Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Я. Савельев, С. В. Балакин, Комбинаторное вычисление моментов характеристик серий в троичных марковских последовательностях, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 2, 76–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 03:52:45

Комбинаторное вычисление моментов характеристик серий в троичных марковских последовательностях

© 2011 г. Л. Я. Савельев, С. В. Балакин

Описываются маргинальные и совместные распределения чисел значений и чисел серий в троичных марковских последовательностях. Сравнительная простота таких последовательностей позволяет с помощью прямых комбинаторных вычислений вывести точные формулы для средних значений, дисперсий и ковариаций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00384.

1. Введение

Предлагаемая статья продолжает работу авторов [1] о совместных распределениях чисел значений и чисел серий в двоичных марковских последовательностях. В качестве важного частного случая двоичные и троичные марковские последовательности выделяются во многих работах, в которых рассматриваются марковские последовательности с конечным множеством значений [2]–[10]. Двоичные и троичные марковские последовательности наиболее просты, и для распределений различных их характеристик удастся получать сравнительно простые точные формулы, поддающиеся анализу и пригодные для вычислений. Эти последовательности широко используются в различных прикладных исследованиях. Совместные распределения различных характеристик серий в двоичных и троичных марковских последовательностях представляют особый интерес. Они позволяют конкретизировать и лучше понять многие общие свойства структуры дискретных марковских последовательностей и имеют важные приложения. В статье описываются совместные распределения различных комбинаций чисел значений и их серий. Выводятся точные формулы для средних значений, дисперсий и ковариаций.

2. Постановка задачи

2.1. Числа значений и серий из них на конечном отрезке дискретной марковской последовательности не зависят от природы ее значений, и их можно заменить номерами. Рассмотрим марковскую последовательность ξ случайных переменных $\xi(k)$, $k \geq 0$, с множеством значений $C = \{1, \dots, \omega\} = \{1, 2, 3\}$, начальным вектором A и переходной

матрицей Q :

$$A = (a_\alpha) = (a_1, a_2, a_3), \quad Q = (q_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$a_\alpha \geq 0, \quad \sum_{\alpha} a_\alpha = 1, \\ q_{\alpha\beta} \geq 0, \quad \sum_{\beta} q_{\alpha\beta} = 1, \quad \alpha, \beta \in C.$$

В рассматриваемом случае $\omega = 3$ иногда удобно выделять вероятности $p = q_{11}$, $q = q_{22}$, $r = q_{33}$, сохранения состояния 1, 2, 3 при переходе, вводить относительные коэффициенты $\alpha = q_{12}/(1 - q_{11})$, $\beta = q_{23}/(1 - q_{22})$, $\gamma = q_{31}/(1 - q_{33})$ циклических изменений состояний при переходах $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$ и записывать переходную матрицу в виде

$$Q = \begin{pmatrix} p & (1-p)\alpha & (1-p)(1-\alpha) \\ (1-q)(1-\beta) & q & (1-q)\beta \\ (1-r)\gamma & (1-r)(1-\gamma) & r \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем, что здесь α , β , γ уже не индексы, а коэффициенты. Для этой записи нужно, чтобы $q_{11}, q_{22}, q_{33} < 1$. Если $a_3 = \beta = 0$, $\alpha = r = 1$, то последовательность эквивалентна двоичной, рассматривавшейся в [1]. Естественно выделяются также случаи $\alpha = \beta = \gamma = 1$ и $p = q = r = 0$. В первом случае значение сохраняется или изменяется циклически, а во втором изменяется с вероятностью 1. Выделяются также случай симметричной матрицы Q . Условие $q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}$ делает матрицу Q бистochasticкой.

Обозначим $\tau = \text{tr } Q$ след матрицы Q , $\nu = (\tau - 1)/2$ ее нормированный след, $\Delta = \det Q$ ее определитель, $\Delta_{\alpha\beta}$ алгебраическое дополнение элемента $q_{\alpha\beta}$, I единичную 3×3 матрицу. Они составляют матрицу

$$M = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix}.$$

Как легко проверить,

$$\det(\lambda I - Q) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\nu\lambda + \Delta).$$

Характеристическими для матрицы Q служат числа

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \nu + \mu, \quad \lambda_3 = \nu - \mu,$$

где $\mu = \sqrt{\nu^2 - \Delta} \geq 0$.

