphi_{11} a_1 + \varphi_{21} a_1 + (\varphi_{12} a_2 + \varphi_{13} a_3 + \dots + \varphi_{1t} a_t) \\ &\quad + (\varphi_{22} a_2 + \varphi_{23} a_3 + \dots + \varphi_{2t} a_t)) \\ &\quad + (\varphi_{31} a_1 + \varphi_{32} a_2 + \varphi_{33} a_3 + \dots + \varphi_{3t} a_t) + \dots \\ &\quad + (\varphi_{t1} a_1 + \varphi_{t2} a_2 + \varphi_{t3} a_3 + \dots + \varphi_{tt} a_t) \\ &= (\varphi_{11} a_1 + \varphi_{21} a_1 + (\varphi_{31} a_1 + (\varphi_{32} a_2 + \dots + \varphi_{3t} a_t))) + \dots \\ &\quad + (\varphi_{t1} a_1 + \varphi_{t2} a_2 + \dots + \varphi_{tt} a_t) \\ &\quad + (\varphi_{12} a_2 + \varphi_{13} a_3 + \dots + \varphi_{1t} a_t) \\ &\quad + (\varphi_{22} a_2 + \varphi_{23} a_3 + \dots + \varphi_{2t} a_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\varphi_{11}a_1 + \varphi_{21}a_1 + \varphi_{31}a_1) + \dots \\
&\quad + (\varphi_{t1}a_1 + \varphi_{t2}a_2 + \varphi_{t3}a_3 + \dots + \varphi_{tt}a_t) \\
&\quad + (\varphi_{12}a_2 + \varphi_{13}a_3 + \dots + \varphi_{1t}a_t) \\
&\quad + (\varphi_{22}a_2 + \varphi_{23}a_3 + \dots + \varphi_{2t}a_t) \\
&\quad + (\varphi_{32}a_2 + \dots + \varphi_{3t}a_t) = \dots \\
&= (\varphi_{11}a_1 + \varphi_{21}a_1 + \dots + \varphi_{t1}a_1) \\
&\quad + ((\varphi_{12}a_2 + \varphi_{13}a_3 + \dots + \varphi_{1t}a_t) \\
&\quad + (\varphi_{22}a_2 + \varphi_{23}a_3 + \dots + \varphi_{2t}a_t) \\
&\quad + (\varphi_{32}a_2 + \varphi_{33}a_3 + \dots + \varphi_{3t}a_t) + \dots \\
&\quad + (\varphi_{t2}a_2 + \varphi_{t3}a_3 + \dots + \varphi_{tt}a_t)) + \dots \\
&= (\varphi_{11}a_1 + \varphi_{21}a_1 \dots + \varphi_{t1}a_1) \\
&\quad + ((\varphi_{12}a_2 + \varphi_{22}a_2 + \dots + \varphi_{t2}a_2) \\
&\quad + ((\varphi_{13}a_3 + \varphi_{23}a_3 + \dots + \varphi_{t3}a_3) + \dots \\
&\quad + (\varphi_{1t}a_t + \varphi_{2t}a_t + \varphi_{3t}a_t + \dots + \varphi_{tt}a_t) \dots)) \\
&= \sum_k \sum_j \varphi_{jk} a_k.
\end{aligned}$$

Отметим, что из вышеизложенных преобразований следует, что суммирование по k в последнем выражении производится при произвольном распределении скобок.

Совокупность всех эндоморфизмов произвольной алгебры естественным образом превращается в полугруппу. Умножением служит последовательное выполнение эндоморфизмов. Теперь найдем матрицу, отвечающую произведению эндоморфизмов КЛМ Q , обладающую разложением (1). Пусть $a \in Q$, $a = \prod a_k$, $a_k \in Q_k$, σ и φ — эндоморфизмы КЛМ Q , и пусть этим эндоморфизмам отвечают матрицы (σ_{ij}) и (φ_{jk}) . Вычислим $\sigma(\varphi a)$, используя (2):

