Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Корпачева, М. М. Сорокина, Критические ω -веерные τ -замкнутые формации конечных групп, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 1, 94–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 11:49:43

Критические ω -веерные τ -замкнутые формации конечных групп

© 2011 г. М. А. Корпачева, М. М. Сорокина

Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторый класс конечных групп, τ — подгрупповой функтор, ω -веерная τ -замкнутая формация конечных групп $\mathfrak{F}$ с направлением δ называется минимальной ω -веерной τ -замкнутой не $\mathfrak{S}$ -формацией с направлением δ , или иначе, $\mathfrak{S}_{\omega\tau\delta}$ -критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$, но все собственные ω -веерные τ -замкнутые подформации с направлением δ из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{S}$ содержатся. В статье изучается строение минимальных ω -веерных τ -замкнутых не $\mathfrak{S}$ -формаций с br -направлением δ , удовлетворяющим условию $\delta \leq \delta_3$, в случае, когда τ — регулярный δ -радикальный подгрупповой функтор.

Большую роль в исследовании ряда вопросов теории классов конечных групп играют $\mathfrak{S}_\theta$ -критические формации, где θ — непустая совокупность формаций, $\mathfrak{S}$ — некоторый класс групп. Общая проблема изучения $\mathfrak{S}_\theta$ -критических формаций впервые была поставлена Л. А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1980 г. [1]. В работе [2] А. Н. Скибой было получено решение этой проблемы в случае, когда θ — совокупность всех локальных формаций, а $\mathfrak{S} \in \theta$ — формация классического типа. В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной была решена задача Л. А. Шеметкова для композиционных формаций (см., например, [3]). В дальнейшем А. Н. Скибой, В. А. Ведерниковым и их учениками были исследованы ω -локальные и Ω -композиционные критические формации (см., например, [4, 5]). В 1999 г. В. А. Ведерниковым был введен в рассмотрение новый, функциональный подход к изучению формаций и классов Фиттинга, основанный на понятиях ω -веерности и Ω -расслоенности формации (класса Фиттинга) [6, 7]. При этом ω -локальные (Ω -композиционные) формации представили один из видов ω -веерных (Ω -расслоенных) формаций. В ряде работ (см., например, [8, 9]) были изучены ω -веерные и Ω -расслоенные критические формации.

В последние годы нередко в качестве аппарата исследования различных классов групп используются подгрупповые функторы, то есть согласованные с изоморфизмами групп функции, выделяющие некоторые системы подгрупп (см., например, [10, 11]). В частности, А. Н. Скибой в монографии [10] были изучены τ -замкнутые локальные критические формации, где τ — регулярный подгрупповой функтор. В данной работе решается вышеуказанная задача Л. А. Шеметкова для τ -замкнутых ω -веерных формаций с произвольным br -направлением δ , удовлетворяющим условию $\delta \leq \delta_3$, в случае, когда τ — регулярный δ -радикальный подгрупповой функтор.

Рассматриваются только конечные группы. Определения и обозначения, не приведенные в статье, можно найти в статьях [12, 13] и книгах [10, 14, 15]. Приведем лишь

некоторые из определений и обозначений. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — классы групп. Следуя [16], будем использовать обозначение

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}_2 = (G: G \text{ имеет нормальную подгруппу } N \in \mathfrak{F}_1 \text{ с } G/N \in \mathfrak{F}_2).$$

Через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -радикал группы G , где $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, $\mathfrak{G}_{\omega}$ — класс всех ω -групп, то есть таких групп G , что $\pi(G) \subseteq \omega$; $\mathfrak{G}_{q'}$ — класс всех q' -групп, где $q' = \mathbb{P} \setminus \{q\}$; $\mathfrak{S}_{cp}$ — класс всех групп, у которых каждый главный p -фактор централен; $F_{cp}(G) = G_{\mathfrak{S}_{cp}}$, $O_{\omega}(G) = G_{\mathfrak{G}_{\omega}}$ — $\mathfrak{S}_{cp}$ -радикал и G_{ω} -радикал группы G соответственно.
Функции

$$\begin{aligned} f: \quad \omega \cup \{\omega'\} &\rightarrow \{\text{формации группы}\}, \\ g: \quad \mathbb{P} &\rightarrow \{\text{формации групп}\}, \\ \delta: \quad \mathbb{P} &\rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\} \end{aligned}$$

