Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Горцев, Л. А. Нежелская, Асинхронный дважды стохастический поток с инициированием лишних событий, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 2, 59–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:35:20

Асинхронный дважды стохастический поток с инициированием лишних событий

© 2011 г. А. М. Горцев, Л. А. Нежелская

Рассматривается асинхронный дважды стохастический поток с инициированием лишних событий (обобщенный асинхронный поток), являющийся математической моделью информационных потоков, функционирующих в информационно-вычислительных сетях, телекоммуникационных системах, компьютерных сетях связи и т. п. Исследуется стационарный режим функционирования потока. Находится плотность вероятностей $p(\tau)$ длительности интервала между событиями потока, а также совместная плотность вероятностей $p(\tau_1, \tau_2)$ длительностей двух смежных интервалов. Показывается, что обобщенный асинхронный поток в общем случае является коррелированным потоком. Находятся условия, при которых поток становится рекуррентным либо вырождается в простейший.

Работа выполнена в рамках задания Федерального агентства по образованию на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2006–2007 годы, задание 1.22.06.

1. Введение

В связи с интенсивным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания — проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей связи и т. п. Вполне естественно, что это дало толчок к необходимости построения новых математических моделей входящих потоков событий, достаточно адекватно описывающих реальные информационные потоки, функционирующие в таких сетях. Отметим, что одними из первых работ в этом направлении были статьи [1]–[3]. На практике параметры, определяющие входящий поток, изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, что приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. Потоки с интенсивностью, являющейся случайным процессом, можно разделить на два класса. К первому классу относятся потоки с интенсивностью, являющейся непрерывным случайным процессом. Ко второму классу относятся потоки, у которых интенсивность есть кусочно-постоянный случайный процесс. Последние (потоки с переключениями или МС-потоки [1, 2]) являются наиболее характерными для реальных телекоммуникационных сетей. В свою очередь, МС-потоки можно разделить на три типа:

- (1) синхронные потоки — потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий [4];

- (2) асинхронные потоки — потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий [5];
- (3) полусинхронные потоки — потоки, которые в одном множестве состояний имеют тип 1, а в остальных состояниях имеют тип 2 [6].

Подчеркнем, что отмеченные синхронные, асинхронные и полусинхронные потоки можно представить в виде моделей MAP (Markovian Arrival Process) потоков событий [7] с определенными ограничениями на параметры последних [8].

В настоящей работе рассматривается асинхронный поток с инициированием лишних событий, являющийся обобщением асинхронного потока.

2. Постановка задачи

Рассматривается асинхронный дважды стохастический поток с инициированием лишних событий (далее обобщенный асинхронный поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 , $\lambda_1 > \lambda_2$. В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (как и из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -ом состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α_i , $i = 1, 2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе с вероятностью p , $0 \leq p \leq 1$, иницируется лишнее событие во втором состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем иницируется лишнее событие). Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое лишнее событие в первом состоянии иницируется с вероятностью q , $0 \leq q \leq 1$. Очевидно, что в сделанных предположениях $\lambda(t)$ — марковский процесс. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1. Если $p = q = 0$, то имеет место асинхронный поток [5].

Обозначим $\tau_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 1, 2, \dots$, длительность i -го интервала между событиями потока. Пусть $p(\tau_i)$ — плотность вероятностей длительности i -го интервала; $p(\tau_i, \tau_{i+1})$ — совместная плотность вероятностей длительностей двух смежных интервалов, $i = 1, 2, \dots$. Рассмотрим стационарный режим функционирования потока. Тогда $p(\tau_i) = p(\tau)$, $p(\tau_i, \tau_{i+1}) = p(\tau_1, \tau_2)$ для любого i , где τ — длительность интервала, произвольно расположенного на временной оси, τ_1, τ_2 — длительности двух смежных интервалов, также произвольно расположенных на временной оси.

3. Вывод явной формулы для $p(\tau)$

В обобщенном асинхронном потоке присутствуют четыре типа событий: 1-й (2-й) тип — события пуассоновского потока с параметром λ_1 (λ_2); 3-й (4-й) тип — лишние события, иницированные с вероятностью p (q) во втором состоянии (в первом состоянии) процесса $\lambda(t)$ при его переходе из первого состояния во второе (из второго состояния в первое). Пусть $\tau = 0$ — момент наступления события.

