Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Хакимуллин, Распределение крайних членов вариационного ряда в схеме размещения частиц комплектами случайной длины, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 3, 28–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:41:12

Распределение крайних членов вариационного ряда в схеме размещения частиц комплектами случайной длины

© 2005 г. А. Е. Хакимуллин

В статье доказана предельная теорема, описывающая поведение крайних членов вариационного ряда заполнений N ячеек комплектами частиц случайной длины при некотором условии на распределение длины комплекта.

Работа выполнена при поддержке программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 1758.2003.1.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Рассмотрим равновероятную схему размещения частиц комплектами (см., например, [1]), когда n комплектов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ частиц (размеры комплектов являются независимыми копиями целочисленной случайной величины ξ , принимающей значения от 1 до L) независимо друг от друга размещаются в N ячейках, частицы одного комплекта размещаются в ячейках по одной ($L \leq N$), причем все $\binom{N}{\xi_t}$ возможных размещений частиц t -го комплекта равновероятны, $t = 1, \dots, N$. Обозначим η_j число частиц в ячейке с номером j , $j = 1, \dots, N$, после размещения n комплектов частиц. Располагая в неубывающем порядке величины $\eta_1, \dots, \eta_N$, получим их вариационный ряд $\eta_{(1)} \leq \dots \leq \eta_{(N)}$.

Статья посвящена изучению предельного распределения крайнего (максимального) члена вариационного ряда $\eta_{(N-m+1)}$ для любого фиксированного целого $m \geq 1$ при $n, N, \alpha / \ln N \rightarrow \infty$, $E\xi / N \rightarrow p$, $0 \leq p \leq 1/2$, где $\alpha = n(E\xi) / N$ — среднее число частиц в ячейке, при выполнении дополнительного условия на концентрацию распределения размера комплекта:

$$\left| \frac{E(\xi)_m}{(N)_m} - \frac{(E\xi)^m}{N^m} \right| \leq m(m-1) \frac{(E\xi)^{m-1}}{N^m}, \quad (1)$$

где $(a)_m = a(a-1) \dots (a-m+1)$.

Асимптотическое поведение $\eta_{(N-m+1)}$ при других соотношениях между параметрами исследуется аналогично, в статье рассмотрен, на наш взгляд, наиболее сложный случай.

Статья посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 1. Если $n, N, \alpha / \ln N \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}\xi / N \rightarrow p$, $0 \leq p \leq 1/2$, и выполнено условие (1), то для любого фиксированного x

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta_{N-m+1} - \alpha - \alpha u (\alpha^{-1} (\ln N - 2^{-1} \ln \ln N), \mathbf{E}\xi / (N - \mathbf{E}\xi))}{\sqrt{\alpha(1 - \mathbf{E}\xi / N) / (2 \ln N)}} + \frac{\ln 4\pi}{2} \leq x \right\} \rightarrow \sum_{k=0}^{m-1} \pi_k(e^{-x}),$$

где

$$\pi_k(t) = e^{-t} \frac{t^k}{k!},$$

$u(w, a)$ — положительная функция, задаваемая в интервале $0 < w < \infty$ уравнением

$$(1 + u) \ln(1 + u) + \frac{1}{a} (1 - au) \ln(1 - au) = w, \quad u, a > 0, \quad ua < 1. \quad (2)$$

При $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = 1$ изучаемая схема представляет собой равновероятную схему размещения частиц по ячейкам, за которой утвердилось название классической [1].

Изучение вариационного ряда в классической схеме начато И. И. Викторовой и Б. А. Севастьяновым (см. [2], [3]), а подробное исследование всех членов вариационного ряда в этой же схеме в случае, когда $n/(N \ln N)$ стремится к постоянной величине, проведено Г. И. Ивченко [4]. В этих работах исследование вариационного ряда сводится к изучению методом моментов асимптотического поведения случайных величин

$$\zeta_r = \mu_{r+1}(n, N) + \dots + \mu_n(n, N),$$

где $\mu_k(n, N)$ — число ячеек, содержащих ровно k частиц, $k = 0, 1, \dots, r$.

В. Ф. Колчиным [5] для изучения классической схемы размещения частиц и в том числе для изучения членов вариационного ряда, предложен другой подход, опирающийся на представление полиномиального распределения заполнения ячеек $\eta_1 \dots \eta_N$ в виде условного распределения распределенных по закону Пуассона независимых случайных величин при условии, что их сумма равна n .

Поведение членов вариационного ряда в равновероятной схеме размещения частиц комплектами при $n, N \rightarrow \infty$ и фиксированном размере комплектов изучено Е. Р. Хакимуллин [6], при фиксированном n оно изучено С. Ю. Теребулиным [7].

Схема со случайным размером комплектов рассматривалась ранее Г. И. Ивченко [8] и Т. М. Селке [9]. В этих работах изучались характеристики, связанные с временем ожидания до заполнения всех или почти всех ячеек. Эта же схема изучалась в [14], где содержится дополнительная библиография.

2. О методе доказательства

Обозначим ζ_r число ячеек, в каждой из которых содержится более r частиц после размещения n комплектов в описанной выше схеме,

$$b(r, n, p) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$B(r, n, p) = \sum_{k=0}^r b(k, n, p), \quad \bar{B}(r, n, p) = 1 - B(r, n, p).$$

Ясно, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{N-m+1} \leq r\} = \mathbf{P}\{\zeta_r \leq m-1\}. \quad (3)$$

При исследовании асимптотического поведения η_{N-m+1} основным является следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть

$$n, N \rightarrow \infty, \quad \alpha / \ln N \rightarrow x, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad \mathbf{E}\xi / N \rightarrow p, \quad 0 \leq p \leq 1/2,$$

выполнено условие (1) и последовательность $r = r(\alpha, N)$ выбрана так, что

$$r > \alpha, \quad N \bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi / N) \rightarrow \lambda > 0.$$

Тогда случайная величина ζ_r имеет в пределе распределение Пуассона с параметром λ .