называются соответственно ωF -функцией, $\mathbb{P}F$ -функцией и $\mathbb{P}FR$ -функцией. Формация

$$\mathfrak{F} = (G: G/O_{\omega}(G) \in f(\omega'), G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G) \cap \omega)$$

называется ω -веерной формацией с ω -спутником f и направлением δ и обозначается $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$; формация

$$\mathfrak{F} = (G: G/G_{\delta(p)} \in g(p) \text{ для всех } p \in \pi(G))$$

называется веерной формацией со спутником g и направлением δ и обозначается $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(g, \delta)$ (см. [12]), ω -центральной (центральной) формацией называется ω -веерная (веерная) формация с направлением δ_3 , где $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для любого $p \in \mathbb{P}$ (см. [13]); ω -полной (полной) формацией называется ω -веерная (веерная) формация с направлением δ_0 , где $\delta_0(p) = \mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$ (см. [12]).

Направление δ ω -веерной (веерной) формации называется $b\mathbb{P}$ -направлением, если δ является b -направлением, то есть $\delta(b)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$; и δ является p -направлением, то есть $\delta(q) = \mathfrak{G}_{q'}\delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$ (см. [13]).

Пусть τ — отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп. Говорят, что τ — подгрупповой функтор, если $(\tau(G))^{\varphi} = \tau(G^{\varphi})$ для любого изоморфизма φ каждой группы G . Подгрупповой функтор τ называется регулярным или, иначе, подгрупповым функтором Скибы, если выполняются следующие два условия:

- (1) из того, что N — нормальная подгруппа группы G и $M \in \tau(G)$, следует, что $MN/N \in \tau(G/N)$,
- (2) из включения $MN/N \in \tau(G/N)$ следует, что $M \in \tau(G)$ (см., например, [11]).

Пусть δ — некоторая $\mathbb{P}FR$ -функция. Подгрупповой функтор τ назовем δ -радикальным, если для всякой τ -подгруппы N любой группы G (то есть для всякой $N \in \tau(G)$) выполняется равенство $G_{\delta(p)} \cap N = N_{\delta(p)}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ -замкнутой, если из включения $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ (см. [10]). Далее, ω -спутник (спутник) f ω -веерной (веерной) формации назовем τ -замкнутым, если для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для любого $p \in \mathbb{P}$) формация $f(p)$ является τ -замкнутой. В следующей лемме устанавливается взаимосвязь между τ -замкнутостью ω -веерной формации и τ -замкнутостью ее ω -спутника.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — ω -всерная формация с br -направлением δ , $\delta \leq \delta_3$, τ — регулярный δ -радикальный подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ является τ -замкнутой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним τ -замкнутым ω -спутником.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — τ -замкнутая формация. Поскольку δ — такое br -направление, что $\delta \leq \delta_3$, согласно теореме 6 в [13], $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний ω -спутник h , причем $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$ для всех $p \in \omega$ и $h(\omega') = \mathfrak{F}$. Поэтому формация $h(\omega')$ является τ -замкнутой. Покажем, что $h(p)$ — τ -замкнутая формация для всех $p \in \omega$. Предположим, что найдется такое $p \in \omega$, что формация $h(p)$ не является τ -замкнутой. Пусть G — группа наименьшего порядка из $h(p)$, обладающая такой подгруппой N , что $N \in \tau(G)$, $N \notin h(p)$. Тогда $G \neq 1$. Если G — не монолитическая группа, то найдутся две различные минимальные нормальные подгруппы R и M группы G , причем ввиду того, что $G \in h(p)$, справедливы включения $G/R \in h(p)$ и $G/M \in h(p)$. Поскольку τ — регулярный подгрупповой функтор, $NR/R \in \tau(G/R)$. Тогда по индукции $NR/R \in h(p)$, и значит, $N/N \cap R \in h(p)$. Аналогично, $NM/M \cong N/N \cap M \in h(p)$. Следовательно, $N/(N \cap R \cap M) \cong N \in h(p)$. Получаем противоречие. Поэтому G — монолитическая группа. Пусть M — монолит группы G .

