Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Асимптотические разложения для распределения числа компонент в случайных отображениях и разбиениях, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 2, 66–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:05:37

Асимптотические разложения для распределения числа компонент в случайных отображениях и разбиениях

© 2011 г. А. Н. Тимашёв

Рассматривается класс всех n^n однозначных отображений n -элементного множества в себя. В предположении, что все такие отображения имеют одинаковые вероятности, равные n^{-n} , изучается распределение случайной величины ν_n , равной числу компонент связности в случайно выбранном отображении. Выведены асимптотические оценки вероятности $\mathbf{P}\{\nu_n = N\}$ в предположении, что $n, N \rightarrow \infty$ так, что отношение $N/\ln n$ отграничено от нуля и бесконечности. В частном случае, когда $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N = \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)$, для этой вероятности получено полное асимптотическое разложение.

Аналогичное асимптотическое разложение выведено для $\mathbf{P}\{\xi_n = M\}$, где ξ_n — случайная величина, равная числу циклов в подстановке, выбираемой случайно равновероятно из множества всех $n!$ подстановок степени n , а также для вероятности $\mathbf{P}\{\theta_n = N\}$, где θ_n — число блоков в случайном равновероятном разбиении n -элементного множества.

Рассмотрим класс всех n^n однозначных отображений n -элементного множества в себя. Задавая на этом классе равновероятностное распределение, будем рассматривать случайную величину ν^n , равную числу компонент связности в случайно выбранном отображении. Известно (см., например, [1]), что при $N = 1, \dots, n$

$$\mathbf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{n!}{N! n^n} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(-\ln(1 - \theta(z)))^N}{z^{n+1}} dz, \quad (1)$$

где

$$\theta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} z^k, \quad |z| \leq e^{-1}, \quad (2)$$

и интегрирование в (1) осуществляется по окружности $|z| = z_0 \in (0, e^{-1})$, пробегаемой в положительном направлении.

Известно также (см. стр. 85 в [2]), что если n, N стремятся к бесконечности так, что

$$N = \frac{1}{2} \ln n + x \sqrt{\frac{1}{2} \ln n}, \quad |x| \leq C, \quad (3)$$

где C — постоянная, то

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{\pi \ln n}} e^{-x^2/2} (1 + o(1)) \quad (4)$$

равномерно относительно $x \in [-C, C]$.

Из оценки (4) следует, что при условии (3) случайная величина $\sqrt{2/\ln n}(v_n - \frac{1}{2} \ln n)$ имеет в пределе стандартное нормальное распределение [3].

Оценки вероятности $\mathbf{P}\{v_n = N\}$ для случая, когда $N = N(n)$ при $n \rightarrow \infty$ меняется так, что $N \ln N = o(\ln n)$, можно найти в [4]. В предположении, что $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$1 < \beta_0 \leq \beta = nN^{-1} \leq \beta_1 < \infty,$$

где β_0, β_1 — постоянные, а также при условии, что разность $n - N = o(\sqrt{n})$ и неотрицательна, такого рода оценки получены в [1].

Случай, когда $\ln n = o(N)$ and $N = O((\ln n)^2)$ при $n \rightarrow \infty$, рассматривался в [5].

Используя соотношения (1), (2) и применяя метод перевала, в этой работе мы доказываем следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$0 < \gamma_0 \leq \gamma = \frac{N}{\ln n} \leq \gamma_1, \quad (5)$$

где γ_0 и γ_1 — постоянные. Тогда равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \sqrt{\frac{2\gamma}{n}} \exp(\varphi(\gamma)) \frac{1}{N!} \left(\frac{1}{2} \ln n\right)^N (1 + o(1)), \quad (6)$$

где

$$\varphi(\gamma) = \gamma(1 - \ln(2\gamma)) - \frac{1}{2} < 0 \quad (7)$$

при $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1/2$, $\varphi(1/2) = 0$.

Следствие 1. При условиях теоремы 1

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{\exp(\varphi(\gamma))}{\sqrt{\pi \ln n}} n^{\varphi(\gamma)} (1 + o(1)) \quad (8)$$

равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$.

