Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Чистяков, Асимптотическая нормальность числа значений m -зависимых случайных величин, появившихся заданное число раз, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 2, 41–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:20:37

Асимптотическая нормальность числа значений m -зависимых случайных величин, появившихся заданное число раз

© 2011 г. В. П. Чистяков

Для стационарной последовательности случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_t, \dots$, каждая из которых принимает значения из множества $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, изучаются случайные величины $\mu_r = \mu_r(n, N)$, равные числу значений из множества $\mathcal{N}$, появившихся r раз в первых n членах последовательности. Получены асимптотические формулы моментов $\mu_r(n, N)$ и достаточные условия асимптотической нормальности этой величины, когда $n, N \rightarrow \infty$ и последовательность является последовательностью m -зависимых величин общего вида, а параметры распределения последовательности изменяются в так называемой центральной области. Случайные величины $\mu_r(n, N)$ при $n, N \rightarrow \infty$ в левой промежуточной области изучались ранее.

1. Введение

Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_t, \dots \quad (1)$$

— стационарная последовательность случайных величин, каждая из которых может принимать значения из множества $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$. Обозначим $\mu_r = \mu_r(n, N)$ число значений из множества $\mathcal{N}$, появившихся r раз в первых n членах последовательности (1). Асимптотические формулы для $\mathbf{E}\mu_r$, $\mathbf{E}\mu_r^{[2]}$, $\mathbf{D}\mu_r$ и асимптотическая нормальность μ_r при $n, N \rightarrow \infty$ рассматривались многими авторами (см., например, [1–3]) в случае, когда случайные величины (1) независимы или образованы s -цепочками независимых величин.

В данной работе получены асимптотические формулы моментов $\mu_r(n, N)$ и достаточные условия асимптотической нормальности этой величины, когда $n, N \rightarrow \infty$, последовательность (1) является последовательностью m -зависимых величин общего вида, а параметры распределения последовательности (1) изменяются по терминологии [1] в центральной области. В [4, 5] исследовались величины $\mu_r(n, N)$ при $n, N \rightarrow \infty$ в левой промежуточной области.

2. Постановка задачи

Будем предполагать, что последовательность (1) является последовательностью m -зависимых случайных величин: случайные векторы $(x_{s-u}, x_{s-u+1}, \dots, x_s)$, $(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+v})$

независимы при любых u, v, s, t , у которых $t - s > m$. Введем обозначения

$$a_i = N \mathbf{P}\{x_t = i\}, \quad b_{ij}(k) = N^2 \mathbf{P}\{x_t = i, x_{t+k} = j\}, \quad i, j \in \mathbf{N}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^N a_i = N, \quad \sum_{i,j=1}^N b_{ij}(k) = N^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad b_{ij}(k) = a_i a_j, \quad k \geq m + 1.$$

Случайную величину $\mu_r(n, N)$ можно представить в виде

$$\mu_r = \mu_r(n, N) = \sum_{i=1}^N \sum_{1 \leq h_1 < \dots < h_r \leq n} \chi(L_i(h) \cap (x_t \neq i, 1 \leq t \leq n, t \notin h)), \quad (3)$$

где $\chi(A)$ — индикатор события A , $h = (h_1, \dots, h_r)$,

$$L_i(h) = \bigcap_{t \in h} (x_t = i).$$

Асимптотические формулы моментов случайных величин $\mu_r(n, N)$ получены в схеме серий, когда $n, N \rightarrow \infty$

$$\frac{n}{N} = \alpha_N, \quad 0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_N \leq \bar{\alpha} < \infty \quad (4)$$

и совместные распределения случайных величин (1) меняются так, что при любых $t_1 < \dots < t_l$ и любых $i_1, \dots, i_l \in \mathbf{N}$, $l = 1, 2, \dots$

$$0 < \underline{a} \leq a_i \leq \bar{a} < \infty, \quad N^l \mathbf{P}\{x_{t_1} = i_1, \dots, x_{t_l} = i_l\} \leq c^l, \quad (5)$$

где $\underline{a}, \bar{a}, c$ — некоторые постоянные.