Для доказательства леммы 1 достаточно показать, что при выполнении условий леммы $\mathbf{E}(\zeta_r)_m \rightarrow \lambda^m$ для любого фиксированного $m = 1, 2, \dots$

Случайная величина ζ_r представима в виде суммы N симметрично зависимых индикаторов, и поэтому для ее факториального момента порядка m справедливо представление

$$\mathbf{E}(\zeta_r)_m = N(N-1) \dots (N-m+1) p(m, r), \quad (4)$$

где

$$p(m, r) = \mathbf{P}\{\eta_1 > r, \dots, \eta_m > r\}.$$

Вектор $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ представляет собой сумму n независимых одинаково распределенных случайных векторов с компонентами, принимающими значения 0 и 1 (эти векторы соответствуют независимо размещаемым комплектам). Поэтому для анализа вероятности $p(m, r)$ можно, используя явный вид производящей функции

$$\varphi(z_1, \dots, z_m) = \mathbf{E} z_1^{\eta_1} \dots z_m^{\eta_m},$$

применить метод перевала. Вид производящей функции $\varphi(z_1, \dots, z_m)$ найден в разделе 4, там же проведен анализ асимптотического поведения $p(m, r)$. Третий раздел посвящен исследованию квантилей биномиального распределения. Доказательство леммы 1 и основной теоремы содержится в разделе 5.

3. Квантили биномиального распределения

В статье [10] Н. В. Смирнова приведен ряд результатов о вероятностях больших уклонений для биномиального распределения. В частности, для хвоста $\bar{B}(r, n, p)$ биномиального распределения получен следующий результат.

Пусть $n \rightarrow \infty$, $0 < p < 1$ и величина r удовлетворяет соотношениям

$$r > np, \quad \frac{r - np}{\sqrt{np}} \rightarrow \infty, \quad \frac{r - np}{np} \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\bar{B}(r, n, p) = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{\sqrt{2\pi(r-np)}} \exp\{-npw((r-np)/(np), p/(1-p))\}(1+o(1)), \quad (5)$$

где

$$w(u, a) = (1+u) \ln(1+u) + \frac{1}{a}(1-au) \ln(1-au), \quad u, a > 0, \quad au < 1.$$

Повторяя рассуждения статьи [10], приводящие к доказательству соотношения (5), легко заметить, что это соотношение выполняется равномерно относительно p в любом интервале вида $0 < p_0 < p < p_1 < 1$.

В статье [11] Г. И. Ивченко показано, что соотношение (5) справедливо и при $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow \infty$ и тех же условиях на r .

Из этих уточнений теоремы Н. В. Смирнова вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$, $\alpha/\ln N \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}\xi/N \rightarrow p$, $0 \leq p \leq 1/2$, выполнено условие (1) и последовательность $r = r(\alpha, N)$ выбрана так, что

$$r > \alpha, \quad \frac{r - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow \infty, \quad \frac{r - \alpha}{\alpha} \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N) = \frac{\sqrt{\alpha(1-\mathbf{E}\xi/N)}}{\sqrt{2\pi(r-\alpha)}} \exp\{-\alpha w((r-\alpha)/\alpha, \mathbf{E}\xi/(N-\mathbf{E}\xi))\}(1+o(1)), \quad (6)$$

где

$$w(u, a) = (1+u) \ln(1+u) + \frac{1}{a}(1-au) \ln(1-au), \quad u, a > 0, \quad au < 1.$$

Лемма 3. Пусть $n, N, \alpha/\ln N \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}\xi/N \rightarrow p$, $0 \leq p \leq 1/2$, выполнено условие (1) и последовательность $r = r(\alpha, N)$ удовлетворяет соотношению

$$r = \alpha + \alpha u((\ln N - 2^{-1} \ln \ln N)/\alpha, \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi)) + \sqrt{\alpha(1-\mathbf{E}\xi/N)/(2 \ln N)} (x - \ln \sqrt{4\pi} + o(1)), \quad (7)$$

где $u(w, \alpha)$ — положительная функция, задаваемая в интервале $0 < w < \infty$ уравнением

$$w(u, a) = (1+u) \ln(1+u) + \frac{1}{a}(1-au) \ln(1-au), \quad u, a > 0, \quad au < 1,$$

x — фиксированное число.

Тогда

$$N \bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N) \rightarrow e^{-x}.$$

Доказательство. Утверждение леммы при $\mathbf{E}\xi/N \rightarrow 0$ доказано в [11]. Рассмотрим случай $\mathbf{E}\xi/N \rightarrow p$, $0 < p \leq 1/2$. Нетрудно показать, что при $w \rightarrow 0$ равномерно относительно a , $0 \leq a \leq c < \infty$,

$$u(w, a) = \sqrt{\frac{2w}{1+a}}(1 + o(1)) \quad (8)$$

Учитывая это соотношение, нетрудно показать, что последовательность $r = r(\alpha, N)$ удовлетворяет условиям леммы 2

$$r > \alpha, \quad \frac{r - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow \infty, \quad \frac{r - \alpha}{\alpha} \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \ln N \bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N) &= \ln N + \ln \sqrt{(1 - \mathbf{E}\xi/N)/(2\pi)} - \ln((r - \alpha)/\sqrt{\alpha}) \\ &\quad - \alpha w((r - \alpha)/\alpha, \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi) + o(1)). \end{aligned} \quad (9)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} u &= u(\alpha^{-1}(\ln N_2 - 1 \ln \ln N), \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi)), \\ \Delta &= \sqrt{\frac{1 - \mathbf{E}\xi/N}{2\alpha \ln N}} (x - \ln \sqrt{4\pi} + o(1)). \end{aligned}$$