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$N = \frac{1}{2} \ln n + x \sqrt{\frac{1}{2} \ln n}, \quad (9)$$

где

$$x = x(n) = o(\sqrt{\ln n}), \quad (10)$$

тогда

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{\pi \ln n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \left(\frac{2}{\ln n}\right)^{m/2}\right) (1 + o(1)). \quad (11)$$

Ряд в (11) сходится при всех достаточно больших n и является асимптотическим разложением в том смысле, что если при $n \rightarrow \infty$

$$x = x(n) = o\left((\ln n)^{(M+1)/(2M=6)}\right),$$

то

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{\pi \ln n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1} x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \left(\frac{2}{\ln n}\right)^{m/2}\right) (1 + o(1)), \quad (12)$$

где $M = 0, 1, \dots$

Следствие 2. Если $x = x(n)$ при $n \rightarrow \infty$ меняется так, что

$$x(n) = o((\ln n)^{1/6}),$$

то оценка (4) остается справедливой.

Следствие 3. Если $n \rightarrow \infty$ and $x = x(n) = o(\ln n)^{1/4}$, то

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{\pi \ln n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \sqrt{\frac{2}{\ln n}}\right) (1 + o(1)). \quad (13)$$

Доказательство теоремы 1. При $0 < |z| < e^{-1}$ и условиях (5) положим

$$\omega(z) = \frac{\gamma \ln n}{n} \ln(A(z)) - \ln z, \quad (14)$$

$$A(z) = -\ln(1 - \theta(z)), \quad (15)$$

где функция $\theta(z)$ определена в (2). Тогда, согласно (1),

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{n!}{N! n^n 2\pi i} \int \frac{\exp(n\omega(z))}{z} dz, \quad N = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Интегрирование в (16), как и в (1), осуществляется по окружности $|z| = z_0 \in (0, e^{-1})$, пробегаемой в положительном направлении. Если положить $z_0 = t_0 e^{-t_0}$, где $t = t_0 \in (0, 1)$ — единственный корень уравнения

$$-t^{-1}(1-t)^2 \ln(1-t) = \frac{\gamma \ln n}{n}, \quad (17)$$

то, согласно известному свойству функции $\theta(z)$, выполняется равенство $t_0 = \theta(z_0)$, и, поскольку

$$z(\theta)'(z) = \frac{\theta(z)}{1 - \theta(z)}$$

при $0 < |z| < e^{-1}$, согласно (14), (15), (17) $\omega'(z_0) = 0$.

При $n \rightarrow \infty$ из (5), (17) следует, что

$$\begin{aligned} z_0 &\rightarrow e^{-1}, \\ t_0 = \theta(z_0) &\rightarrow \theta(e^{-1}) = 1. \end{aligned}$$

В [1] показано, что при таких условиях (с учетом (17))

$$\begin{aligned}\exp(A(z_0)) &= (1 - \theta(z_0)) = \sqrt{\frac{n}{2\gamma \ln n} \ln\left(\frac{n}{\gamma \ln n}\right)} (1 + o(1)) \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\gamma}} (1 + o(1)).\end{aligned}\quad (18)$$

Из (18) следует, что

$$A(z_0) = \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \ln(2\gamma) + o(1). \quad (19)$$

Используя (17), оценку (19) можно уточнить. Полагая

$$y = 1 - t_0 \in (0, 1),$$

представим уравнение (17) в виде

$$-y^2 \ln y (1 - y)^{-1} = \frac{\gamma \ln n}{n}. \quad (20)$$

Если $n \rightarrow \infty$, то $y \rightarrow 0$ и

$$y^2 (1 - y)^{-1} = \sum_{m=2}^{\infty} y^m. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20) и используя стандартную технику асимптотических оценок, после элементарных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{\frac{2\gamma}{n}} \left(1 + \frac{\ln(2\gamma)}{2 \ln n} + o(1/\ln n) \right), \\ A(z_0) &= -\ln y = \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \ln(2\gamma) - \frac{\ln(2\gamma)}{2 \ln n} + o(1/\ln n), \\ (A(z_0))^N &= \left(\frac{1}{2} \ln n \right)^N + \exp(-\gamma \ln(2\gamma)) (1 + o(1)).\end{aligned}\quad (22)$$

Кроме того, из равенства

$$z_0 = (1 - y)e^{y-1}$$

следует, что

$$z_0^{-(n+1)} = \exp(n + 1 + \gamma)(1 + O(1/\ln n)). \quad (23)$$

Таким образом, согласно (22), (23)

$$\frac{(A(z_0))^N}{z_0^{n+1}} = \left(\frac{1}{2} \ln n \right)^N \exp(n + 1 + \gamma(1 - \ln(2\gamma))) (1 + O(1/\ln n)). \quad (24)$$

Используя (14), (15), (17), а также оценку

$$-\ln(1 - t_0) = \frac{1}{2} \ln n (1 + O(1/\ln n)),$$

нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\omega''(z_0) &= \frac{\gamma \ln n}{n} \left(-\frac{t_0^2(3-t_0)}{z_0^2(1-t_0)^4 \ln(1-t_0)} - \frac{n^2}{\gamma^2 (\ln n)^2 z_0^2} \right) + \frac{1}{z_0^2} \\ &= \frac{ne^2}{\gamma} (1 + O(1/\ln n)).\end{aligned}\quad (25)$$

Из (25) в частности следует, что $\omega''(z_0) > 0$ при всех достаточно больших значениях n . Таким образом, z_0 — точка перевала первого порядка функции $\omega(z)$.