3. Математическое ожидание

Слагаемые в правой части равенства (3) представим в виде

$$\chi \left(L_i(h) \cap \bigcap_{t \in h} (x_t \neq i) \right) = \chi(L_i(h)) - \chi \left(L_i(h) \cap \bigcup_{t \in \bar{h}} (x_t = i) \right),$$

где $\bar{h} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus h$. Отсюда, используя равенство

$$\chi \left(L_i(h) \cap \bigcup_{t \in \bar{h}} (x_t = i) \right) = \sum_{l=1}^{n-r} (-1)^{l+1} \sum_{\bar{l}(l) \in T_h(l)} \chi(L_i(h) \cap (x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i))$$

и равенство

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq h_1 < \dots < h_r \leq n} \sum_{t(l) \in T_h(l)} \chi(L_i(h) \cap (x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i)) \\ = \binom{l+r}{r} \sum_{t(l+r) \in T(l+r)} \chi(x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} t(l) &= (t_1, \dots, t_l), \\ t(l+r) &= (t_1, \dots, t_{l+r}), \\ T(l+r) &= \{t(l+r): 1 \leq t_1 < \dots < t_{l+r} \leq n\}, \\ T_h(l) &= \{t(l): 1 \leq t_1 < \dots < t_l \leq n; t_1, \dots, t_l \notin h\}, \end{aligned}$$

получим равенство

$$\mu_r = \sum_{l=r}^{\varphi-1} \sum_{i=1}^N (-1)^{l+r} \binom{l}{r} \sum_{t(l) \in T(l)} \chi(x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i) + \Delta_\varphi, \quad (7)$$

где $1 < \varphi < n - r$,

$$|\Delta_\varphi| \leq \sum_{i=1}^N \binom{\varphi}{r} \sum_{t(\varphi) \in T(\varphi)} \chi(x_{t_1} = \dots = x_{t_\varphi} = i). \quad (8)$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\mu_r = \sum_{l=r}^{\varphi-1} \sum_{i=1}^N (-1)^{l+r} \binom{l}{r} \sum_{\bar{t}(l) \in T(l)} \mathbf{P}(x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i) + \mathbf{E}\Delta_\varphi, \quad (9)$$

$$|\mathbf{E}\Delta_\varphi| \leq \sum_{i=1}^N \binom{\varphi}{r} \sum_{t(\varphi) \in T(\varphi)} \mathbf{P}(x_{t_1} = \dots = x_{t_\varphi} = i). \quad (10)$$

Определим φ равенством

$$\varphi = \left\lceil \frac{(1+\delta) \ln N}{\ln \ln N} \right\rceil. \quad (11)$$

Положим $\tau(t) = (t, t+1, \dots, t+m)$. Множества $T(l)$ представим в виде объединения трех непересекающихся множеств:

$$\begin{aligned} T(l) &= T_1(l) \cup T_2(l) \cup T_3(l), \\ T_1(l) &= \{t(l): \tau(t_u) \cap \tau(t_v) = \emptyset, u, v = 1, \dots, l, u \neq v\}, \\ T_2(l) &= \{t(l): \text{среди } \tau(t_1), \dots, \tau(t_l) \text{ ровно одна пара множеств пересекается}\}, \\ T_3(l) &= T(l) \setminus (T_1(l) \cup T_2(l)). \end{aligned} \quad (12)$$

Сумму по $\bar{t}(l) \in T(l)$ в равенстве (9) разобьем на три суммы, соответствующие разбиениям (12).

Положим

$$\begin{aligned} A_k(l) &= \sum_{i=1}^N \sum_{t(l) \in T_k(l)} \mathbf{P}(x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i), \\ E_k &= \sum_{l=r}^{\varphi-1} (-1)^{l+r} A_k(l) \binom{l}{r}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда и из (9), (10) получим, что

$$\mathbf{E}\mu_r = E_1 + E_2 + E_3 + \mathbf{E}\Delta_\varphi, \quad (14)$$

где

$$|\Delta_\varphi| \leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \quad \Delta_k = \binom{\varphi}{r} A_k(\varphi), \quad k = 1, 2, 3.$$

В схеме серий (4), (5) найдем асимптотические формулы для $A_k(l)$, E_k .