В этих обозначениях в силу (6)

$$\frac{r - \alpha}{\alpha} = u + \Delta.$$

Применяя формулу Тейлора к функции $w(u + \Delta, \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi))$ в окрестности точки $(u, \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi))$ и учитывая, что $u \rightarrow 0$, получаем соотношение

$$w\left(u + \Delta, \frac{\mathbf{E}\xi}{N - \mathbf{E}\xi}\right) = w\left(u, \frac{\mathbf{E}\xi}{N - \mathbf{E}\xi}\right) + \Delta(\ln(1 + u) - \ln(1 - au)) + O(\Delta^2). \quad (10)$$

Из определения функции u следуют легко проверяемые соотношения

$$\begin{aligned} \alpha w\left(\frac{\mathbf{E}\xi}{N - \mathbf{E}\xi}\right) &= \ln N - \frac{1}{2} \ln \ln N, \\ \alpha \Delta \ln 1 + u/(1 - au) &= x - \ln \sqrt{4\pi} + o(1), \\ \alpha \Delta^2 &= O(1/\ln N) = o(1). \end{aligned}$$

Поэтому из (7), (8) получаем, что

$$\begin{aligned} \ln N \bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N) &= \ln N - \ln \sqrt{2\pi/(1 - \mathbf{E}\xi/N)} \\ &\quad - \ln \sqrt{2(1 - \mathbf{E}\xi/N) \ln N} + o(1) - \alpha w\left(\frac{r - \alpha}{\alpha}, \frac{\mathbf{E}\xi}{N - \mathbf{E}\xi}\right) = -x + o(1), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы 3.

4. Асимптотика вероятности $p(m, r)$

Для изучения асимптотического поведения вероятности

$$p(m, r) = \mathbf{P}(\eta_1 > r, \dots, \eta_m > r)$$

получим сначала явный вид производящей функции

$$\varphi(z_1, \dots, z_m) = \mathbf{E} z_1^{\eta_1} \dots z_m^{\eta_m}.$$

Пусть

$$\varphi_n(z_1, \dots, z_N) = \mathbf{E} z_1^{\eta_1} \dots z_N^{\eta_N}$$

и

$$S_r(Z_1, \dots, z_m) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} z_{i_1} \dots z_{i_r}$$

— однородный симметрический многочлен степени r от m переменных, $r = 1, \dots, m$, положим также $S_0(z_1, \dots, z_m) = 1$.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\varphi_n(z_1, \dots, z_N) = \left(\sum_{m=l}^L \frac{1}{\binom{N}{m}} S_m(z_1, \dots, z_N) \mathbf{P}\{\xi = m\} \right)^n. \quad (11)$$

Доказательство. Так как все $\binom{N}{m}$ возможных размещений частиц комплекта при условии, что $\xi = m$, равновероятны, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1, \dots, z_m) &= \sum_{m=l}^L \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq N} \frac{1}{\binom{N}{m}} z_{i_1} \dots z_{i_m} \mathbf{P}\{\xi = m\} \\ &= \sum_{m=l}^L \frac{1}{\binom{N}{m}} S_m(z_1, \dots, z_N) \mathbf{P}\{\xi = m\}. \end{aligned}$$

Соотношение (11) следует теперь из независимости размещений комплектов.

Для того чтобы найти явный вид производящей функции $\varphi(z_1, \dots, z_m)$, нам понадобится соотношение, связывающее $S_r(z_1, \dots, z_m)$ и $S_r(z_1 - 1, \dots, z_m - 1)$.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$S_m(z_1, \dots, z_N) = \sum_{k=0}^m \binom{N-k}{m-k} S_k(z_1 - 1, \dots, z_N - 1). \quad (12)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что для $k \leq m$

$$\left. \frac{\partial^k S_m(z_1, \dots, z_N)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right|_{z_1 = \dots = z_N = 1} = \binom{N-k}{m-k},$$

если среди индексов $i_1, \dots, i_k$ нет одинаковых, и частная производная равна нулю, если среди $i_1, \dots, i_k$ есть хотя бы два одинаковых значения.

Поэтому, разлагая $S_m(z_1, \dots, z_N)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(1, \dots, 1)$, получаем, что

$$\begin{aligned} S_m(z_1, \dots, z_N) &= \sum_{k=0}^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq N} \left. \frac{\partial^k S_m(z_1, \dots, z_N)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right|_{z_1 = \dots = z_N = 1} (z_{i_1} - 1) \dots (z_{i_k} - 1) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{N-k}{m-k} S_k(z_1 - 1, \dots, z_N - 1). \end{aligned}$$

Лемма 6. Пусть $m \leq N$ и выполнено условие (1), тогда

$$\varphi(z_1, \dots, z_m) = \left(\sum_{k=0}^m \frac{\mathbf{E}(\xi)_k}{(N)_k} S_k(z_1 - 1, \dots, z_m - 1) \right)^n. \quad (13)$$

Доказательство. Так как $\varphi(z_1, \dots, z_m) = \varphi_n(z_1, \dots, z_m, 1, \dots, 1)$, из (10) и (11) получаем, что

$$\varphi(z_1, \dots, z_m) = \left(\sum_{k=0}^m \frac{\mathbf{E}(\xi)_k}{(N)_k} S_k(z_1 - 1, \dots, z_N - 1) \Big|_{z_{m+1} = \dots = z_N = 1} \right)^n.$$

Остается еще заметить, что

$$S_k(z_1 - 1, \dots, z_N - 1) \Big|_{z_{m+1} = \dots = z_N = 1} = S_k(z_1 - 1, \dots, z_m - 1).$$