Следствием (24) и (25) является соотношение

$$\frac{(A(z_0))^N}{z_0^{n+1} \sqrt{\pi e n \omega''(z_0)}} = \left(\frac{1}{2} \ln n \right)^N \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \exp(n + \gamma(1 - \ln(2\gamma))^{1/2})(1 + O(1/\ln n)). \quad (26)$$

Используя стандартную технику метода перевала, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=z_0} \frac{1}{z} \exp(n\omega(z)) dz = \frac{(A(z_0))^N}{z_0^{n+1} \sqrt{\pi e n \omega''(z_0)}} (1 + o(1)). \quad (27)$$

Оценка (6) следует из формул (7), (16), (26), (27) и формулы Стирлинга для $n!$. Теорема 1 доказана.

Оценка (8) следует из (5), (6) и формулы Стирлинга для $N!$. Следствие 1 установлено.

Проиллюстрируем оценку (6) на примере, когда $n = 20\,000$ и $N = 10$. При таких условиях оценка (6) дает значение 0,02009 (с точностью до 10^{-5}). В то же время оценка работы [5] дает значение 0,021150 (с той же точностью), а использование локальной нормальной теоремы для случайной величины ν_n (см. оценку (4)) дает значение 0,01368 (по-видимому, менее точное по сравнению с двумя предыдущими).

Доказательство теоремы 2. Для обоснования оценки (11) при условиях (9), (10) воспользуемся формулой (8). При таких условиях

$$\gamma = \frac{N}{\ln n} = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2 \ln n}} = \frac{1}{2} + o(1),$$

и, согласно (7),

$$\varphi(\gamma) = o(1), \quad \exp(\varphi(\gamma)) = 1 + o(1). \quad (28)$$

Далее,

$$\begin{aligned}n^{\varphi(\gamma)} &= \exp(\varphi(\gamma) \ln n), \\ \varphi(1/2) &= \varphi'(1/2) = 0, \\ \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(1/2) &= (-1)^{k-1} \frac{2^{k-1}}{k(k-1)},\end{aligned}\quad (29)$$

где $k = 2, 3, \dots$. При этом, если $0 < \gamma < 1$, то

$$\varphi(\gamma) = -(\gamma - 1/2)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{k-1}}{k(k-1)} (\gamma - 1/2)^k, \quad (30)$$

и ряд в (30) сходится.

При наших условиях

$$\gamma - \frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{2 \ln n}},$$

поэтому, согласно (30), при $m = k - 2$ получаем, что

$$\varphi(\gamma) \ln n = -\frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \left(\frac{2}{\ln n} \right)^{m/2}. \quad (31)$$

Из оценок (28), (29), (31) и формулы (8) получаем (11). Ряд в (11) сходится, и при $x = o(\sqrt{\ln n})$ является асимптотическим разложением в смысле, указанном в формулировке теоремы 2, поскольку при $\gamma \rightarrow 1/2$ ряд в (30) является асимптотическим разложением. Теорема 2 доказана.

Утверждение следствия 2 получается из (12) при $M = 0$. Оценка (13) следует из (12) при $M = 1$.

Пусть ξ_n — случайная величина, равная числу циклов в подстановке, выбранной случайно равномерно из множества всех $n!$ подстановок степени n . Известно (см. [6]), что, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$N = \ln n + y \sqrt{\ln n} \quad (32)$$

и выполнено условие (10) с заменой x на y , то

$$\mathbf{P}\{\xi_n = N\} = \frac{(\ln n)^N}{N! n} \left(1 + O\left(\frac{|y|}{\ln n} + \frac{1}{\ln n} \right) \right). \quad (33)$$

Известно также (см. [7]), что если $N = \gamma \ln n + o(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$, где γ — положительная постоянная, то

$$\mathbf{P}\{\xi_n = M\} = \frac{(\ln n)^N}{N! n \Gamma(\gamma)} (1 + o(1)). \quad (34)$$

В [8] показано, что соотношение (34) остается справедливым с заменой остаточного члена $o(1)$ на $O(1/\ln n)$ если $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5).