Пусть $\pi_{ij}(\tau)$ — условная вероятность того, что на интервале $(0, \tau)$ нет событий потока и $\lambda(\tau) = \lambda_j$, $j = 1, 2$, при условии, что в момент $\tau = 0$ имело место событие i -го типа, $i = 1, \dots, 4$. Для вероятностей $\pi_{ij}(\tau)$ нетрудно выписать следующие системы

Рис. 1. Формирование обобщенного асинхронного потока: 1, 2 — состояния случайного процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, \dots$ — моменты наступления событий; $t_2, t_6, \dots$ — моменты инициирования лишних событий; t_2 — момент инициирования с вероятностью p лишнего события во втором состоянии; t_6 — момент инициирования с вероятностью q лишнего события в первом состоянии

дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \pi'_{i1}(\tau) &= -(\lambda_1 + \alpha_1) \pi_{i1}(\tau) + (1 - q) \alpha_2 \pi_{i2}(\tau), \\ \pi'_{i2}(\tau) &= -(\lambda_2 + \alpha_2) \pi_{i2}(\tau) + (1 - p) \alpha_1 \pi_{i1}(\tau), \quad i = 1, \dots, 4, \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \pi_{11}(0) &= \pi_{22}(0) = \pi_{32}(0) = \pi_{41}(0) = 1, \\ \pi_{12}(0) &= \pi_{21}(0) = \pi_{31}(0) = \pi_{42}(0) = 0. \end{aligned}$$

Решая (1), находим

$$\begin{aligned} \pi_{11}(\tau) &= \pi_{41}(\tau) = -\frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_2}{z_2 - z_1} e^{-z_1 \tau} + \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_1}{z_2 - z_1} e^{-z_2 \tau}, \\ \pi_{12}(\tau) &= \pi_{42}(\tau) = \frac{\alpha_1(1-p)}{z_2 - z_1} e^{-z_1 \tau} - \frac{\alpha_1(1-p)}{z_2 - z_1} e^{-z_2 \tau}, \\ \pi_{21}(\tau) &= \pi_{31}(\tau) = \frac{\alpha_2(1-q)}{z_2 - z_1} e^{-z_1 \tau} - \frac{\alpha_2(1-q)}{z_2 - z_1} e^{-z_2 \tau}, \\ \pi_{22}(\tau) &= \pi_{32}(\tau) = \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_1}{z_2 - z_1} e^{-z_1 \tau} - \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_2}{z_2 - z_1} e^{-z_2 \tau}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1}{2}[(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) \\ &\quad \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}], \quad 0 < z_1 < z_2. \end{aligned}$$

Пусть π_{ij} — вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $\tau = 0$, в который имело место событие i -го типа, поведение потока будет таковым, что следующим событием будет событие j -го типа, $i, j = 1, \dots, 4$. При этом вероятность наступления

события 1-го типа на полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$, где $\Delta\tau$ здесь и далее достаточно малая величина, есть $\lambda_1 \Delta\tau + o(\Delta\tau)$; 2-го типа — $\lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau)$; 3-го типа — $p\alpha_1 \Delta\tau + o(\Delta\tau)$; 4-го типа — $q\alpha_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau)$. Тогда, с учетом введенных вероятностей $\pi_{ij}(\tau)$, получаем

$$\begin{aligned} \pi_{i1} &= \lambda_1 \int_0^\infty \pi_{i1}(\tau) d\tau, & \pi_{i2} &= \lambda_2 \int_0^\infty \pi_{i2}(\tau) d\tau, \\ \pi_{i3} &= p\alpha_1 \int_0^\infty \pi_{i1}(\tau) d\tau, & \pi_{i4} &= q\alpha_2 \int_0^\infty \pi_{i2}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), находим

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= \pi_{41} = \frac{\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2)}{z_1 z_2}, & \pi_{12} &= \pi_{42} = \frac{(1-p)\lambda_2 \alpha_1}{z_1 z_2}, \\ \pi_{13} &= \pi_{43} = \frac{p\alpha_1(\lambda_2 + \alpha_2)}{z_1 z_2}, & \pi_{14} &= \pi_{44} = \frac{q(1-p)\alpha_1 \alpha_2}{z_1 z_2}, \\ \pi_{21} &= \pi_{31} = \frac{(1-q)\lambda_1 \alpha_2}{z_1 z_2}, & \pi_{22} &= \pi_{32} = \frac{\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1)}{z_1 z_2}, \\ \pi_{23} &= \pi_{33} = \frac{p(1-q)\alpha_1 \alpha_2}{z_1 z_2}, & \pi_{24} &= \pi_{34} = \frac{q\alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1)}{z_1 z_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть q_i — стационарная вероятность того, что наступившее событие есть событие i -го типа, $i = 1, \dots, 4$. Нетрудно показать, что последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots$ (см. рис. 1) образует вложенную цепь Маркова [9]. Тогда для вероятностей q_i , $i = 1, \dots, 4$, имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \pi_{ij} q_i &= q_j, \quad j = 1, \dots, 4, \\ \sum_{i=1}^4 q_i &= 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где π_{ij} определены в (4). Решая (5), получаем

$$q_1 = \lambda_1 \alpha_2 a, \quad q_2 = \lambda_2 \alpha_1 a, \quad q_3 = p\alpha_1 \alpha_2 a, \quad q_4 = q\alpha_1 \alpha_2 a, \quad (6)$$