Предположим, что $O_p(G) \neq 1$. Тогда $M \subseteq O_p(G)$. Как было показано выше, $N/N \cap M \in h(p)$. Так как $N \cap M$ — p -группа, $N \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Получаем противоречие. Следовательно, $O_p(G) = 1$. Согласно лемме 18.8 в [15], существует точный неприводимый $F_p[G]$ -модуль K . Пусть $T = [K]G$. Тогда группа T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. Покажем, что $T_{\delta(p)} = K$. Поскольку δ является b -направлением, $K \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $K \subseteq T_{\delta(p)}$. С другой стороны, $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ и $T_{\delta_3(p)} = F_{cp}(T) \subseteq C_T(K) = K$. Так как $\delta \leq \delta_3$, $T_{\delta(p)} \subseteq T_{\delta_3(p)} = K$. Следовательно, $T_{\delta(p)} = K$. Из соотношения $T/K \cong G \in h(p)$ получаем, что $T \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и, ввиду τ -замкнутости формации $\mathfrak{F}$, справедливо включение $\tau(T) \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что $NK \in \tau(T)$. Так как $T/K \cong G$, существует изоморфизм $\varphi: G \rightarrow T/K$, при этом $N^\varphi = NK/K$. Поскольку τ — подгрупповой функтор и $N \in \tau(G)$, справедливо соотношение $NK/K = N^\varphi \in (\tau(G))^\varphi = \tau(G^\varphi) = \tau(T/K)$. Так как τ — регулярный подгрупповой функтор и $NK/K \in \tau(T/K)$, мы видим, что $NK \in \tau(T)$, и значит, $NK \in \mathfrak{F}$. Поэтому $NK/(NK)_{\delta(p)} \in h(p)$. Поскольку τ — δ -радикальный подгрупповой функтор и $NK \in \tau(T)$, мы получаем $(NK)_{\delta(p)} = T_{\delta(p)} \cap NK = K \cap NK = K$ и $NK/(NK)_{\delta(p)} = NK/K \cong N \in h(p)$, что невозможно. Таким образом, формация $h(p)$ является τ -замкнутой для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$, и значит, h — τ -замкнутый ω -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Докажем достаточность. Пусть f — τ -замкнутый ω -спутник формации $\mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$, и $N \in \tau(G)$. Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$, из $NG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)} \in \tau(G/G_{\delta(p)})$ и τ -замкнутости формации $f(p)$ следует, что $NG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)} \cong N/(N \cap G_{\delta(p)}) \in f(p)$. Так как подгрупповой функтор τ является δ -радикальным, $N/(N \cap G_{\delta(p)}) = N/N_{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(N)$. Далее, из соотношений $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$, $NO_\omega(G)/O_\omega(G) \in \tau(G/O_\omega(G))$ и τ -замкнутости формации $f(\omega')$ следует, что $NO_\omega(G)/O_\omega(G) \cong N/(N \cap O_\omega(G)) \in f(\omega')$. Так как $N \cap O_\omega(G) \subseteq O_\omega(N)$, $N/O_\omega(N) \cong (N/N \cap O_\omega(G))/(O_\omega(N)/N \cap O_\omega(G)) \in f(\omega')$. Таким образом, по определению ω -всерной формации, $N \in \mathfrak{F}$ и значит, формация $\mathfrak{F}$ является τ -замкнутой. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — всерная формация с br -направлением δ , $\delta \leq \delta_3$, τ — регулярный δ -радикальный подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ является τ -замкнутой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним τ -замкнутым спутником.

Через $\mathfrak{F} = \omega\tau F(\mathfrak{X}, \delta)$ ($\mathfrak{F} = \tau F(\mathfrak{X}, \delta)$) обозначается ω -веерная (веерная) τ -замкнутая формация с направлением δ , порожденная классом групп $\mathfrak{X}$, а $\mathfrak{F} = \omega F_\tau(\mathfrak{X}, \delta)$ ($\mathfrak{F} = F_\tau(\mathfrak{X}, \delta)$) — ω -веерная (веерная) формация с направлением δ , обладающая хотя бы одним τ -замкнутым ω -спутником (спутником), порожденная классом $\mathfrak{X}$. Если δ — br -направление ω -веерной (веерной) формации, $\delta \leq \delta_3$ и τ — регулярный δ -радикальный подгрупповой функтор, то в силу леммы 1 $\omega\tau F(\mathfrak{X}, \delta) = \omega F_\tau(\mathfrak{X}, \delta)$ ($\tau F(\mathfrak{X}, \delta) = F_\tau(\mathfrak{X}, \delta)$).

Доказательство следующей леммы проводится аналогично доказательству теоремы 5 в [12].