Теорема 3. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$\mathbf{P}\{\xi_n = N\} = \frac{n^\psi}{\Gamma(\gamma) \sqrt{2\pi\gamma \ln n}} (1 + O(1/\ln n)) \quad (35)$$

где

$$\psi(\gamma) = \gamma(1 - \ln \gamma) - 1 < 0 \quad (36)$$

для $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$, $\psi(1) = 0$.

Доказательство. Оценка (35) следует из (34) с учетом (36) (с вышеописанной заменой) и формулы Стирлинга для $N!$. Теорема 3 доказана.

Следующее утверждение является обобщением (33).

Теорема 4. Пусть n и N стремятся к бесконечности так, что выполнены условия (33) и (10) (с указанной заменой). Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} y^{m+2}}{(m+1)(m+2)} (\ln n)^{-m/2}\right) \times \left(1 + O\left(\frac{|y|}{\sqrt{\ln n}} + \frac{1}{\ln n}\right)\right). \quad (37)$$

Ряд в (37) сходится при всех достаточно больших значениях n и является асимптотическим разложением в том смысле, что если при $n \rightarrow \infty$

$$y = y(n) = o((\ln n)^{(M+1)/(2M+6)}),$$

то

$$\mathbf{P}\{\xi_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2} + \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1} y^{m+2}}{(m+1)(m+2)} (\ln n)^{-m/2}\right) \times \left(1 + O\left(\frac{|y|}{\sqrt{\ln n}} + \frac{1}{\ln n} + \frac{|y|^{M+3}}{(\ln n)^{(M+1)/2}}\right)\right), \quad (38)$$

где $M = 0, 1, \dots$

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 2 с учетом (35), (36), если заметить, что

$$\Gamma(y) = \Gamma(1 + y/\sqrt{\ln n}) = 1 + O(|y|/\sqrt{\ln n})$$

и

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \frac{y}{\sqrt{\ln n}} - \left(1 + \frac{y}{\sqrt{\ln n}}\right) \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{\ln n}}\right) \\ &= -\frac{y^2}{2 \ln n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} y^{m+2}}{(m+1)(m+2)} (\ln n)^{-(m+2)/2} \end{aligned}$$

при $|y| < \sqrt{\ln n}$.

Следствие 4. Если $y = y(n)$ при $n \rightarrow \infty$ меняется так, что

$$y(n) = o((\ln n)^{1/6}),$$

то

$$\mathbf{P}\{\xi_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln n}} \exp(-y^2/2) \left(1 + O\left(\frac{|y + y^3|}{\sqrt{\ln n}} + \frac{1}{\ln n}\right)\right).$$

Следствие 5. Если $y = y(n) = o((\ln n)^{1/4})$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\{\xi_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6\sqrt{\ln n}}\right) \left(1 + O\left(\frac{|y|}{\sqrt{\ln n}} + \frac{1 + y^4}{\ln n}\right)\right).$$

Утверждения следствий 4 и 5 получаются из (38) при $M = 0$ и $M = 1$ соответственно.

Рассмотрим случайную величину θ_n , равную числу блоков в разбиении, выбранном случайно и равновероятно из класса всех разбиений множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Пусть B_n — число таких разбиений (число Белла), тогда (см. стр. 139 в [9])

$$\mathbf{P}\{\theta_n = N\} = \frac{\sigma(n, N)}{B_n}, \quad N = 1, 2, \dots, n. \quad (39)$$

При этом

$$\sum_{N=1}^n \sigma(n, N) = B_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и $\sigma(n, N)$ — числа Стирлинга второго рода.

Известно [10], что при $n \rightarrow \infty$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \exp(n(r + 1/r - 1) - 1)(1 + o(1)), \quad (40)$$

где r — единственный положительный корень уравнения

$$re^r = n, \quad (41)$$

$r \equiv \ln n$ при $n \rightarrow \infty$, точнее (см. [10]),

$$r = \ln n - \ln \ln n + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right).$$

Известно также (см. стр. 141 в [9]), что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\theta_n &= \frac{n}{\ln n}(1 + o(1)), \\ \mathbf{D}\theta_n &= \frac{n}{(\ln n)^2} \end{aligned}$$

и случайная величина

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}}(\theta_n - \mathbf{E}\theta_n)$$

имеет в пределе стандартное нормальное распределение.