По лемме 5 статьи [2] (в лемме 5 нужно s заменить на $m + 1$):

$$|T_1(l)| = \frac{n^l}{l!} - \frac{n^{l-1}}{(l-2)!} \frac{2m+1}{2} + O\left(\frac{l^3 n^{l-2}}{(l-2)!}\right), \quad l \geq 2; \quad (15)$$

кроме того,

$$|T_1(0)| = 1, \quad |T_1(1)| = n.$$

При $t(l) \in T_1(l)$ величины $x_{t_1}, \dots, x_{t_l}$ независимы и, следовательно,

$$\mathbf{P}(x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i) = \frac{a_i^l}{N^l}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Отсюда, используя (15), получим, что

$$\begin{aligned} A_1(l) &= \sum_{i=1}^N |T_1(l)| \frac{a_i^l}{N^l} \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{(\alpha_N a_i)^l}{l!} - \frac{(\alpha_N a_i)^2}{\alpha_N N} \frac{2m+1}{2} \alpha_N \frac{(\alpha_N a_i)^{l-2}}{(l-2)!} + O\left(\frac{1}{N^2} \frac{l^3}{(l-2)!}\right) \right]; \end{aligned} \quad (16)$$

кроме того,

$$A_1(\varphi) \leq C N \frac{c_0^\varphi}{\varphi!} < \frac{C}{N^{\delta_0}}, \quad \Delta_1 < \frac{C \varphi^2}{N^{\delta_0}} < \frac{C}{N^\delta}, \quad 0 < \delta < 1, \quad (17)$$

где $C > 0$, $c_0 > 0$, $0 < \delta < 1$, $0 < \delta_0 < 1$ — некоторые постоянные.

Подставим выражение для $A_1(l)$ во второе равенство (13) при $k = 1$. Заменяв верхний предел суммирования $\varphi - 1$ на ∞ , с учетом оценки остатка ряда с $l \geq \varphi$, получим равенство

$$E_1 = \sum_{i=1}^N p_{r,i} \left(1 - \frac{2m+1}{2N\alpha_N} (r(r-1) - 2r(\alpha_N a_i) + (\alpha_N a_i)^2) \right) + O\left(\frac{1}{N^\delta}\right), \quad (18)$$

где $0 < \delta < 1$,

$$p_{r,i} = \frac{\alpha_N}{r!} e^{-\alpha_N a_i}. \quad (19)$$

Оценим $A_2(l)$. Для $l \geq 2$ определим множества

$$T_2^u(l, v, n) = \{t(l) : t(l) \in T(l), t_{v+1} - t_v = u, t_{k+1} - t_k \geq m + 1 \text{ при } k \neq v\}.$$

Используя равенство

$$\mathbf{P}(x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i) = \frac{b_{ii}(u)}{N^2} \frac{a_i^{l-2}}{N^{l-2}}, \quad t(l) \in T_2^u(l, v, n),$$

получим, что

$$A_2(l) = \sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^{l-1} |T_2^{(u)}(l, v, n)| \sum_{i=1}^N \frac{b_{ii}(u) a_i^{l-2}}{N^l}.$$

Отсюда и из равенства

$$\sum_{v=1}^{l-1} |T_2^{(u)}(l, v, n)| = \frac{n^{l-1}}{(l-2)!} + O\left(\frac{l^3 n^{l-2}}{(l-2)!}\right) \quad (20)$$

(см. равенство (31) в [2]) следует, что

$$A_2(l) = \frac{\alpha_N}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\alpha_N a_i)^{(l-2)}}{(l-2)!} B_{ii} + O\left(\frac{1}{N} \frac{l^3}{(l-2)!}\right), \quad (21)$$

где

$$B_{ij} = \sum_{u=1}^m b_{ij}(u). \quad (22)$$

Используя равенства (13), (21), получим, что

$$E_2 = \frac{\alpha_N}{r!N} \sum_{i=1}^N (\alpha_N a_i)^{r-2} B_{ii} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (r(r-1) + 2rl + l(l-1)) \frac{(\alpha_N a_i)^l}{l!} + O\left(\frac{1}{N^\delta}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\alpha_N}{N} \sum_{i=1}^N B_{ii} (p_{r-2,i} - 2p_{r-1,i} + p_{r,i}) + O\left(\frac{1}{N^\delta}\right), \quad 0 < \delta < 1, \quad (23)$$

где $p_{r,i}$ определены равенством (19). Из равенств (14) и (21) следует, что

$$\begin{aligned} A_2(\varphi) &< \frac{c_0^\varphi}{(\varphi)!} < \frac{1}{N^{1+\delta_0}}, \\ \Delta_2 &< C \varphi^r \frac{c_0^\varphi}{(\varphi)!} < \frac{1}{N^{1+\delta_0}}, \quad 0 < \delta_0 < 1, \quad 0 < \delta_1 < 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя равенство

$$|T_3(l)| = O\left(\frac{n^{l-2}}{(l-2)!}\right),$$

получим оценки

$$E_3 = O\left(\frac{1}{N^\delta}\right), \quad \Delta_3 = O\left(\frac{1}{N^{2+\delta}}\right). \quad (25)$$

Собирая полученные асимптотические формулы и оценки, получим следующую теорему 1.