где

$$a = [\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1 + (p + q)\alpha_1 \alpha_2]^{-1}.$$

Пусть $\tilde{\pi}_i$ — условная стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в i -ом состоянии при условии, что в этот момент наступило событие потока, $i = 1, 2$. Тогда, учитывая (6), находим

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1 &= q_1 + q_4 = \alpha_2(\lambda_1 + q\alpha_1)a, \\ \tilde{\pi}_2 &= q_2 + q_3 = \alpha_1(\lambda_2 + p\alpha_2)a. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что вероятность $\tilde{\pi}_i$, $i = 1, 2$, отличается от безусловной вероятности π_i того, что процесс $\lambda(\tau)$ в произвольный момент времени находится в i -ом состоянии [5]:

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Пусть $p_{ij}(\tau)$ — условная вероятность того, что на интервале $(0, \tau)$ нет событий потока и $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что в момент $\tau = 0$ событие произошло и $\lambda(0) = \lambda_i, i, j = 1, 2$. Вероятности $p_{ij}(\tau)$ для $i = 1, 2$ определяются теми же системами дифференциальных уравнений (1), что и вероятности $\pi_{ij}(\tau)$, с теми же граничными условиями. Вследствие этого, для вероятностей $p_{ij}(\tau)$ справедливы формулы (2), в которых вместо $\pi_{ij}(\tau)$ нужно поставить $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$. Тогда искомую плотность $p(\tau)$ можно записать в виде

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \tilde{\pi}_i \sum_{j=1}^2 (\lambda_j + p_j \alpha_j) p_{ij}(\tau), \quad (8)$$

где $p_1 = p, p_2 = q$. Подставляя (2), (7) в (8), получаем

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \\ \gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \lambda_1 - \lambda_2 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda_1 \lambda_2 - \alpha_1 \alpha_2 p q)}{\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1 + (p + q) \alpha_1 \alpha_2} \right]. \quad (9)$$

4. Вывод явной формулы для $p(\tau_1, \tau_2)$

Пусть $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ — длительности двух смежных интервалов; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Так как последовательность моментов наступления событий есть вложенная цепь Маркова, то совместная плотность вероятностей $p(\tau_1, \tau_2)$ принимает вид

$$p(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^2 \tilde{\pi}_i \sum_{j=1}^2 a_j p_{ij}(\tau_1) \sum_{k=1}^2 (a_k + b_k) p_{1k}(\tau_2) \\ + \sum_{i=1}^2 \tilde{\pi}_i \sum_{j=1}^2 b_j p_{ij}(\tau_1) \sum_{k=1}^2 (a_k + b_k) p_{2k}(\tau_2), \quad (10)$$

где $a_1 = \lambda_1, a_2 = q \alpha_2, b_1 = p \alpha_1, b_2 = \lambda_2$, и $\tilde{\pi}_i$ определены формулами (7), $p_{ij}(\tau_k)$ — формулами (2) для $\tau = \tau_1$ либо $\tau = \tau_2, i, j, k = 1, 2$. Подставляя их выражения в (10), находим

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2) \\ + \gamma (1 - \gamma) \frac{\lambda_1 \lambda_2 - p q \alpha_1 \alpha_2}{z_1 z_2} (z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1}) (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}), \quad (11)$$

где $\gamma, p(\tau_j)$ определены в (9) для $\tau = \tau_j, j = 1, 2$.

Из (11) следует, что обобщенный асинхронный поток в общем случае является коррелированным потоком.

Нетрудно получить вероятностные характеристики потока, такие, как математическое ожидание длительности интервала между событиями, дисперсию и ковариацию:

$$\mathbf{M}\tau = \frac{\gamma}{z_1} + \frac{1 - \gamma}{z_2}, \quad \mathbf{D}\tau = 2 \left(\frac{\gamma}{z_1^2} + \frac{1 - \gamma}{z_2^2} \right) - \left(\frac{\gamma}{z_1} + \frac{1 - \gamma}{z_2} \right)^2, \\ \text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \gamma (1 - \gamma) (z_1 - z_2)^2 \frac{\lambda_1 \lambda_2 - p q \alpha_1 \alpha_2}{(z_1 z_2)^3},$$

где z_1, z_2 определены в (2), а γ в (9).