Если $N = N(n) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, то (см. [11])

$$\sigma(n, N) = \frac{N^n}{N!} \exp(-Ne^{-n/N}(1 + o(1))). \quad (42)$$

Теорема 5. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$N = \frac{n + z\sqrt{n}}{r}, \quad (43)$$

где

$$z = z(n) = o(\sqrt{n}/\ln n), \quad (44)$$

и r — единственный положительный корень уравнения (41). Тогда

$$\mathbf{P}\{\theta_n = M\} = \frac{\ln n}{\sqrt{2\pi n}} \times \exp\left(-\frac{z^2}{2}\left(1 + \frac{1}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^{m+2}}{(m+2)n^{m/2}} \left(1 + \frac{1}{r(m+1)}\right)\right) (1 + o(1)), \quad (45)$$

Разложение (45) является асимптотическим разложением в том смысле, что если $z = o(n^{(M+1)/(2M+6)})$ при $n \rightarrow \infty$, то в соответствующем сходящемся ряде достаточно ограничиться первыми M членами.

Доказательство. При условиях (41), (43), (44)

$$N \equiv \frac{n}{r} \equiv \frac{n}{\ln n},$$

и поэтому $N = o(n)$, так что справедлива оценка (42).

Кроме того, при этих условиях

$$Ne^{-n/N} \equiv \exp\left(\frac{rz}{\sqrt{n} + z}\right) = 1 + o(1),$$

то есть, согласно (42),

$$\sigma(n, N) = \frac{N^n}{N!} e^{-1} (1 + o(1)).$$

Подставляя эту оценку в (39) и используя (40), получаем, что

$$\mathbf{P}\{\theta_n = N\} = \frac{N^n}{N!} \sqrt{\ln n} \exp(-n(r + 1/r - 1)(1 + o(1))). \quad (46)$$

Формула Стирлинга для $N!$ с учетом (41), (43), (44), (46), дает равенство

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P}\{\theta_n = N\} &= -z\sqrt{n} + \frac{z\sqrt{n}}{r} \\ &+ \left(n - \frac{n}{r} - \frac{z\sqrt{n}}{r}\right) \ln(1 + z/\sqrt{n}) + \ln\left(\frac{\ln n}{\sqrt{2\pi n}}\right) + o(1). \end{aligned} \quad (47)$$

Поскольку $|z| < \sqrt{n}$ при всех достаточно больших значениях n , при таких n

$$\ln(1 + z/\sqrt{n}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^m}{m n^{m/2}}. \quad (48)$$

Подставляя (48) в (47), после элементарных преобразований получаем, что

$$\ln \mathbf{P}\{\theta_n = N\} = \ln\left(\frac{\ln n}{\sqrt{2\pi n}}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^{m+2} (m+1 + 1/r)}{(m+1)(m+2)n^{m/2}} + o(1). \quad (49)$$

Формула (49) равносильна (45). Из (44) следует, что ряд в (45) является асимптотическим разложением. Теорема 5 доказана.

Следствие 6. При условиях теоремы 5 пусть $z = o(\sqrt{\ln n})$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\theta_n = N\} = \frac{\ln n}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-z^2/2)(1 + o(1)).$$

Список литературы

1. Тимашёв А. Н., Случайные отображения конечных множеств с известным числом компонент. *Теория вероятностей и ее применения* (2003) **48**, №4, 818–828.
2. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
3. Harris B., Probability distributions related to random mappings. *Ann. Math. Statist.* (1960) **31**, №4, 1045–1062.
4. Павлов Ю. Л., Предельные распределения одной характеристики случайного отображения. *Теория вероятностей и ее применения* (1981) **27**, №4, 829–834.
5. Чеплюкова И. А., Об одной характеристике случайного отображения с известным числом циклов. *Дискретная математика* (2006) **18**, №3, 43–60.
6. Волынец Л. М., Оценка скорости сходимости к предельному распределению для числа циклов в случайной подстановке. В сб.: *Вероятностные задачи дискретной математики*. МИЭМ, Москва, 1987, с. 40–46.
7. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Наука, Москва, 2000.
8. Тимашёв А. Н., Об асимптотических разложениях для распределения числа циклов в случайной подстановке. *Дискретная математика* (2003) **15**, №3, 117–127.
9. Сачков В. Н., *Вероятностные методы а комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.
10. Moser L. M., Wyman M., An asymptotic for the Bell numbers. *Trans. Royal Soc. Canada* (1955) **49**, 49–54.
11. Медведев Ю. И., Ивченко Г. И., Асимптотические представления конечных разностей степенной функции в произвольной точке. *Теория вероятностей и ее применения* (1965) **10**, №1, 139–144.

Статья поступила 19.12.2008.