$$\begin{aligned}
\sigma(\varphi a) &= \sigma \left(\sum_j \left(\sum_k \varphi_{jk} a_k \right) \right) = \sum_j \left(\sum_k (\sigma(\varphi_{jk} a_k)) \right) \\
&= \sum_i \left(\sum_j \left(\sum_k (\sigma_{ij}(\varphi_{jk} a_k)) \right) \right) = \sum_i \left(\sum_j \left(\sum_k (\sigma_{ij}(\varphi_{jk} a_k)) \right) \right) \\
&= \sum_i \left(\sum_k \left(\sum_j (\sigma_{ij}(\varphi_{jk} a_k)) \right) \right) = \sum_i \left(\sum_k ((\sigma\varphi)_{ik} a_k) \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что элементы матриц, соответствующих эндоморфизмам КЛМ Q , относятся к определенным разложениям (1). Элементы $\sigma_{ij} \varphi_{jk}$ являются гомоморфизмами из Q_k в Q_i . Поэтому суммирование по j в предыдущих выражениях следует понимать так:

$$(\sigma_{ij_1} \varphi_{j_1 k} + \sigma_{ij_2} \varphi_{j_2 k}) a_k = \sigma_{ij_1} \varphi_{j_1 k} a_k \cdot \sigma_{ij_2} \varphi_{j_2 k} a_k.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Полугруппа эндоморфизмов КЛМ Q , обладающая разложением в прямое произведение своих подгрупп (1), изоморфна полугруппе M , M -матриц с условием компонентной ассоциативности, указанной в лемме 1.

В [3] показано, что любая периодическая КЛМ разлагается в прямое произведение своих p -компонент, p -компоненты являются вполне характеристическими подлупами. Тогда из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Полугруппа эндоморфизмов периодической КЛМ изоморфна полугруппе диагональных M , M -матриц.*

Как и для случая абелевых групп и их колец эндоморфизмов [4], справедливы следующие утверждения о взаимосвязи прямых разложений КЛМ Q с их полугруппами эндоморфизмов $E(Q)$, а также с их M , M -матрицами, представляющими эти эндоморфизмы. Начнем со следующих утверждений.

(а) Если $Q = A \times B$, то полугруппу $E(B)$ можно рассматривать как подполугруппу полугруппы $E(Q)$, отождествив $E(B)$ с множеством всех $\alpha \in E(Q)$, которые индуцируют тождественное отображение на подлупу A . Более того, если $Q = \prod_{i \in I} A_i$, то декартово произведение $\prod_{i \in I} E(A_i)$ всех полугрупп $E(A_i)$ является подполугруппой полугруппы $E(Q)$; эта подполугруппа состоит из всех эндоморфизмов $\alpha \in E(Q)$, которые каждую подлупу A_i отображают на себя. При M , M -матричном представлении эндоморфизмов α полугруппа $\prod_{i \in I} E(A_i)$ — это в точности множество всех диагональных M , M -матриц вне диагонали которых стоят нули.

(б) Пусть $Q = B \times C$, и пусть $\varepsilon : Q \rightarrow B$ — соответствующая проекция. Тогда можно произвести отождествление

$$E(B) = \varepsilon E(Q) \varepsilon.$$

Если $\alpha \in E(Q)$, то $\varepsilon \alpha \varepsilon$ — эндоморфизм КЛМ B . С другой стороны, если θ — эндоморфизм КЛМ B , то, произведя указанное отождествление θ с эндоморфизмом КЛМ Q , получим, что $\theta = \varepsilon \theta \varepsilon$.

(с) Пусть КЛМ $Q = B \times C$ и $\bar{Q}$ имеют изоморфные полугруппы эндоморфизмов и пусть $\varphi : E(Q) \rightarrow E(\bar{Q})$ — изоморфизм между ними. Тогда $\bar{Q} = \bar{B} \times \bar{C}$, причем φ индуцирует изоморфизмы $E(B) \rightarrow E(\bar{B})$ и $E(C) \rightarrow E(\bar{C})$.

Обозначим через ε проекцию $Q \rightarrow B$, а через v — проекцию $Q \rightarrow C$ и предположим, что $\varphi : \varepsilon \rightarrow \mu$, $\varphi : v \rightarrow \eta$. Обозначим $\bar{B} = \mu(\bar{Q})$, $\bar{C} = \ker \mu$. Тогда $\bar{C}$ — нормальная подлупа КЛМ $\bar{Q}$ и $\bar{Q} = \bar{B} \bar{C}$. Справедливо равенство $\varepsilon \varepsilon = \varepsilon$, поэтому и $\mu \mu = \mu$. Отсюда следует, что любой элемент, лежащий одновременно в $\mu \bar{B}$ и $\mu \bar{C}$, должен при μ переходить в себя и в 1, так что $\bar{B} \cap \bar{C} = \{1\}$. Покажем, что $\bar{B}$ является нормальной подлупой КЛМ $\bar{Q}$. Пусть $b \in \bar{B}$ и пусть $u, v \in \bar{Q}$. Тогда $u = b_1 c_1$, $v = b_2 c_2$, где $b_1, b_2 \in B$, $c_1, c_2 \in C$. Далее,