Рассмотрим частные случаи, при которых обобщенный асинхронный поток становится рекуррентным либо вырождается в простейший. Для ситуаций:

$$(1) \lambda_1 \lambda_2 = pq\alpha_1 \alpha_2,$$

$$(2) \lambda_2 = 0, p = 0,$$

$$(3) \lambda_2 = 0, q = 0$$

совместная плотность (11) факторизуется. Так как последовательность моментов наступления событий есть вложенная цепь Маркова, то нетрудно показать, что факторизуется и совместная плотность $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Последнее означает, что для этих ситуаций обобщенный асинхронный поток является рекуррентным [9].

Если $\gamma(1 - \gamma) = 0$ (это равенство имеет место, если либо $\lambda_1 + p\alpha_1 = \lambda_2 + q\alpha_2$ либо $\lambda_1 + q\alpha_1 = \lambda_2 + p\alpha_2$), то обобщенный асинхронный поток вырождается в простейший с параметром $\lambda_1 + p\alpha_1$ либо с параметром $\lambda_1 + q\alpha_1$.

Наконец, рассмотрим особый случай, когда $z_1 = z_2$, при котором в формулах (9), (11) реализуется деление на ноль. Этот случай имеет место, если $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ и $q = 1$ (либо $p = 1$). Здесь

$$p(\tau) = (\lambda_1 + \alpha_1) \frac{\alpha_1(\lambda_2 + p\alpha_2) + \alpha_2(\lambda_1 + p\alpha_1) + (1 - p)\alpha_1\alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}{\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1 + (1 + p)\alpha_1\alpha_2} \times e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (12)$$

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) - \frac{(1 - p)^2\alpha_1^2\alpha_2^2(\lambda_1\lambda_2 - p\alpha_1\alpha_2)}{[\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1 + (1 + p)\alpha_1\alpha_2]^2} \times [1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1][1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\tau_2]e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau_1 + \tau_2)}. \quad (13)$$

В (13) $p(\tau_j)$ определены формулой (12) для $\tau = \tau_j$, $j = 1, 2$. Из (13) вытекает, что обобщенный асинхронный поток для особого случая также является коррелированным потоком. Если же $\lambda_1\lambda_2 = p\alpha_1\alpha_2$, то поток становится рекуррентным; если $p = 1$, то поток вырождается в простейший с параметром $\lambda_1 + \alpha_1$. Для ситуации $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ и $p = 1$ в формулах (12), (13) нужно вместо p подставить q .

5. Заключение

Реальные ситуации в телекоммуникационных сетях характеризуются тем, что параметры, определяющие входящий поток событий, либо частично известны, либо, вообще неизвестны. В связи с этим возникают два класса задач:

- (1) задача фильтрации интенсивности потока (или задача оценивания состояний потока);
- (2) задача оценивания параметров потока.

При решении этих задач полезна информация о свойствах потока, в частности, при каких условиях коррелированный поток становится рекуррентным.

Список литературы

1. Башарин Г. П., Кокотушкин В. А., Наумов В. А., О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. *Известия АН СССР, сер. Техн. киберн.* (1979), № 6, 92–99.
2. Башарин Г. П., Кокотушкин В. А., Наумов В. А., О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. *Известия АН СССР, сер. Техн. киберн.* (1980), № 1, 55–61.
3. Neuts M. F., A versatile Markov point process. *J. Appl. Probab.* (1979) **16**, 764–779.
4. Бушланов И. В., Горцев А. М., Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий. *Автоматика и телемеханика* (2004), № 9, 40–51.
5. Васильева Л. А., Горцев А. М., Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости. *Автоматика и телемеханика* (2003), № 12, 69–79.
6. Горцев А. М., Нежелская Л. А., Оценивание периода мертвого времени и параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий. *Измерительная техника* (2003), № 6, 7–13.
7. Lucantoni D. M., Neuts M. F., Some steady-state distributions for the *MAP/SM/1* queue. *Comm. Stat., Stochastic Models* (1994) **10**, 575–598.
8. Василевская Т. П., Загородняя М. Е., Шмырин И. С., О соотношении моделей МАР-потока событий и асинхронного, полусинхронного и синхронного дважды стохастических потоков событий. *Вестник Томского государственного университета* (2004), № 9 (II), 138–144.
9. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н., *Теория массового обслуживания*. Высшая школа, Москва, 1982.

Статья поступила 14.12.2007.