Заметим, что $\lambda_2 + \lambda_3 = 2\nu$, $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = \Delta$. Матрица Q стохастическая, поэтому $-1/2 \leq \nu \leq 1$, $|\lambda_2| \leq 1$, $|\lambda_3| \leq 1$ и $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_3| < 1$ при $q_{\alpha\beta} > 0$ (см. стр. 4 в [4]). Следовательно, $|\Delta| \leq 1$ и $|\Delta| < 1$ при $q_{\alpha\beta} > 0$.

Выделим особые случаи. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \lambda_3 &\iff \mu = 0 \iff \Delta = \nu^2 \iff |\nu| = \sqrt{\Delta} \iff \lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\Delta}, \\ \lambda_2 = 1 &\iff \mu = 1 - \nu \iff \Delta = 2\nu - 1 \iff \nu = (\Delta + 1)/2, \\ \lambda_3 = 1 &\iff \mu = \nu - 1 \iff \nu = 1 \iff \tau = 3 \iff Q = I. \end{aligned}$$

Равенства $1 = \lambda_2 = \lambda_3$ верны, если и только если $Q = I$. Условия $v \neq 1$, $\Delta \neq 2v - 1$, $\Delta \neq v^2$ исключают существование равных характеристических чисел. Легко также проверить, что эти условия исключают также равенства $|\lambda_2| = 1$, $|\lambda_3| = 1$. Из теоремы Гершгорина [11] следует, что для этих равенств необходимо условие $v = -1/2$. Из неравенств $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_3| < 1$ следует неравенство $|\Delta| < 1$.

Замечание 1. Сформулированные условия обеспечивают регулярность рассматриваемой марковской последовательности. Как правило, в дальнейшем без оговорок рассматривается регулярная марковская последовательность. Исключения будут очевидны или будут специально оговариваться. В выкладках с определителем Δ часто неявно предполагается, что $\Delta \neq 0$.

2.2. Для вычисления степеней Q^n переходной матрицы Q проще всего привести ее к жордановой форме. Как нетрудно проверить, для характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ собственными являются соответственно векторы

$$\begin{aligned} v_1 &= \{v_{11}, v_{12}, v_{13}\} = \{1, 1, 1\}, \\ v_2 &= \{v_{21}, v_{22}, v_{23}\} = \{\Delta_{31} + q_{13}\lambda_2, \Delta_{32} + q_{23}\lambda_2, \lambda_2^2 - (q_{11} + q_{22})\lambda_2 + \Delta_{33}\}, \\ v_3 &= \{v_{31}, v_{32}, v_{33}\} = \{\Delta_{31} + q_{13}\lambda_3, \Delta_{32} + q_{23}\lambda_3, \lambda_3^2 - (q_{11} + q_{22})\lambda_3 + \Delta_{33}\}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом регулярном случае среди характеристических чисел нет равных, и преобразующая матрица

$$V = \begin{pmatrix} 1 & v_{21} & v_{31} \\ 1 & v_{22} & v_{32} \\ 1 & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix}$$

невырожденная. Ее определитель

$$w = \det V = v_{31}(v_{23} - v_{22}) + v_{32}(v_{21} - v_{23}) + v_{33}(v_{22} - v_{21})$$

не равен нулю, и существует обратная матрица

$$W = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{pmatrix},$$

где $w_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $v_{\beta\alpha}$ матрицы V , которое легко вычисляется (α — номер строки, β — номер столбца). Жорданова матрица

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

диагональна, и для каждого $n \geq 0$ верно равенство

$$Q^n = VJ^nW.$$

Отсюда получаем общее выражение для элементов матрицы Q^n , равных вероятностям перехода из α в β за n шагов:

$$q_{\alpha\beta}(n) = \mathbf{P}\{\xi(n) = \beta \mid \xi(0) = \alpha\} = \frac{w_{\beta 1}}{w} + \frac{w_{\beta 2}}{w} \lambda_2^n v_{2\alpha} + \frac{w_{\beta 3}}{w} \lambda_3^n v_{3\alpha}. \quad (1)$$

Формула Перрона [4, §5.1], [12] дает

$$q_{\alpha\beta}(n) = \frac{\Delta_{\beta\alpha}(1)}{(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)} + \frac{\Delta_{\beta\alpha}(\lambda_2)}{(\lambda_2-1)(\lambda_2-\lambda_3)}\lambda_2^n + \frac{\Delta_{\beta\alpha}(\lambda_3)}{(\lambda_3-1)(\lambda_3-\lambda_2)}\lambda_3^n, \quad (2)$$

где $\Delta_{\beta\alpha}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение $\beta\alpha$ -элемента матрицы $Q(\lambda) = \lambda I - Q$. (Подчеркнем, что в формуле (2) индексы α и β транспонированы.)