$$\begin{aligned} \mu L(u, v) b &= \mu L^{-1}(u, v) L(u) L(v) b \\ &= L^{-1}(\mu u \cdot \mu v) L(\mu u) L(\mu v) \mu b \\ &= L^{-1}(\mu b_1 \cdot \mu b_2) L(\mu b_1) L(\mu b_2) \mu b \in B. \end{aligned}$$

Следовательно, подлупа $\bar{B}$ нормальна в $\bar{Q}$, а тогда $\bar{Q} = \bar{B} \times \bar{C}$. Теперь, произведя отождествления

$$\begin{aligned} E(B) &= \varepsilon E(Q) \varepsilon, & E(C) &= v E(Q) v, \\ E(\bar{B}) &= \mu E(\bar{Q}) \mu, & E(\bar{C}) &= \eta E(\bar{Q}) \eta \end{aligned}$$

указанные в (b), из соотношений

$$\varphi(\varepsilon E(Q)\varepsilon) = \mu E(\bar{Q})\mu, \quad \varphi(vE(Q)v) = \eta E(\bar{Q})\eta$$

получаем, что изоморфизм $\varphi: E(Q) \rightarrow E(\bar{Q})$ индуцирует изоморфизмы

$$E(B) \rightarrow E(\bar{B}), \quad E(C) \rightarrow E(\bar{C}).$$

Этим утверждение (c) доказано.

Следующее утверждение показывает, как изоморфизм двух сомножителей может быть определен в терминах эндоморфизмов.

(d) Пусть

$$Q = B \times C = \bar{B} \times \bar{C}$$

являются прямыми разложениями КЛМ Q и $\varepsilon: Q \rightarrow B$, $\mu: Q \rightarrow \bar{B}$ — соответствующие проекции. Тогда $B \cong \bar{B}$, если и только если существуют такие элементы $\alpha, \beta \in E(Q)$, что $\beta\alpha = \varepsilon$ и $\alpha\beta = \mu$.

Если $\alpha, \beta \in E(Q)$ удовлетворяет этим равенствам, то из равенств

$$\beta\alpha\beta = \varepsilon\beta = \beta\mu, \quad \alpha\beta\alpha = \alpha\varepsilon = \mu\alpha$$

следует, что ограничение $\bar{\beta}$ гомоморфизма $\beta\alpha\beta$ на подлупу B и ограничение $\bar{\alpha}$ гомоморфизма $\alpha\beta\alpha$ на подлупу $\bar{B}$ — это гомоморфизмы $\bar{\beta}: B \rightarrow \bar{B}$ и $\bar{\alpha}: \bar{B} \rightarrow B$. Далее, равенства

$$(\beta\alpha\beta)(\alpha\beta\alpha) = \varepsilon, \quad (\alpha\beta\alpha)(\beta\alpha\beta) = \mu$$

показывают, что $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — взаимно обратные отображения. Поэтому $B \cong \bar{B}$. Обратно, если $\bar{\beta}: B \rightarrow \bar{B}$ и $\bar{\alpha}: \bar{B} \rightarrow B$ — взаимно обратные изоморфизмы, то для $\beta = \varepsilon\bar{\beta}$ и $\alpha = \mu\bar{\alpha}$ справедливы равенства $\beta\alpha = \varepsilon$ и $\alpha\beta = \mu$.

(e) Легко проверить, что луповый изоморфизм $\alpha: Q \rightarrow B$ КЛМ индуцирует полугрупповой изоморфизм $\bar{\alpha}: E(Q) \rightarrow E(B)$, определяемый по формуле $\bar{\alpha}: \varphi \rightarrow \alpha\varphi\alpha^{-1}$. Перенесем этот факт на матричный язык в случае, когда КЛМ Q обладает разложением (1) и α — автоморфизм КЛМ Q . Пусть α переводит разложение (1) в новое разложение

$$Q = \bar{Q}_1 \times \bar{Q}_2 \times \dots \times \bar{Q}_r \times \dots, \quad (3)$$

где $\bar{Q}_i = \alpha Q_i$, и пусть σ — эндоморфизм КЛМ Q . Предположим, что эндоморфизму σ в старом разложении соответствует M , M -матрица (σ_{ik}) и в новом — матрица (φ_{ik}) . Для нахождения связи между этими матрицами надо учитывать следующее обстоятельство. Как указано перед теоремой 1, элементы матрицы зависят от конкретного прямого разложения и не являются самостоятельными объектами. В связи с этим введем следующее понятие.