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, δ — такое направление ω -веерной формации, что $\delta_0 \leq \delta$, и τ — регулярный подгрупповой функтор. Тогда формация $\mathfrak{F} = \omega F_\tau(\mathfrak{X}, \delta)$ имеет единственный минимальный τ -замкнутый ω -спутник f такой, что

$$f(\omega') = \tau \text{ form}(G/O_\omega(G): G \in \mathfrak{X}), \quad f(p) = \tau \text{ form}(G/G_{\delta(p)}: G \in \mathfrak{X})$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, δ — такое направление веерной формации, что $\delta_0 \leq \delta$, и τ — регулярный подгрупповой функтор. Тогда формация $\mathfrak{F} = F_\tau(\mathfrak{X}, \delta)$ обладает единственным минимальным τ -замкнутым спутником f таким, что

$$f(p) = \tau \text{ form}(G/G_{\delta(p)}: G \in \mathfrak{X}),$$

для всех $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

Следствие 3. Пусть δ — такое направление ω -веерной (веерной) формации, что $\delta_0 \leq \delta$, τ — регулярный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}_i$ — ω -веерная (веерная) формация с направлением δ , обладающая хотя бы одним τ -замкнутым ω -спутником (спутником), и f_i — минимальный τ -замкнутый ω -спутник (спутник) формации $\mathfrak{F}_i$. $i = 1, 2$. Включение $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $f_1 \leq f_2$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый класс групп, τ — подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ — ω -веерная τ -замкнутая формация с направлением δ . Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_{\omega\tau\delta}$ -критической, или иначе, минимальной ω -веерной τ -замкнутой не $\mathfrak{H}$ -формацией с направлением δ , если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные ω -веерные τ -замкнутые подформации из $\mathfrak{F}$ с направлением δ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся. Аналогично определяются $\mathfrak{H}_{\tau\delta}$ -критические формации (минимальные веерные τ -замкнутые не $\mathfrak{H}$ -формации с направлением δ), $\mathfrak{H}$ -критические формации (минимальные τ -замкнутые не $\mathfrak{H}$ -формации).

Теорема 1. Пусть δ — br -направление ω -веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ — регулярный δ -радикальный групповой функтор, $\mathfrak{H}$ — непустая ω -веерная τ -замкнутая формация с направлением δ и максимальным внутренним ω -спутником h , $\mathfrak{F}$ — ω -веерная τ -замкнутая формация с направлением δ и минимальным τ -замкнутым ω -спутником f .

Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\tau\delta}$ -критической, то $\mathfrak{F} = \omega\tau F(G, \delta)$, где G — монолитическая группа с монолитом $P = G^\delta$, причем, если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$ -критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $\mathfrak{H}(\omega')_\tau$ -критической формацией.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_{\omega\tau\delta}$ -критическая формация и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G является монолитической группой с монолитом $P = G^\delta$. Поскольку $\omega\tau F(G, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\omega\tau F(G, \delta) \not\subseteq \mathfrak{H}$, ввиду $\mathfrak{H}_{\omega\tau\delta}$ -критичности формации $\mathfrak{F}$ получаем, что $\mathfrak{F} = \omega\tau F(G, \delta)$.

Так как δ — p -направление, $\delta_0 \leq \delta$ и, согласно лемме 2,

$$f(\omega') = \tau \operatorname{form}(G/O_\omega(G)), \quad f(p) = \tau \operatorname{form}(G/G_{\delta(p)})$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Поскольку δ является bp -направлением, удовлетворяющим условию $\delta \leq \delta_3$, по теореме 6 в [13], $h(\omega') = \mathfrak{S}$, и для любого $p \in \omega$ справедливы равенства $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p h_1(p)$, где h_1 — произвольный внутренний ω -спутник формации $\mathfrak{S}$. Кроме того, ввиду доказательства леммы 1, h является τ -замкнутым ω -спутником формации $\mathfrak{S}$.

Пусть $\pi(P) \subseteq \omega$. Предположим, что $f(q) \subseteq h(q)$ для любого $q \in \pi(P)$. Тогда, так как $G \in \mathfrak{F}$, справедливы включения $G/G_{\delta(p)} \in f(q) \subseteq h(q)$ для всех $q \in \pi(P)$. Кроме того, $G/P = G/G^{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}$. Далее, из включения $\pi(P) \subseteq \omega$ следует, что $P \subseteq O_\omega(G)$ и $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{S} = h(\omega')$. Следовательно, в силу леммы 2 из [13], $G \in \mathfrak{S}$, что невозможно. Поэтому существует такое $p \in \pi(P)$, что $f(p) \not\subseteq h(p)$. Покажем, что формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$ -критической.