Получим интегральное представление для $p(m, r)$. Используя тождество

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{\mathbf{E}\xi}{N} (z_j - 1) \right) &= \sum_{k=2}^m \left(\frac{\mathbf{E}\xi}{N} \right)^k S_k(z_1 - 1, \dots, z_m - 1) \\ &\quad + 1 + \frac{\mathbf{E}\xi}{N} S_1(z_1 - 1, \dots, z_m - 1) \end{aligned}$$

и лемму 6, запишем $\varphi(z_1, \dots, z_m)$ в виде

$$\varphi(z_1, \dots, z_m) = \left(\prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{\mathbf{E}\xi}{N} (z_j - 1) \right) - \sum_{k=2}^m b(k) S_k(z_1 - 1, \dots, z_m - 1) \right)^n, \quad (14)$$

где

$$b(k) = \left(\frac{\mathbf{E}\xi}{N} \right)^k - \frac{\mathbf{E}(\xi)_k}{(N)_k}, \quad k = 2, \dots, m.$$

Положим $z_1 = Re^{i\theta_1}, \dots, z_m = Re^{i\theta_m}$ и введем обозначения

$$\begin{aligned} H &= H(\theta_1, \dots, \theta_m) = \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{\mathbf{E}\xi}{N} (z_j - 1) \right), \\ A &= A(\theta_1, \dots, \theta_m) = \sum_{k=2}^m b(k) S_k(z_1 - 1, \dots, z_m - 1), \\ C &= C(\theta_1, \dots, \theta_m) = \prod_{j=1}^m \frac{e^{-ir\theta_j}}{Re^{ir\theta_j}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Лемма 7. При $R > 1$

$$p(m, r) = \frac{1}{(2\pi R^r)^m} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} (H - A)^n C d\theta_1 \dots d\theta_m. \quad (16)$$

Доказательство. Вероятность $\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_m = k_m\}$ для любых целых неотрицательных $k_1, \dots, k_m$ можно следующим образом представить в виде интеграла типа Коши от производящей функции $\varphi(z_1, \dots, z_m)$:

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_m = k_m\} = \frac{1}{(2\pi i)^m} \oint_{|z_1|=R} \dots \oint_{|z_m|=R} \frac{\varphi(z_1, \dots, z_m)}{z_1^{k_1+1} \dots z_m^{k_m+1}} dz_1 \dots dz_m, \quad (17)$$

где интегрирование по каждой из m переменных проводится по окружностям радиуса R с центром в нуле.

Так как

$$p(m, r) = \sum_{k_1 > r, \dots, k_m > r} \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_m = k_m\},$$

из (17) при $R > 1$ получаем, что

$$p(m, r) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \oint_{|z_1|=R} \dots \oint_{|z_m|=R} \frac{\varphi(z_1, \dots, z_m) dz_1 \dots dz_m}{z_1^{r+1} (z_1 - 1) \dots z_m^{r+1} (z_m - 1)}. \quad (18)$$

Сделав замену переменных $z_j = Re^{i\theta_j}$, $j = 1, \dots, m$, из (14), (15) и (18) получаем (16).

Введем обозначение

$$G = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} ((H - A)^n - H^n) C d\theta_1 \dots d\theta_m. \quad (19)$$

Поскольку

$$(\bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N))^m = \frac{1}{(2\pi R^r)^m} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} H^n C d\theta_1 \dots d\theta_m,$$

из (16) для $p(m, r)$ получаем представление

$$p(m, r) = (\bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N))^m + \frac{G}{(2\pi R^r)^m}. \quad (20)$$

Если последовательность $r = r(\alpha, N)$ удовлетворяет (7), то согласно лемме 2

$$N \bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N) \rightarrow e^{-x}.$$

Таким образом, для доказательства леммы 1 достаточно показать, что в условиях леммы 1

$$|G|/R^m = o(1/N^m). \quad (21)$$

Из (18) следует, что

$$|G| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} |A|^k |H|^{n-k} |C| d\theta_1 \dots d\theta_m, \quad (22)$$

поэтому для доказательства (21) нам понадобятся оценки величин $|A|^k$, $|H|^{n-k}$, $|C|$.

Для того чтобы оценить интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} |A|^k |H|^{n-k} |C| d\theta_1 \dots d\theta_m,$$

положим

$$R = \frac{r(1 - (\mathbf{E}\xi/N))}{\alpha(1 - (1 - (r/n)))},$$

где последовательность $r = r(\alpha, N)$ удовлетворяет соотношению (7).

Лемма 8. Для любых целых k , $2 \leq k \leq N$,

$$0 \leq b(k) \leq \frac{k(k-1)}{\mathbf{E}\xi} \left(\frac{\mathbf{E}\xi}{N} \right)^k. \quad (23)$$

Это утверждение выполняется в силу условия (1).

Если $n, N, \alpha/\ln N \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}\xi/N \rightarrow p$, $0 \leq p \leq 1/2$, и последовательность $r = r(\alpha, N)$ удовлетворяет (7), то, как следует из (9), равномерно по p , $0 \leq p \leq 1/2$,

$$u(\alpha^{-1}(\ln N - 2^{-1} \ln \ln N), \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi)) = \sqrt{\frac{2(1 - (\mathbf{E}\xi/N)) \ln N}{\alpha}} (1 + o(1)). \quad (24)$$

Поэтому, полагая $u_r = (r - \alpha)/\alpha$, находим, что при $n, N, \alpha/\ln N \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}\xi/N \rightarrow p$, $0 \leq p \leq 1/2$, для последовательности $r = r(\alpha, N)$, удовлетворяющей (7), выполняются соотношения

$$\frac{r}{n} = \frac{\mathbf{E}\xi}{N} (1 + o(1)) \rightarrow p, \quad \frac{\alpha u_r^2}{N} = \frac{2(1 - (\mathbf{E}\xi/N)) \ln N}{N} (1 + o(1)) \rightarrow 0. \quad (25)$$