Пусть ω — некоторый эндоморфизм КЛМ Q , пусть Q_1 — подлупа КЛМ Q и пусть $Q_2 = \omega Q_1$. Допустим далее, что задан некоторый изоморфизм β между подлупами $Q_1, \bar{Q}_1$ и $Q_2, \bar{Q}_2$, а именно,

$$\bar{Q}_1 = \beta Q_1, \quad \bar{Q}_2 = \beta Q_2.$$

Тогда гомоморфизм $\omega: Q_1 \rightarrow Q_2$ индуцирует гомоморфизм $\bar{\omega}: \bar{Q}_1 \rightarrow \bar{Q}_2$, определяемый следующим образом. Если $\bar{a} \in \bar{Q}_1$, $\bar{a} = \beta a$, то полагаем

$$\bar{\omega}\bar{a} = \bar{\omega}\beta a = \beta\bar{\omega}a = \bar{\omega}\bar{a}.$$

Теперь M, M -матрицу (σ_{ik}) , связанную с разложением (1), можно отнести и к разложению (3): каждому $\sigma_{ik}: Q_k \rightarrow Q_i$ сопоставляется соответствующее отображение $\varphi_{ik}: \alpha Q_k \rightarrow \alpha Q_i$. При этом матрице (φ_{ik}) будет отвечать новый эндоморфизм φ КЛМ Q . Найдем связь между φ и σ . Пусть a — произвольный элемент из Q . Тогда

$$\begin{aligned}\varphi \alpha a &= \sum_k \sum_i \varphi_{ik} (\alpha a)_k = \sum_k \sum_i \alpha \sigma_{ik} a_k \\ &= \alpha \sum_k \sum_i \sigma_{ik} a_k = \alpha \sigma a.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi \alpha = \alpha \sigma, \quad \varphi = \alpha \sigma \alpha^{-1}.$$

Если выбрать M, M -матрицу автоморфизма α по второму разложению, то мы придем к следующему утверждению: M, M -матрица (φ_{ik}) , соответствующая эндоморфизму σ в старом разложении (1), и M, M -матрица (σ_{ik}) , соответствующая эндоморфизму φ в новом разложении (3), сопряжены.

(f) Пусть теперь Q — произвольная группа и Φ — ее группа автоморфизмов. Известно (см., например, [5]), что множество $\text{Hol } Q$ пар (φ, g) , $\varphi \in \Phi$, $g \in Q$, умножаемых по правилу

$$(\varphi, g)(\varphi_1, g_1) = (\varphi \varphi_1, g \varphi_1 \cdot g_1) \quad (4)$$

образуют голоморф группы Q (как и в [5] образ элемента a при отображении φ обозначим $a\varphi$). Отображения

$$\Phi \rightarrow \text{Hol } Q, \quad Q \rightarrow \text{Hol } Q,$$

задаваемые по правилу $\varphi \rightarrow (\varphi, 1)$, $g \rightarrow (1, g)$, являются изоморфными вложениями. Если отождествить Φ и Q с подгруппами из $\text{Hol } Q$ в силу этих вложений, то

$$\varphi^{-1} g \varphi = g \varphi, \quad \varphi \in \Phi, \quad g \in Q, \quad (5)$$

и $\text{Hol } Q$ является полупрямым произведением Q и Φ . Равенство (5) показывает, что каждый автоморфизм $\varphi \in \Phi$ является сужением некоторого внутреннего автоморфизма группы $\text{Hol } Q$.

Предположим теперь, что Q является КЛМ и Φ — ее группа автоморфизмов. Проверяется, что множество $\text{Hol } Q$ пар (φ, g) , $\varphi \in \Phi$, $g \in Q$, умножаемых по правилу (4), образуют лупу и для нее справедливы предыдущие рассуждения, кроме последнего утверждения. Однако, если $\alpha, \beta \in \Phi$, то непосредственно проверяется, что внутренние подстановки $T(\alpha)$, $L(\alpha, \beta)$, $R(\alpha, \beta)$ являются автоморфизмами лупы $\text{Hol } Q$. Тогда равенство (5) показывает, что каждый автоморфизм $\varphi \in \Phi$ является сужением некоторой внутренней подстановки лупы $\text{Hol } Q$ вида $T(\varphi)$. Как и в случае групп, лупу $\text{Hol } Q$ назовем голоморфом КЛМ Q .