Воспользуемся обозначениями

$$\begin{aligned} P_{r,i} &= \frac{(\alpha_N a_i)^r}{r!} e^{-\alpha_N a_i}, & M_r &= \sum_{i=1}^N p_{r,i}, \\ p_r &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{B_{ii}}{m a_i^2} - 1 \right) p_{r,i}, & Q_{r_1, r_2} &= \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{B_{ij}}{m a_i a_j} - 1 \right) p_{r_1,i} p_{r_2,j}, \\ B_{ij} &= \sum_{u=1}^m b_{ij}(u), \end{aligned} \quad (26)$$

которые использованы при формулировке теоремы 1 и далее при выводе асимптотических формул для $\mathbf{E}\mu_r(\mu_r - 1)$, $\mathbf{D}\mu_r$.

Теорема 1. При $n, N \rightarrow \infty$ в схеме серий (4), (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_r &= M_r - \frac{1}{2\alpha_N N} (r(r-1)M_r - 2r(r+1)M_{r+1} + (r+1)(r+2)M_{r+2}) \\ &\quad + \frac{m}{\alpha_N N} (r(r-1)p_r - 2r(r+1)p_{r+1} + (r+1)(r+2)p_{r+2}) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{N^\delta}\right), \end{aligned}$$

где $0 < \delta < 1$.

4. Дисперсия

Получим сначала асимптотическую формулу для $\mathbf{E}\mu_r(\mu_r - 1)$. Используя (3), представим $\mu_r^{[2]} = \mu_r(\mu_r - 1)$ в виде

$$\mu_r^{[2]} = \sum_{(i,h) \neq (j,g)} \chi \left(L_i(h) \cap L_j(g) \cap \bigcup_{t \in \bar{h}} (x_t \neq i) \cap \bigcup_{t \in \bar{g}} (x_t \neq j) \right),$$

где

$$\begin{aligned} h &= (h_1, \dots, h_r), & g &= (g_1, \dots, g_r), \\ \bar{h} &= \{1, \dots, n\} \setminus h, & \bar{g} &= \{1, \dots, n\} \setminus g, \end{aligned}$$

суммирование проводится по всем $i, j \in \{1, \dots, N\}$ и всем подмножествам h, g множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}\mu_r^{[2]} = \sum_{(i,h) \neq (j,g)} p(i, j, h, g), \quad (27)$$

где

$$p(i, j, h, g) = p \left(L_i(h) \cap L_j(g) \cap \bigcap_{t \in \bar{h}} (x_t \neq i) \cap \bigcap_{t \in \bar{g}} (x_t \neq j) \right). \quad (28)$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} p(i, i, h, g) &= 0, \quad h \neq g, \\ p(i, j, h, h) &= 0, \quad i \neq j, \quad h \cap g \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Таким образом, в сумме (27) остаются слагаемые, у которых $i \neq j$ и $h \cap g = \emptyset$. В этом случае

$$p(i, j, h, g) = p(L_i(h) \cap L_j(g)) - p\left(L_i(h) \cap L_j(g) \cap \left(\bigcup_{t \in \overline{h \cup g}} ((x_t = i) \cap (x_t = j))\right)\right)$$

и

$$p(i, j, h, g) = p(L_i(h) \cap L_j(g)) - \sum_{l=1}^{n-2r} (-1)^{l+1} z \sum_{t(l) \in T_{h \cup g}(l)} p_{ij}(h, g, f), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} f(l) &= (f_1, \dots, f_l), \\ T_{h \cup g}(l) &= \{f(l): 1 \leq f_1 < \dots < f_l \leq n; f_1, \dots, f_l \notin h \cup g\}, \\ p_{ij}(h, g, f(l)) &= p\left(L_i(h) \cap L_j(g) \cap \bigcap_{t \in f(l)} ((x_t = i) \cup (x_t = j))\right). \end{aligned}$$