Лемма 9. Пусть $n, N, \alpha/\ln N \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}\xi/N \rightarrow p$, $0 \leq p \leq 1/2$, выполнено условие (1) и последовательность $r = r(\alpha, N)$ удовлетворяет соотношению (7). Тогда, начиная с некоторых значений параметров, будет выполнено неравенство

$$|A| \leq \frac{2^{m+1} \mathbf{E}\xi}{N^2} \left(\sum_{j=1}^m |Re^{i\theta_j} - 1| \right)^2. \quad (26)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$|A| \leq \sum_{k=2}^m b(k) S_k(|Re^{i\theta_j} - 1|, \dots, |Re^{i\theta_m} - 1|), \quad (27)$$

поэтому в силу леммы 8

$$|A| \leq \frac{1}{\mathbf{E}\xi} \sum_{k=2}^m \left(\frac{\mathbf{E}\xi}{N} \right)^k k(k-1) S_k(|Re^{i\theta_1} - 1|, \dots, |Re^{i\theta_m} - 1|). \quad (28)$$

Нетрудно проверить, что имеет место тождество

$$\sum_{k=2}^m \binom{k}{2} S_k(x_1, \dots, x_m) = S_2(x_1/(1+x_1), \dots, x_m/(1+x_m)) \prod_{j=1}^m (1+x_j). \quad (29)$$

В самом деле, дважды дифференцируя по y обе части равенства

$$\prod_{j=1}^m (1+x_j y) = \sum_{k=0}^m S_k(x_1, \dots, x_m) y^k$$

и полагая $y = 1$, получаем (29).

С помощью (29) преобразуем неравенство (28) к виду

$$|A| \leq \frac{2}{\mathbf{E}\xi} S_2 \left(\frac{(\mathbf{E}\xi/N)|Re^{i\theta_1} - 1|}{1 + (\mathbf{E}\xi/N)|Re^{i\theta_1} - 1|}, \dots, \frac{(\mathbf{E}\xi/N)|Re^{i\theta_m} - 1|}{1 + (\mathbf{E}\xi/N)|Re^{i\theta_m} - 1|} \right) \times \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{\mathbf{E}\xi}{N} |Re^{i\theta_j} - 1| \right).$$

Так как

$$2S_2(x_1, \dots, x_m) \leq \left(\sum_{j=1}^m x_j \right)^2, \quad 2S_2(x_1, \dots, x_m) = \left(\sum_{j=1}^m x_j \right)^2 - \sum_{j=1}^m x_j^2,$$

для действительных $x_1, \dots, x_m$ для $|A|$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |A| &\leq \frac{\mathbf{E}\xi}{N^2} \left(\sum_{j=1}^m \frac{|Re^{i\theta_j} - 1|}{1 + |Re^{i\theta_j} - 1|(\mathbf{E}\xi/N)} \right)^2 \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{\mathbf{E}\xi}{N} |Re^{i\theta_j} - 1| \right) \\ &\leq \frac{\mathbf{E}\xi}{N^2} \left(\sum_{j=1}^m |Re^{i\theta_j} - 1| \right)^2 \left(1 + \frac{\mathbf{E}\xi}{N} + \frac{\mathbf{E}\xi R}{N} \right)^m. \end{aligned} \quad (30)$$

Как следует из (26), в условиях леммы $R \rightarrow 1$, поэтому при фиксированном m , начиная с некоторых значений параметров,

$$\left(1 + \frac{\mathbf{E}\xi}{N} + \frac{\mathbf{E}\xi R}{N} \right)^m \leq 2^{m+1}.$$

Поэтому из (30) следует, что, начиная с некоторых значений параметров, в условиях леммы

$$|A| \leq \frac{2^{m+1} \mathbf{E} \xi}{N^2} \left(\sum_{j=1}^m |Re^{i\theta_j} - 1| \right)^2.$$

Лемма 10. При выполнении условий леммы 9 для любого фиксированного m найдется такое положительное a , что, начиная с некоторых значений параметров,

$$|A|^k \leq \left(\frac{a \mathbf{E} \xi}{N^2} \right)^k \left(m(R-1)^{2k} + R^{2k} \sum_{j=1}^m |\theta_j|^{2k} \right). \quad (31)$$

Доказательство. Для $k \geq 1$ и неотрицательных $x_1, \dots, x_m$

$$(x_1 + \dots + x_m)^k \leq m^{k-1} (x_1^k + \dots + x_m^k). \quad (32)$$

Из (32) и (28) следует, что

$$\begin{aligned} |A|^k &\leq \left(\frac{2^{m+1} \mathbf{E} \xi}{N^2} \right)^k \left(\sum_{j=1}^m |Re^{i\theta_j} - 1| \right)^{2k} \\ &\leq \left(\frac{2^{m+1} \mathbf{E} \xi}{N^2} \right)^k m^{2k-1} \sum_{j=1}^m |Re^{i\theta_j} - 1|^{2k}. \end{aligned}$$

Так как $|Re^{i\theta} - 1| \leq R - 1 + R|\theta|$, еще раз применяя неравенство (32), находим, что

$$\begin{aligned} |A|^k &\leq \left(\frac{2^{m+1} \mathbf{E} \xi}{N^2} \right)^k m^{2k-1} \sum_{j=1}^m (R - 1 + R|\theta_j|)^{2k} \\ &\leq \left(\frac{2^{m+1} \mathbf{E} \xi}{N^2} \right)^k \left(m(R-1)^{2k} + R^{2k} \sum_{j=1}^m \theta_j^{2k} \right). \end{aligned}$$

Полагая $a = 2^{m+1}(2m)^2$, получаем утверждение леммы.