Как легко проверить,

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta\beta}(\lambda) &= \lambda^2 - (\tau - q_{\beta\beta})\lambda + \Delta_{\beta\beta}, \\ \Delta_{\beta\alpha}(\lambda) &= \lambda q_{\alpha\beta} + \Delta_{\beta\alpha}, \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Общее выражение для матрицы Q^n дает интерполяционная формула Лагранжа (см. раздел 5 в гл. 5 в [12]):

$$Q^n = \frac{(Q - \lambda_2 I)(Q - \lambda_3 I)}{(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)} + \frac{(Q - I)(Q - \lambda_3 I)}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - \lambda_3)}\lambda_2^n + \frac{(Q - I)(Q - \lambda_2 I)}{(\lambda_3 - 1)(\lambda_3 - \lambda_2)}\lambda_3^n. \quad (3)$$

Из формулы Лагранжа следует эквивалентная ей формула Сильвестра:

$$Q^n = \frac{1}{b(\lambda_2, \lambda_3)} (b_0(\lambda_2, \lambda_3, n)I - b_1(\lambda_2, \lambda_3, n)Q + b_2(\lambda_2, \lambda_3, n)Q^2), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} b(\lambda_2, \lambda_3) &= (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3), \\ b_0(\lambda_2, \lambda_3, n) &= (1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_2\lambda_3 - (1 - \lambda_3)\lambda_3\lambda_2^n + (1 - \lambda_2)\lambda_2\lambda_3^n, \\ b_1(\lambda_2, \lambda_3, n) &= (\lambda_2^n - \lambda_3^n) - (1 - \lambda_3^2)\lambda_2^n + (1 - \lambda_2^2)\lambda_3^n, \\ b_2(\lambda_2, \lambda_3, n) &= (\lambda_2 - \lambda_3) - (1 - \lambda_3)\lambda_2^n + (1 - \lambda_2)\lambda_3^n. \end{aligned}$$

В формулах (2)–(4) не используются собственные векторы. Нужны только попарно различные характеристические числа матрицы Q .

2.3. В особом случае кратного корня

$$\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\Delta} < 1$$

формулу для Q^n можно получить из (3) предельным переходом при $\lambda_2 \rightarrow \lambda$, $\lambda_3 \rightarrow \lambda$:

$$Q^n = \frac{1}{(1 - \lambda)^2} ((\lambda I - Q)^2 + n\lambda^{n-1}(I - Q)Q - (n - 1)\lambda^n(I - Q^2) + (n - 2)\lambda^{n+1}(I - Q)). \quad (5)$$

Из формулы (5) следует эквивалентная ей формула Сильвестра:

$$Q^n = \frac{1}{(1 - \lambda)^2} (b_0(\lambda, n)I - b_1(\lambda, n)Q + b_2(\lambda, n)Q^2), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} b_0(\lambda, n) &= \lambda^2 - (n - 1)\lambda^n + (n - 2)\lambda^{n+1}, \\ b_1(\lambda, n) &= 2\lambda - n\lambda^{n-1} + (n - 2)\lambda^{n+1}, \\ b_2(\lambda, n) &= 1 - n\lambda^{n-1} + (n - 1)\lambda^n. \end{aligned}$$

Коэффициент $b_\alpha(\lambda, n)$ получается из отношения $b_\alpha(\lambda_2, \lambda_3, n)/(\lambda_2 - \lambda_3)$ предельным переходом при $\lambda_2 \rightarrow \lambda, \lambda_3 \rightarrow \lambda$.

В рассматриваемом особом случае формула Перрона дает:

$$q_{\alpha\beta}(n) = \frac{\Delta_{\beta\alpha}(1)}{(1-\lambda)^2} + \partial_x \left(\frac{x^n \Delta_{\beta\alpha}(x)}{x-1} \right)_{x \rightarrow \lambda}.$$

Вычисляя производную, находим, что

$$q_{\alpha\beta}(n) = \frac{\Delta_{\beta\alpha}(1)}{(1-\lambda)^2} - \frac{n\lambda^{n-1}}{1-\lambda} \left(\Delta_{\beta\alpha}(\lambda) + \frac{\lambda}{n} \left(\frac{\Delta_{\beta\alpha}(\lambda)}{1-\lambda} + \Delta_{\beta\alpha}(0, \lambda) + \Delta_{\beta\alpha}(\lambda, 0) \right) \right). \quad (7)$$

Здесь $\Delta_{\beta\alpha}(0, \lambda)$, $\Delta_{\beta\alpha}(\lambda, 0)$ — определители, получающиеся из $\Delta_{\beta\alpha}(\lambda)$ соответственно заменой элементов 1-го и 2-го столбца на их производные, равные 1 или 0. Используемое при вычислении производной равенство

$$\partial_x(\Delta_{\beta\alpha}(x)) = \Delta_{\beta\alpha}(0, x) + \Delta_{\beta\alpha}(x, 0)$$

следует из правила дифференцирования определителей.