Используя равенства (27), (28), (29), получим равенство

$$\mathbf{E}\mu_r^{[2]} = \sum_{i \neq j} \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l z \sum_{t(l+2r) \in T(l+2r)} \sum_{h, g, f} p_{ij}(h, g, f) + \Delta_\varphi, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} t(l+2r) &= (t_1, \dots, t_{l+2r}), \quad T(l+2r) = \{t(l+2r): 1 \leq t_1 < \dots < t_{l+2r} \leq n\}, \\ |\Delta_\varphi| &\leq \sum_{i \neq j} \sum_{t(\varphi) \in T(\varphi)} \sum_{h, g, f} p_{ij}(h, g, f) \end{aligned} \quad (31)$$

и суммирование по h, g, f проводится по всем разбиениям множества

$$t(l+2r) = h \cup g \cup f.$$

Так же, как и при выводе асимптотической формулы для $\mathbf{E}\mu_r$, сумму в (30) по $t(l+2r) \in T(l+2r)$ мы разобьем на три суммы, соответствующие разбиениям (12) с заменой l на $l+2r$.

Положим

$$D_k(l) = \sum_{i \neq j} \sum_{t(l+2r) \in T_k(l+2r)} \sum_{h, g, f} p_{ij}(h, g, f), \quad k = 1, 2, 3, \quad (32)$$

где $T_k(l+2r)$ определяется равенствами (12) с заменой l на $l+2r$. Тогда

$$\mathbf{E}\mu_r^{[2]} = \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l (D_1(l) + D_2(l) + D_3(l)) + \Delta_\varphi, \quad (33)$$

где $|\Delta_\varphi| < \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$,

$$\Delta_k = \sum_{i \neq j} \sum_{t(\varphi) \in T(\varphi)} p_{ij}(h, g, f), \quad k = 1, 2, 3.$$

При $t(l + 2r) \in T_1(l + 2r)$ события, определяемые вектором $(x_{t_1}, \dots, x_{t_{l+2r}})$ при различных $t(l + 2r) = (t_1, \dots, t_{l+2r})$ независимы, и следовательно, при любых h, g, f

$$p_{ij}(h, g, f) = \left(\frac{a_i}{N}\right)^r \left(\frac{a_j}{N}\right)^r \left(\frac{a_i + a_j}{N}\right)^l.$$

Отсюда, учитывая, что число слагаемых в сумме по h, g, f равно $(l + 2r)!/((r!)^2 l!)$, получим равенство

$$D_1(l) = \sum_{i \neq j} |T_1(l + 2r)| \frac{(l + 2r)!}{(r!)^2 l!} \dots \frac{a_i^r a_j^r}{N^{2r}} \dots \frac{(a_i + a_j)^l}{N^l}.$$

Далее нужно воспользоваться формулой (15) с заменой l на $l + 2r$ и провести вычисления, аналогичные вычислениям при выводе формулы (18). После проведения этих вычислений получаем формулу

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l D_1(l) &= M_r^2 - \sum_{i=1}^N p_{r,i}^2 - \frac{2m+1}{N\alpha_N} ((r+1)(r+2)M_{r+2}M_r \\ &\quad + 2(r+1)^2 M_{r+1}^2 - 4r(r+1)M_r M_{r+1} \\ &\quad + r(2r-1)M_r^2) + O(N^\delta). \end{aligned} \quad (34)$$

Сложнее оценивается $D_2(l)$. Определим множества

$$T_2^{(u)}(l + 2r, v, n) = \{t(l + 2r) : t(l + 2r) \in T(l + 2r)\},$$

где $t_{v+1} - t_v = u$, $t_{\tilde{v}+1} - t_{\tilde{v}} \geq m$, $\tilde{v} \neq v$.

Вероятности $p_{ij}(h, g, f)$ при $t(l + 2r) \in T_2^{(u)}(l + 2r, v, n)$ зависят от размещения t_v, t_{v+1} по множествам h, g, f :

- (1) $t_v, t_{v+1} \in h$,
- (2) $t_v, t_{v+1} \in g$,
- (3) $t_v, t_{v+1} \in f$,
- (4) $t_v \in h, t_{v+1} \in g$,
- (5) $t_v \in g, t_{v+1} \in h$,
- (6) $t_v \in h, t_{v+1} \in f$,
- (7) $t_v \in f, t_{v+1} \in h$,
- (8) $t_v \in f, t_{v+1} \in g$,
- (9) $t_v \in g, t_{v+1} \in f$.