Лемма 11. В условиях леммы 9, начиная с некоторых значений параметров, при $|\theta_j| \leq \pi$, $i = 1, \dots, m$, и $k = 1, \dots, n$

$$|C| \leq \left(\frac{1}{u_r} \right)^m, \quad |H|^{n-k} \leq \left(\frac{1 - (\mathbf{E} \xi / N)}{1 - (r/N)} \right)^{nm} 4^{mk} \prod_{j=1}^m e^{(r/8)(1-r/n)(1-k/n)\theta_j^2}. \quad (33)$$

Доказательство. Из определения C следует, что

$$|C| = \prod_{j=1}^m \frac{1}{|Re^{i\theta_j}|}.$$

Так как

$$|Re^{i\theta}| = \sqrt{(R-1)^2 + 4R \sin^2 \frac{\theta}{2}} \geq |R-1|,$$

справедливы неравенства

$$|C| \leq \frac{1}{(R-1)^m} = \left(1 - \frac{r/n}{u_r}\right)^m \leq \left(\frac{1}{u_r}\right)^m.$$

В силу выбора R

$$\begin{aligned} \left|1 + \frac{\mathbf{E}\xi}{N}(Re^{i\theta} - 1)\right| &= \frac{1 - \mathbf{E}\xi/N}{1 - r/n} \sqrt{1 - \frac{4r}{n} \left(1 - \frac{r}{n}\right) \sin^2(\theta/2)} \\ &\leq \frac{1 - \mathbf{E}\xi/N}{1 - r/n} \exp\{(2r/n)(1 - r/n) \sin^2(\theta/2)\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая, что $\sin \theta \geq 2\theta/\pi > \theta/2$ при $0 \leq \theta \leq \pi/2$, из (34) получаем соотношение

$$|H|^{n-k} \leq \left(\frac{1 - \mathbf{E}\xi/N}{1 - r/n}\right)^{m(n-k)} \prod_{j=1}^m \exp\{r(1 - r/n)(1 - k/n)\theta_j^2/8\}.$$

Для доказательства (33) остается заметить, что, начиная с некоторых значений параметров, справедливо неравенство

$$\left(\frac{1 - r/n}{1 - \mathbf{E}\xi/N}\right)^k \leq \left(\frac{1}{1 - \mathbf{E}\xi/N}\right)^k \leq 4^k.$$

Введем обозначение

$$D = \left(\frac{1 - \mathbf{E}\xi/N}{1 - r/n}\right)^n \frac{1}{u_r}.$$

Найдем связь между D и $\bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N)$.

Лемма 12. В условиях леммы 9

$$\bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N) = \sqrt{\frac{1 - \mathbf{E}\xi/N}{2\pi\alpha}} \frac{D}{R^r} (1 + o(1)). \quad (35)$$

Доказательство. Согласно лемме 2

$$\bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N) = \sqrt{\frac{1 - \mathbf{E}\xi/N}{2\pi\alpha}} \frac{1}{u_r} \exp\{-\alpha w(u_r, \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi))\} (1 + o(1)). \quad (36)$$

Покажем, что

$$\frac{D}{R^r} = \frac{1}{u_r} \exp\{-\alpha w(u_r, \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi))\}. \quad (37)$$

Так как

$$\begin{aligned} r &= \alpha(1 + u_r), \\ 1 - \frac{r}{n} &= \left(1 - \frac{\mathbf{E}\xi}{N}\right) \left(1 - \frac{u_r \mathbf{E}\xi}{N - \mathbf{E}\xi}\right), \\ R &= \left(1 - \frac{\mathbf{E}\xi}{N}\right) \frac{1 + u_r}{1 - r/n} = 1 + \frac{u_r}{1 - u_r \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi)}, \end{aligned}$$

из определения D и R следует, что

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{R^r} &= \frac{1}{u_r} \exp \left\{ n \ln \frac{1 - \mathbf{E}\xi/N}{1 - r/n} - r \ln R \right\} \\
 &= \frac{1}{u_r} \exp \left\{ -\alpha(1 + u_r) \ln \frac{1 + u_r}{1 - u_r \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi)} - n \ln \left(1 - \frac{u_r \mathbf{E}\xi}{N - s} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{u_r} \exp \left\{ -\alpha \left((1 + u_r) \ln(1 + u_r) + \frac{n - r}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{u_r \mathbf{E}\xi}{N - \mathbf{E}\xi} \right) \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{u_r} \exp \left\{ -\alpha \left((1 + u_r) \ln(1 + u_r) + \frac{N - \mathbf{E}\xi}{\mathbf{E}\xi} \left(1 - \frac{u_r \mathbf{E}\xi}{N - \mathbf{E}\xi} \right) \ln \left(1 - \frac{u_r \mathbf{E}\xi}{N - \mathbf{E}\xi} \right) \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{u_r} \exp \left\{ -\alpha w \left(u_r, \frac{\mathbf{E}\xi}{N - \mathbf{E}\xi} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Соотношение (35) следует теперь из (36) и (37).

Леммы 2–5, 9–12 доказаны в [6] и [12], но для удобства изложения их доказательства приведены полностью.

Лемма 13. В условиях леммы 9

$$\frac{|G|}{R^{rm}} = o(\bar{B}^m(r, n, \mathbf{E}\xi/N)). \quad (38)$$

Доказательство. Из определения G следует очевидная оценка (22). Из (35), (31), (33) получаем, что

$$|G| \leq m D^m (S_n^{(1)} + S_n^{(2)}), \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned}
 S_l^{(1)} &= \sum_{1 \leq k \leq l} \binom{n}{k} \left(\frac{b \mathbf{E}\xi}{N^2} \right)^k (R - 1)^{2k} I_0^m(k), \\
 S_l^{(2)} &= \sum_{1 \leq k \leq l} \binom{n}{k} \left(\frac{b R^2 \mathbf{E}\xi}{N^2} \right)^k I_0^{m-1}(k) I_1(k), \\
 b &= 4^m a, \\
 d &= \sqrt{r(1 - r/n)(1 - k/n)}, \\
 I_0(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-d^2 \theta^2/8} d\theta, \\
 I_1(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \theta^{2k} e^{-d^2 \theta^2/8} d\theta,
 \end{aligned}$$