Рассмотрим случай, когда $h(p) = \emptyset$. Покажем, что $Z_p \notin \mathfrak{S}$. Пусть h_2 — минимальный τ -замкнутый ω -спутник формации $\mathfrak{S}$. Допустим, что $p \in \pi(\mathfrak{S})$. Тогда $h_2(p) \neq \emptyset$ по лемме 2 и поэтому $h(p) = \mathfrak{N}_p h_2(p) \neq \emptyset$. Получаем противоречие. Следовательно, $p \notin \pi(\mathfrak{S})$ и $Z_p \notin \mathfrak{S}$. Так как $p \in \pi(G) \cap \omega$, $f(p) \neq \emptyset$. В силу леммы 7 из [13], $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $Z_p \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}$ и поэтому $G = Z_p$. Отметим, что $\Phi(Z_p) = 1$. Поскольку δ является b -направлением, $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$. Тогда $(Z_p)_{\delta(p)} = Z_p$ и $f(p) = \tau \operatorname{form}(Z_p/(Z_p)_{\delta(p)}) = (1)$. Тем самым установлено, что формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$ -критической.

Пусть теперь $h(p) \neq \emptyset$ и $\mathfrak{M}$ — собственная τ -замкнутая подформация из $f(p)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq h(p)$ и M — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus h(p)$. Тогда M является монолитической группой с монолитом $R = M^{h(p)}$. Допустим, что $R \subseteq O_p(M)$. Тогда $M \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(M) = 1$ и по лемме 18.8 из [15] существует точный неприводимый $F_p[M]$ -модуль K . Пусть $T = [K]M$. Тогда группа T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. Покажем, что $T_{\delta(p)} = K$. Поскольку δ является b -направлением, $K \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $K \subseteq T_{\delta(p)}$. С другой стороны, так как $\delta \leq \delta_3$, $T_{\delta(p)} \subseteq T_{\delta_3(p)} = F_{cp} \subseteq C_T(K) = K$. Следовательно, $T_{\delta(p)} = K$. Так как $T/K \cong M \in \mathfrak{M}$, в силу леммы 7 из [13], $T \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\omega \tau F(T, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega \tau F(T, \delta) = \mathfrak{F}$, то

$$f(p) = \tau \operatorname{form}(T/T_{\delta(p)}) = \tau \operatorname{form}(T/K) = \tau \operatorname{form} M \subseteq \mathfrak{M},$$

что невозможно. Поэтому $\omega \tau F(T, \delta) \subset \mathfrak{F}$ и в силу $\mathfrak{S}_{\omega \tau \delta}$ -критичности формации $\mathfrak{F}$ справедливо включение $\omega \tau F(T, \delta) \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда $T \in \mathfrak{S}$ и $M \cong T/K = T/T_{\delta(p)} \in h(p)$. Получаем противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq h(p)$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$ -критической.

Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Пусть N — группа минимального порядка из $f(p) \setminus h(p)$. Тогда группа N является монолитической. Как и выше, нетрудно показать, что $O_p(N) = 1$. Используя лемму 18.8 из [15], построим группу $B = [L]N$, где L — точный неприводимый $F_p[N]$ -модуль, причем B — монолитическая группа и $L = C_B(L)$. Как и выше, легко проверить, что $B_{\delta(p)} = L$. Кроме того, $B \in \mathfrak{N}_p f(p)$, и поэтому, в силу леммы 7 из [13], $\omega \tau F(B, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega \tau F(B, \delta) \subset \mathfrak{F}$, то $B \in \mathfrak{S}$ и $N \cong B/L = B/B_{\delta(p)} \in h(p)$, что невозможно. Следовательно, $\omega \tau F(B, \delta) = \mathfrak{F}$, и в качестве группы G можно выбрать группу B , причем $\Phi(B) = 1$.

Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Покажем, что $f(\omega') = h(\omega')_\tau$ -критическая формация. Так как

$P \not\subseteq O_\omega(G)$, справедливы соотношения $O_\omega(G) = 1$ и

$$f(\omega') = \tau \operatorname{form}(G/O_\omega(G)) = \tau \operatorname{form} G \not\subseteq \mathfrak{S} = h(\omega').$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — собственная τ -замкнутая подформация из $f(\omega')$ и $\mathfrak{M}_1 = \omega\tau F(\mathfrak{M}, \delta)$. Из того, что $\mathfrak{M} \subset f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$, получаем, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$. Тогда

$$f(\omega') = \tau \operatorname{form}(M/O_\omega(M): M \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}.$$

Получаем противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$, и значит, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{S}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S} = h(\omega')$ и формация $f(\omega')$ является $h(\omega')_\tau$ -критической. Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть δ — br -направление векрной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ — регулярный δ -радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{S}$ — непустая векрная τ -замкнутая формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h , $\mathfrak{F}$ — векрная τ -замкнутая формация с направлением δ и минимальным τ -замкнутым спутником f . Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{S}_{\tau\delta}$ -критической, то $\mathfrak{F} = \tau F(G, \delta)$, где G — монолитическая группа с монолитом $P = G^\delta$, причем $\Phi(G) = 1$ и формация $F(p)$ является $h(p)_\tau$ -критической для некоторого $p \in \pi(P)$.

Теорема 2. Пусть δ — br -направление ω -векрной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ — регулярный δ -радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{S}$ — непустая ω -векрная τ -замкнутая формация с направлением δ и максимальным внутренним ω -спутником f , $\mathfrak{F} = \omega\tau F(G, \delta)$ — формация с минимальным τ -замкнутым ω -спутником f , где G — монолитическая группа с монолитом $P = G^\delta$, причем, если $\pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$ -критической формацией, а если $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_\tau$ -критической формацией. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{S}_{\omega\tau\delta}$ -критической.

Доказательство. Поскольку $P = G^\delta$, справедливо $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная ω -векрная τ -замкнутая подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$ и b — ее минимальный τ -замкнутый ω -спутник. Согласно следствию 3, $b \leq f$. Покажем, что $b \leq h$. Пусть $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Тогда $f(p) = \emptyset$, и значит, $b(p) = \emptyset \subseteq h(p)$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G)$. Рассмотрим случай, когда $p \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \pi(P)$. Так как $P \in \mathfrak{G}_{p'} \subseteq \mathfrak{G}_{p'}\delta(p) = \delta(p)$, в силу леммы 1 из [13], $(G/P)_{\delta(p)} = G_{\delta(p)}/P$ и

$$\begin{aligned} b(p) &\subseteq f(p) = \tau \operatorname{form}(G/G_{\delta(p)}) \\ &= \tau \operatorname{form}((G/P)/(G_{\delta(p)}/P)) = \tau \operatorname{form}((G/P)/(G/P)_{\delta(p)}) \subseteq h(p). \end{aligned}$$

Таким образом, $b(p) \subseteq h(p)$. Пусть $p \in \pi(P)$. Поскольку в силу условия теоремы $\pi(P) = \{p\}$, P есть абелева p -группа. Покажем, что $G_{\delta(p)} = P$. С одной стороны, $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $P \subseteq G_{\delta(p)}$. С другой стороны, $P = F_{cp}(G)$. В самом деле, так как по условию теоремы $\Phi(G) = 1$, $G = [P]L$. Допустим, что $F_{cp}(G) \cap L \neq 1$. Тогда $F_{cp}(G) \cap L \subseteq C_G(P)$ и $N_G(F_{cp}(G) \cap L) = G$, что в силу монолитичности группы G невозможно. Следовательно, $F_{cp}(G) \cap L = 1$ и $P = F_{cp}(G)$. Так как $\delta \leq \delta_3$, $G_{\delta(p)} \subseteq P$. Таким образом, $G_{\delta(p)} = P$. Предположим, что $b(p) = f(p)$. Тогда $G/P = G/G_{\delta(p)} \in f(p) = b(p)$, и по лемме 7 из [13] $G \in \mathfrak{N}_p b(p) \subseteq \mathfrak{B}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{F} = \omega\tau F(G, \delta) \subseteq \mathfrak{B}$. Получаем противоречие. Следовательно, $b(p) \subset f(p)$ и $b(p) \subseteq h(p)$ в силу $h(p)_\tau$ -критичности формации $f(p)$.