Вероятности $p_{ij}(h, g, f)$ в этих вариантах и числа способов разбиения множества $t(2r+l) \setminus \{t_v, t_{v+1}\}$ на множества h, g, f обозначим соответственно $p_{ij}^{(k)}$ и $S_k, k = 1, \dots, 9$.

Приведем числа S_k и вероятности $p_{ij}^{(k)}$:

$$(1) \ p_{ij}^{(1)} = a_i^{r-2} b_{ii}(u) a_j^r (a_i + a_j)^l / N^{2r+l}, \ S_1 = \frac{(2r+l-2)!}{r!(r-2)!l!},$$

$$(2) \ p_{ij}^{(2)} = a_i^r a_j^{r-2} b_{jj}(u) (a_i + a_j)^l / N^{2r+l}, \ S_2 = S_1,$$

$$(3) \ p_{ij}^{(3)} = a_i^r a_j^r (b_{ii}(u) + b_{ij}(u) + b_{ji}(u) + b_{jj}(u)) (a_i + a_j)^{l-2} / N^{2r+l}, \ S_3 = \frac{(2r+l-2)!}{(r!)^2(l-2)!},$$

$$(4) \ p_{ij}^{(4)} = a_i^{r-1} b_{ij}(u) a_j^{r-1} (a_i + a_j)^l / N^{2r+l}, \ S_4 = \frac{(2r+l-2)!}{((r-1)!)^2 l!},$$

$$(5) \ p_{ij}^{(5)} = a_j^{r-1} b_{ji}(u) a_i^{r-1} (a_i + a_j)^l / N^{2r+l}, \ S_5 = S_4,$$

$$(6) \ p_{ij}^{(6)} = a_i^{r-1} (b_{ii}(u) + b_{ij}(u)) a_j^r (a_i + a_j)^{l-1} / N^{2r+l}, \ S_6 = \frac{(2r+l-2)!}{(r-1)! r! (l-1)!},$$

$$(7) \ p_{ij}^{(7)} = a_i^r (b_{ji}(u) + b_{jj}(u)) a_j^{r-1} (a_i + a_j)^{l-1} / N^{2r+l}, \ S_7 = S_6,$$

$$(8) \ p_{ij}^{(8)} = (b_{ii}(u) + b_{ji}(u)) a_i^{r-1} a_j^r (a_i + a_j)^{l-1} / N^{2r+l}, \ S_8 = S_6,$$

$$(9) \ p_{ij}^{(9)} = (b_{ij}(u) + b_{jj}(u)) a_i^r a_j^{r-1} (a_i + a_j)^{l-1} / N^{2r+l}, \ S_9 = S_6.$$

Используя сделанные замечания и равенства (32), получим, что

$$D_2(l) = \sum_{v=1}^{2r+l-1} \sum_{u=1}^m \sum_{t(2r+l) \in T_2(2r+l)} \sum_{h,g} \sum_{i \neq j} p_{ij}(h, g, f).$$

Отсюда следует, что

$$D_2(l) = \sum_{v=1}^{2r+l-1} \sum_{u=1}^m |T_2^{(u)}(l+2r, v, n)| \sum_{k=1}^9 \sum_{i \neq j} S_k p_{ij}^{(k)}.$$

Далее нужно воспользоваться равенством (31) из [2]:

$$\sum_{v=1}^{2r+l-1} |T_2^{(u)}(2r+l, v, n)| = \frac{n^{2r+l-1}}{(2r+l-2)!} + O\left(\frac{l^3 n^{2r+l-2}}{(2r+l-2)!}\right),$$

и получить асимптотическую формулу $D_2(l)$. Дальнейшие вычисления, связанные с суммированием $D_2(l)$ по l , аналогичны вычислениям, проведенным в разделе 2. В схеме

серий (4), (5)

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l D_2(l) &= \frac{2\alpha_N}{N} \left(M_r \sum_{i=1}^N B_{ii} p_{r,i} + M_r \sum_{i=1}^N B_{ii} p_{r-2,i} \right. \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^N B_{ij} p_{r,i} p_{r,j} + \sum_{i,j=1}^N B_{ij} p_{r-1,i} p_{r-1,j} \\ &\quad \left. - 2M_r \sum_{i=1}^N B_{ii} p_{r-1,i} - 2 \sum_{i,j=1}^N B_{ij} p_{r-1,i} p_{r,j} \right) + O(N^\delta), \\ \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l D_3(l) &= O(N^\delta), \quad \Delta_\varphi = O(N^\delta), \quad 0 < \delta < 1, \end{aligned} \quad (35)$$

где B_{ij} определены равенством (26). Используя (3), (34), (35), получим следующее утверждение.