В силу леммы 12 для доказательства соотношения (38) достаточно показать, что

$$S_n^{(1)} = o(\alpha^{-m/2}), \quad S_n^{(2)} = o(\alpha^{-m/2}).$$

Ясно, что при $k = 1, \dots, n - 1$

$$I_0(k) = \frac{2}{d} \int_{-\pi d}^{\pi d} e^{-u^2/2} du < \frac{C_1}{d} \quad (40)$$

и поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2k} e^{-u^2/2} du = (2k-1)(2k-3) \cdots 3 \cdot 1,$$

справедливы оценки

$$I_1(k) = \frac{2}{d} \left(\frac{4}{d^2} \right)^k \int_{-\pi d}^{\pi d} u^{2k} e^{-u^2/2} du < \frac{C_1 8^k k!}{d^{2k+1}},$$

где C_1 — положительная постоянная. При этом

$$I_0(n) = 2\pi, \quad I_1(n) = \frac{2\pi^{2n+1}}{2n+1}, \quad (41)$$

Оценим суммы $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$, входящие в (39).

Из (41) и определения $S_n^{(1)}$ следует, что

$$S_n^{(1)} = S_{n-1}^{(1)} + (2\pi)^m \left(\frac{b(R-1)^2 \mathbf{E}\xi}{N^2} \right)^n.$$

В условиях доказываемой леммы справедливы соотношения (26), в силу которых

$$\frac{(R-1)^2 \mathbf{E}\xi}{N^2} = u_r^2 \mathbf{E}\xi \frac{N^{-2}}{(1-r/n)^2} = \frac{2 \ln N}{(1-p)Nn} (1 + o(1)), \quad (42)$$

и следовательно,

$$S_n^{(1)} = S_{n-1}^{(1)} + o(\alpha^{m/2}). \quad (43)$$

Рассмотрим

$$S_{n-1}^{(1)} = S_{n/2}^{(1)} + J^{(1)},$$

где

$$J^{(1)} = \sum_{n/2 < k \leq n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{b(R-1)^2 \mathbf{E}\xi}{N^2} \right)^k I_0^m(k).$$

Используя (41) и неравенства

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

для $S_{n/2}^{(1)}$ получаем оценку

$$\begin{aligned} S_{n/2}^{(1)} &\leq \sum_{1 \leq k \leq n/2} \frac{n^k}{k!} \left(\frac{C_1}{\sqrt{r(1-r/n)(1-k/n)}} \right)^m \\ &\leq \frac{C_2}{(r(1-r/n))^{m/2}} (e^{b(R-1)^2 \mathbf{E}\xi / N^2} - 1), \end{aligned}$$

где C_2 — положительная постоянная.

Учитывая (41), для $S_{n/2}^{(1)}$ получаем соотношение

$$S_{n/2}^{(1)} = O\left(\alpha^{-m/2} \frac{\ln N}{N}\right) = o(\alpha^{-m/2}). \quad (44)$$

Используя (40) и неравенства $\binom{n}{k} \leq n^k/k!$, $k = 0, 1, \dots, n$, получаем оценку для $J^{(1)}$:

$$J^{(1)} = O\left(\alpha^{-m/2} (\sqrt{n})^m \frac{1}{[n/2]!} \left(\frac{\ln N}{N}\right)^{[n/2]+1}\right) = o(\alpha^{-m/2}).$$

Поэтому в силу (42) для $J^{(1)}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} J^{(1)} &\leq \sum_{n/2 < k \leq n-1} \frac{n^k}{k!} \left(\frac{b(R-1)^2 \mathbf{E}\xi}{N^2}\right)^k \left(\frac{C_1}{d}\right)^m \\ &\leq \frac{C_2 (\sqrt{n})^m}{(r(1-r/n))^{m/2} [n/2]!} \sum_{n/2 < k \leq \infty} \left(\frac{b\alpha(R-1)^2}{N}\right)^k. \end{aligned}$$

Таким образом, из (43), (44), (45) получаем, что

$$S_n^{(1)} = o(\alpha^{-m/2}). \quad (45)$$

Исследование асимптотического поведения $S_n^{(2)}$ проведем по тому же плану, что и для $S_n^{(1)}$.

Из (40) следует, что

$$S_n^{(2)} = S_{n-1}^{(2)} + \frac{2\pi^{2\pi+m}}{2n+1} \left(\frac{bR^2 \mathbf{E}\xi}{N^2}\right)^n.$$

В условиях леммы $R \rightarrow 1$, поэтому

$$\frac{1}{n} \left(\frac{bR^2 \mathbf{E}\xi}{N^2}\right)^n = o(\alpha^{-m/2}),$$

и следовательно,

$$S_n^{(2)} = S_{n-1}^{(2)} + o(\alpha^{-m/2}). \quad (46)$$

Рассмотрим

$$S_{n-1}^{(2)} = S_{n/2}^{(2)} + J^{(2)},$$

где

$$J^{(2)} = \sum_{n/2 < k \leq n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{bR^2 \mathbf{E}\xi}{N^2}\right)^k I_0^{m-1}(k) I_1(k).$$

Используя (40) и неравенства $\binom{n}{k} \leq n^k/k!$, $k = 0, 1, \dots, n$, для $S_{n/2}^{(2)}$ получаем оценку

$$\begin{aligned} S_{n/2}^{(2)} &\leq \sum_{1 \leq k \leq n/2} \frac{n^k}{k!} \left(\frac{bR^2 \mathbf{E}\xi}{N^2}\right)^k \left(\frac{1}{d}\right)^{2k+m} C_1^m 8^k k! \\ &\leq \frac{C_2}{(r(1-r/n))^{m/2}} \sum_{1 \leq k \leq n/2} \left(\frac{16bR^2\alpha}{Nr(1-r/n)}\right)^k. \end{aligned}$$