Покажем, что $b(\omega') \subseteq h(\omega')$. Если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $P \subset O_\omega(G)$ и

$$\begin{aligned} b(\omega') &\subseteq f(\omega') = \tau \operatorname{form}(G/O_\omega(G)) \\ &= \tau \operatorname{form}(G/P)/(O_\omega(G)/P) \subseteq \mathfrak{S} = h(\omega'). \end{aligned}$$

Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Предположим, что $b(\omega') = f(\omega')$. Так как $P \not\subseteq O_\omega(G)$, мы видим, что $O_\omega(G) = 1$ и

$$G \in \tau \text{ form } G = \tau \text{ form}(G/O_\omega(G)) = f(\omega') = b(\omega') \subseteq \mathfrak{B},$$

что невозможно. Следовательно, $b(\omega') \subset f(\omega')$ и поэтому, в силу $h(\omega')_\tau$ -критичности формации $f(\omega')$, получаем, что $b(\omega') \subseteq h(\omega')$. Таким образом, $b \leq h$, и значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{S}$. Тем самым установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{S}_{\omega\tau\delta}$ -критической. Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть δ — br -направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ — регулярный δ -радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{S}$ — непустая веерная τ -замкнутая формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h , и наконец, $\mathfrak{F} = \tau F(G, \delta)$ — формация с минимальным τ -замкнутым спутником f , где G — монолитическая группа с монолитом $P = G^\mathfrak{S}$, причем, $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$ -критической. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{S}_{\tau\delta}$ -критической формацией.

Замечание 1. Направление δ_1 ω -локальной формации ($\delta_1(p) = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbb{P}$), направление δ_2 ω -специальной формации ($\delta_2(p) = \mathfrak{G}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbb{P}$), направление δ_3 ω -центральной формации являются br -направлениями. Таким образом, в качестве следствий теоремы 1 и теоремы 2 получаем результаты для ω -локальных, ω -специальных, ω -центральных τ -замкнутых формаций в случае, когда τ — регулярный δ_1 -радикальный (δ_2 -радикальный, δ_3 -радикальный соответственно) подгрупповой функтор, в частности, результаты для нормально наследственных ω -веерных формаций указанных направлений.

Список литературы

1. Шеметков Л. А., Экраны ступенчатых формаций. В сб.: *Труды VI Всесоюзного симпозиума по теории групп*. Наукова думка, Киев, 1980, с. 37–50.
2. Скиба А. Н., О критических формациях. В сб.: *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры*. ИМ АН Украины, Киев, 1993, с. 250–268.
3. Ведерников В. А., Сорокина М. М., *Композиционные и локальные наследственные критические формации*, Деп. ВИНТИ 8.01.98, №25, В 98.
4. Селькин В. М., Скиба А. Н., *О $\mathfrak{S}_{\omega}$ -критических формациях*. Изд-во Гомельского университета, Гомель, 1999.
5. Ведерников В. А., Коптюх Д. Г., *Частично композиционные формации групп*, препринт №2. БГПУ, Брянск, 1999.
6. Ведерников В. А., Сорокина М. М., *Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп*, препринт №5. БГПУ, Брянск, 1999.
7. Ведерников В. А., Сорокина М. М., *Ω -веерные формации и классы Фиттинга конечных групп*, препринт №6. БГПУ, Брянск, 1999.
8. Сорокина М. М., Силенок Н. В., Критические Ω -расслоенные формации конечных групп. *Математические заметки* (2002) **72**, №2, 269–282.
9. Корпачева М. А., Сорокина М. М., О критических ω -веерных формациях конечных групп. *Математические заметки* (2006) **79**, №1, 87–94.
10. Скиба А. Н., *Алгебра формаций*. Белорусская наука, Минск, 1997.
11. Каморников С. Ф., Селькин М. В., *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*. Белорусская наука, Минск, 2003.

12. Ведерников В. А., Сорокина М. М., Ω -веерные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Математические заметки* (2002) **71**, №1, 43–60.
13. Ведерников В. А., О новых типах ω -веерных формаций конечных групп. В сб.: *Труды Украинского Математического Конгресса «Алгебра и теория чисел»*, **1**. Институт математики НАН Украины, Киев, 2002, с. 36–45.
14. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп*. Наука, Москва, 1978.
15. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., *Формации алгебраических систем*. Наука, Москва, 1989.
16. Doerk K., Hawkes T., *Finite Soluble Groups*. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

Статья поступила 12.11.2008.

Переработанный вариант поступил 7.06.2009.