Теорема 2. При $n, N \rightarrow \infty$ в схеме серий (4), (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_r^{[2]} &= M_r^2 - \sum_{i=1}^N p_{r,i}^2 - \frac{1}{N\alpha_N} ((r+1)(r+2)M_{r+2}M_r + (r+1)^2M_{r+1}^2 \\ &\quad - 4r(r+1)M_rM_{r+1} + r(2r-1)M_r^2) \\ &\quad + \frac{2m}{N\alpha_N} ((r+1)(r+2)M_r p_{r+2} + (r+1)^2Q_{r+1,r+1} \\ &\quad - 2r(r+1)M_r p_{r+1} - 2r(r+1)(Q_{r,r+1} + Q_{r+1,r}) \\ &\quad + r(r-1)M_r p_r + r^2Q_{r,r}) + O(N^\delta), \end{aligned}$$

где $0 < \delta < 1$, $p_{r,i}$, M_r , p_r , Q_{r_1,r_2} определены равенством (26).

Из теорем 1 и 2 в качестве следствия получаем асимптотическую формулу для $\mathbf{D}\mu_r$.

Следствие 1. При $n, N \rightarrow \infty$ в схеме серий (4), (5)

$$\mathbf{D}\mu_r = N\sigma_N^2(\alpha) + O(N^\delta),$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_N^2(\alpha) &= \frac{1}{N} \left(M_r - \sum_{i=1}^N p_{r,i}^2 - \frac{1}{N\alpha_N} ((r+1)^2(M_{r+1}^2 - 2mQ_{r+1,r+1}) \right. \\ &\quad \left. - 2r(r+1)(M_rM_{r+1} - mQ_{r,r+1} + Q_{r+1,r}) + r^2(M_r^2 - 2mQ_{r,r})) \right), \end{aligned} \quad (36)$$

и $0 < \delta < 1$.

В случае независимых величин (1), $b_{ij}(u) = a_i a_j$, $B_{ij} = m a_i a_j$, $p_r = Q_{r_1,r_2} = 0$, и полученные асимптотические формулы для $\mathbf{E}\mu_r$, $\mathbf{E}\mu_r^{[2]}$, $\mathbf{D}\mu_r$ переходят в известные формулы для этих величин (см. [1]).

5. Асимптотическая нормальность $\mu_r(n, N)$

Для доказательства асимптотической нормальности $\mu_r(n, N)$ воспользуемся вариантом теоремы Янсона [6], приведенным в работе М. И. Тихомировой [3]. Этот вариант существенно отличается от варианта теоремы Янсона, предложенного В. Г. Михайловым в [7]. Приведем формулировку теоремы 1 из [3] в удобном для использования в рассматриваемой задаче виде.

Будем говорить, что цепочки $\tau(t_i) = (t_i, t_{i+1}, \dots, t_i + m), i = 1, 2$, пересекаются, если $\tau(t_1) \cap \tau(t_2) \neq \emptyset$. Положим $D_N(l) \subset \{\gamma = (u, (t_1, \dots, t_l)): u = l, 1 \leq t_1 < \dots < t_l \leq n\}$,

$$\Gamma_N(L_N) = \bigcup_{l=1}^{L_N} D_N(l).$$

Рассмотрим следующую сумму, определяемую m -зависимыми величинами последовательности (1):

$$S_N = \sum_{\gamma \in \Gamma_N(L_N)} \eta_\gamma, \quad (37)$$

где $\eta_\gamma = g_l(x_{t_1}, \dots, x_{t_l})$, $|g_l| \leq 1$ при любых значениях $x_{t_1}, \dots, x_{t_l}$. Пусть V — произвольное подмножество $\Gamma_N(L_N)$. Определим множество F_V индексов слагаемых суммы (37), зависящих от слагаемых, соответствующих множеству V , полагая

$$F_V = \{\gamma = (u, (t_1, \dots, t_u)): \text{найдется } \gamma' = (v, t'_1, \dots, t'_v) \in V \\ \text{и найдутся такие } 1 \leq t_i \leq u, 1 \leq t'_j \leq v, \text{ что } \tau(t_i) \cap \tau(t'_j) \neq \emptyset\}. \quad (38)$$

Будем предполагать, что при любом h найдется величина Q_h (не зависящая от V) такая, что при любом V с $|V| \leq h$

$$H_V = \sum_{\gamma \in F_V} \mathbf{E}(|\eta_\gamma| | x_t \in G_V) \leq Q_h, \quad (39)$$

где $G_V = \bigcup_{(l, (t_1, \dots, t_l)) \in V} (t_1, \dots, t_l)$.