В силу (26) в условиях леммы $R \rightarrow 1$ и $r = \alpha(1 + o(1))$, поэтому

$$\frac{R^2 \alpha}{Nr(1 - (r/n))} = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

следовательно,

$$S_{n/2}^{(2)} = O(\alpha_{-m/2} N^{-1}) = o(\alpha_{-m/2}). \quad (47)$$

Для оценки $J^{(2)}$ используем очевидное неравенство $I_1(k) \leq (2\pi)^k I_0(k)$ и оценку $k! > (k/e)^k$, $k = 0, 1, \dots$. Из (40) и приведенных выше оценок получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} J^{(2)} &= \sum_{n/2 < k \leq n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{2\pi b R^2 \mathbf{E}\xi}{N^2} \right)^k I_0^m(k) \\ &\leq C_2 n^{m/2} (r(1 - r/n))^{-m/2} \sum_{n/2 < k \leq n-1} \frac{n^k}{k!} \left(\frac{2\pi b R^2 \mathbf{E}\xi}{N^2} \right)^k \\ &\leq C_2 (r(1 - r/n))^{-m/2} (\sqrt{n})^m \sum_{k > n/2} \left(\frac{2\pi e b R^2 \mathbf{E}\xi}{N^2} \right)^k \\ &= O(\alpha^{-m/2}) n(m/2) N^{-(\lfloor n/2 \rfloor + 1)} = o(\alpha^{-m/2}) \end{aligned}$$

Из (49), (48) и (47) получаем, что

$$S_n^{(2)} = o(\alpha^{-m/2}). \quad (48)$$

Соотношение (38) следует теперь из (50) и (46).

5. Распределение максимальных членов вариационного ряда

В этом разделе приводится доказательство основной теоремы.

Сначала докажем лемму 1. Выберем последовательность $r = r(\alpha, N)$, удовлетворяющую соотношению (7), тогда из (20) и (38) получаем соотношение

$$p(m, r) = (\bar{B}(r, n, \mathbf{E}\xi/N))^m + \frac{G}{(2\pi R^r)^m} = \left(\frac{e^{-x}}{N} \right)^m (1 + o(1)),$$

так что в условиях теоремы в силу (3) факториальные моменты ζ_r сходятся к факториальным моментам случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda = e^{-x}$. Таким образом, ζ_r в пределе имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = e^{-x}$. Поэтому для любого фиксированного $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_{(N-m+1)} \leq r\} &= \mathbf{P}\{\zeta_r \leq m-1\} \\ &= \mathbf{P}\left\{ \frac{\eta_{(N-m+1)} - \alpha - \alpha u(\alpha^{-1}(\ln N - 2^{-1} \ln \ln N), \mathbf{E}\xi/(N - \mathbf{E}\xi))}{\sqrt{\alpha(1 - s/N)/(2 \ln N)}} + \frac{\ln 4\pi}{2} \leq x \right\} \\ &\rightarrow \sum_{k=0}^{m-1} \pi_k(e^{-x}), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы 1 и леммы 1.

Обзор теорем, описывающих предельное поведение крайних членов вариационного ряда при других соотношениях между параметрами, а также пример распределений, удовлетворяющих условию (1), приведен в [13].

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
2. Викторова И. И., Севастьянов Б. А., О предельном поведении максимума в полиномиальной схеме. *Матем. заметки* (1967) **1**, №3, 331–338.
3. Викторова И. И., Об асимптотическом поведении максимума в равновероятной полиномиальной схеме. *Матем. заметки* (1969) **5**, №3, 305–316.
4. Ивченко Г. И., О предельных распределениях порядковых статистик полиномиальной схемы. *Теория вероятностей и ее применения* (1971) **16**, №1, 94–107.
5. Колчин В. Ф., О предельном поведении крайних членов вариационного ряда в полиномиальной схеме. *Теория вероятностей и ее применения* (1969) **14**, №3, 476–487.
6. Хакимуллин Е. Р., О предельном поведении максимального заполнения в равновероятной схеме размещения частиц комплектами. *Матем. заметки* (1981) **30**, №2, 277–289.
7. Теребулин С. Ю., Вариационный ряд в схеме размещения конечного числа растущих комплектов. *Статистические методы. Межвузовский сб. научных трудов*. Пермь, 1982.
8. Ивченко Г. И., Сколько потребуется выборок, чтобы увидеть все шары в урне. *Матем. заметки* (1998) **64**, №1, 58–63.
9. Sellke T. M., How many iid samples does it take to see all the balls in a box? *Ann. Appl. Prob.* (1995) **5**, №1, 294–309.
10. Смирнов Н. В., О вероятностях больших уклонений. *Матем. сб.* (1933) №4, 443–454.
11. Ивченко Г. И., О сравнении биномиального и пуассоновского законов. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) **19**, №3, 612–615.
12. Хакимуллин Е. Р., *Распределение крайних членов вариационного ряда в схеме размещения частиц комплектами*. Канд. диссертация. МИЭМ, Москва, 1981.
13. Хакимуллин А. Е., Распределение крайних членов вариационного ряда в схеме размещения частиц комплектами случайной длины. В сб.: *Материалы Международной конференции и Российской научной школы «Системные проблемы качества, математического моделирования, информационных, электронных и лазерных технологий»*. Радио и связь, Москва, 2002, с. 59–68.
14. Хакимуллин Е. Р., Энатская Н. Ю., Размещение комплектов случайной длины. В сб.: *Материалы Международной конференции и Российской научной школы «Системные проблемы качества, математического моделирования, информационных, электронных и лазерных технологий»*. Радио и связь, Москва, 2002, с. 69–75.

Статья поступила 19.07.2005.