Далее приведем матричное представление голоморфа $\text{Hol } Q$ КЛМ Q , обладающей прямым разложением (1), основанное на матричном представлении автоморфизмов КЛМ Q . Элементы из Q будем рассматривать как строки, причем если $g = \sum_{i \in I} g_i$, то соответствующую строку запишем в виде $\bar{g} = (g_1, g_2, \dots, g_r, \dots)$. Согласно теореме 1, группа $\text{Aut } Q$ может быть представлена M, M -матрицами вида (σ_{ik}) , где $\sigma_{ik}: Q_k \rightarrow Q_i$ — гомоморфизмы и любая подлупа Q_i разложения (1) компонентно ассоциативна относительно

своих подлуп $Q_k \sigma_{ik}$. Если φ — автоморфизм из $\text{Aut } Q = \Phi$, то соответствующую M, M -матрицу обозначим через $\bar{\varphi}$. Строка $\bar{g}$ умножается на матрицу $\bar{\varphi}$ по обычному правилу матричного умножения:

$$\begin{aligned} \bar{g}\bar{\varphi} = & (g_1\varphi_{11} + g_2\varphi_{21} + \dots + g_r\varphi_{r1} + \dots, g_1\varphi_{12} + g_2\varphi_{22} + \dots + g_r\varphi_{r2} + \dots, \\ & \dots, g_1\varphi_{1r} + g_2\varphi_{2r} + \dots + g_r\varphi_{rr} + \dots, \dots). \end{aligned}$$

Здесь операция $+$ — это умножение в подлупах Q_i и она ассоциативна. В результате умножения получим строку, причем $\overline{g\varphi} = \bar{g} \cdot \bar{\varphi}$. Теперь рассмотрим M, M -матрицу вида

$$M(\bar{\varphi}, \bar{g}) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 \\ \bar{g} & 1, \end{pmatrix} \quad (6)$$

где 0 — столбец из нулевых гомоморфизмов и 1 — единица КЛМ Q . Обозначим совокупность всех таких M, M -матриц через $\bar{M}$. Умножение таких матриц осуществляется по обычным правилам матричного умножения. С использованием клеточного умножения матриц непосредственно проверяется справедливость формул

$$\begin{aligned} M(\bar{\sigma}, \bar{a})M(\bar{\varphi}, \bar{b}) &= M(\bar{\sigma}\bar{\varphi}, \bar{a}\bar{\varphi} \cdot \bar{b}), \\ M(E, \bar{a})M(\bar{\sigma}, \bar{1}) &= M(\bar{\sigma}, \bar{a}), \\ M^{-1}(\bar{\sigma}, \bar{1})M(E, \bar{a})M(\bar{\sigma}, \bar{1}) &= M(E, \bar{a}\bar{\sigma}). \end{aligned}$$

Здесь E — единичная M, M -матрица (на главной диагонали единицы, а на остальных местах нули). Очевидно, что отображения $\Phi \rightarrow \bar{M}$, $Q \rightarrow \bar{M}$, задаваемые правилами

$$\sigma \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 \\ \bar{1} & 1 \end{pmatrix}, \quad g \rightarrow \begin{pmatrix} E & 0 \\ \bar{g} & 1 \end{pmatrix}$$

являются изоморфными вложениями. Тогда совокупность $\bar{M}$ всех M, M -матриц вида (6) можно рассмотреть как матричное представление голоморфа КЛМ Q , обладающая прямым разложением (1).

Список литературы

1. Плоткин Б. И., *Группы автоморфизмов алгебраических систем*. Наука, Москва, 1966.
2. Bruck R. H., *A survey of binary systems*. Springer, Berlin, 1958.
3. Санду Н. И., О центрально нильпотентных коммутативных лупах Муфанг. В сб.: *Квазигруппы и лупы*. Штиинца, Кишинев, 1979, с. 145–155.
4. Фукс Л., *Бесконечные абелевы группы*, 2. Мир, Москва, 1977.
5. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., *Основы теории групп*. Наука, Москва, 1977.

Статья поступила 8.11.2007.