Теорема 3. Если при $N \rightarrow \infty$ выполняются условия (4), (5), (39) и при некотором β , $0 < \beta \leq 2/3$, выполняется условие

$$|\Gamma_N(L_N)| \rightarrow \infty, \quad \frac{M_N^\beta Q_h^{2-\beta}}{\mathbf{D}S_n} \rightarrow 0, \quad (40)$$

где

$$M_N = \sum_{\gamma \in \Gamma_N(L_N)} \mathbf{E}|\eta_\gamma|,$$

то распределение величины $(S_N - \mathbf{E}S_N)/\sqrt{\mathbf{D}S_N}$ сходится к стандартному нормальному распределению.

Случайная величина $\mu_r(n, N)$ с использованием разбиения (12) и равенства (7) может быть представлена в следующем виде:

$$\mu_r(n, N) = \mu_r^{(1)}(N) + \mu_r^{(2)}(N) + \mu_r^{(3)}(N) + \Delta_\varphi. \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned}\mu_r^{(u)}(N) &= \sum_{l=r}^{\varphi-1} \sum_{t(l) \in T_n(l)} \xi_l(t_1, \dots, t_l), \quad u = 1, 2, 3, \\ \xi_l(t_1, \dots, t_l) &= (-1)^{l+r} \binom{l}{r} \sum_{i=1}^N \chi(x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i), \\ |\Delta_\varphi| &\leq \sum_{u=1}^3 \bar{\Delta}_u, \quad \bar{\Delta}_u = \Delta_u(\varphi), \quad \Delta_u(l) = \sum_{t(l) \in T_n(l)} |\xi_l(t_1, \dots, t_l)|, \\ \varphi &= \frac{(1 + \delta) \ln N}{\ln \ln N}, \quad \delta > 0.\end{aligned}\tag{42}$$

Повторяя с несущественными изменениями рассуждения, приведенные в [2, 3], можно доказать, что $(\mu_r(n, N) - \mu_r^{(1)}(N))/\sqrt{\mathbf{D}\mu_r(n, N)}$ стремится по вероятности к 0 в схеме серий (4), (5) и $\mathbf{D}\mu_r^{(1)}(N)/\mathbf{D}\mu_r(n, N) \rightarrow 1$, если

$$\sigma_N^2(\alpha) \geq \varepsilon > 0,\tag{43}$$

где $\sigma_n^2(\alpha)$ определено в (36). Условие (39) может быть проверено так же, как в [3].

Сформулируем теорему об асимптотической нормальности $\mu_r(n, N)$.

Теорема 4. Если в схеме серий (4), (5) выполняется условие (43), то распределение случайной величины $(\mu_r(n, N) - \mathbf{E}\mu_r(n, N))/\sqrt{\mathbf{D}\mu_r(n, N)}$ сходится к стандартному нормальному распределению.

Неравенство (43) выполняется, например, для малых значений $\bar{\alpha}$ при условии (4). Это следует из неравенства

$$\sigma_N^2(\alpha) = \alpha^r \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{a_i^r}{r!} + O(\alpha^{r+1}).$$

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
2. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., Об асимптотике моментов числа непооявившихся s -цепочек. *Дискретная математика* (1997) **9**, №1, 12–29.
3. Тихомирова М. И., Асимптотическая нормальность числа непооявившихся несплошных цепочек исходов независимых испытаний. *Дискретная математика* (2009) **21**, №2, 112–125.
4. Михайлов В. Г., Асимптотическая нормальность в схеме конечно-зависимого размещения частиц по ячейкам. *Математический сб.* (1982) **119 (161)**, №4 (12), 509–520.
5. Шойтов А. М., Нормальное приближение в задаче об эквивалентных цепочках. *Труды по дискретной математике* (2007) **10**, 326–349.
6. Janson S., Normal convergence by higher semi-invariants with application to sums of dependent random variables and random graphs. *Ann. Probab.* (1988) **16**, №1, 305–312.
7. Михайлов В. Г., Об одной теореме Янсона. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, 168–170.

Статья поступила 10.10.2010.