Выбор подходящей формулы из (1)–(7) для анализа и вычислений зависит от рассматриваемого случая и применяемой методики.

2.4. Случайные величины $x_\beta(n)$, $y_\beta(n)$ и $z_\beta(n)$, равные соответственно числу β -значений, числу β -серий и числу переходов $\beta \rightarrow \beta$ в последовательности ξ на отрезке $[0, n]$, формально выражаются равенствами

$$\begin{aligned} x_\beta(n) &= \eta_\beta(0) + \sum_{k=1}^n \eta_\beta(k), \\ y_\beta(n) &= x_\beta(n) - z_\beta(n), \\ z_\beta(n) &= \sum_{k=1}^n \eta_\beta(k-1)\eta_\beta(k). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\eta_\beta(k)$ обозначает индикатор события $\xi(k) = \beta$:

$$\eta_\beta(k) = 1 \quad (\xi(k) = \beta), \quad \eta_\beta(k) = 0 \quad (\xi(k) \neq \beta).$$

Для случайной величины $y_\beta(n)$ верно также равенство

$$y_\beta(n) = \eta_\beta(0) + \sum_{k=1}^n (1 - \eta_\beta(k-1))\eta_\beta(k). \quad (9)$$

Сумма в (9) равна числу переходов $\alpha \rightarrow \beta$ ($\alpha \neq \beta$) в последовательности ξ на отрезке $[0, n]$. Такой переход описывает начало β -серии. Переход $\beta \rightarrow \beta$ описывает продолжение β -серии. Последовательность $z_\beta(n)$ будет играть техническую роль. Последовательности $x_\beta(n)$ и $y_\beta(n)$ в общем случае немарковские.

Задачи.

- (1) Найти распределения случайных переменных $\xi(n)$ и случайных величин $x_\beta(n)$, $y_\beta(n)$.
- (2) Найти средние значения, дисперсии и ковариации случайных величин $x_\beta(n)$, $y_\beta(n)$.

3. Распределение $\xi(k)$

3.1. Пусть

$$p_\beta(n) = \mathbf{P}\{\xi(n) = \beta\}, \quad P(n) = \{p_1(n), p_2(n), p_3(n)\}.$$

По марковскому свойству $P(n) = A Q^n$. Из (1) получаем равенство

$$p_\beta(n) = \frac{w_{\beta 1}}{w} + \left(\frac{w_{\beta 2}}{w} \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha v_{2\alpha} \right) \lambda_2^n + \left(\frac{w_{\beta 3}}{w} \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha v_{3\alpha} \right) \lambda_3^n. \quad (10)$$

Равенство (2) дает

$$p_\beta(n) = \frac{\Delta_\beta(1)}{(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)} + \frac{\Delta_\beta(\lambda_2)}{(\lambda_2-1)(\lambda_2-\lambda_3)} \lambda_2^n + \frac{\Delta_\beta(\lambda_3)}{(\lambda_3-1)(\lambda_3-\lambda_2)} \lambda_3^n, \quad (11)$$

где

$$\Delta_\beta(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha \Delta_{\beta\alpha}(\lambda).$$

Как легко проверить,

$$\Delta_\beta(\lambda) = a_\beta \lambda^2 - \lambda(a_\beta \tau - A Q_\beta) + A M_\beta,$$

где Q_β и M_β обозначают β -столбцы матриц Q и M .

3.2. В регулярном случае, когда $|\lambda_2| < 1, |\lambda_3| < 1$, существует предельное распределение и по (10), (11) предельные вероятности выражаются равенствами

$$p_\beta = p_\beta(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_\beta(n) = \frac{w_{\beta 1}}{w} = \frac{\Delta_\beta(1)}{(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}. \quad (12)$$

В особом случае кратного корня $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\Delta} < 1$ из (7) следует равенство

$$p_\beta = \frac{\Delta_\beta(1)}{(1-\lambda)^2}.$$

Другие особые случаи нужно рассматривать специально. Это нетрудно сделать.

Введем обозначения, которые будут использоваться для упрощения формул:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3}, \\ \kappa &= \frac{1}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1)} = \frac{1}{(1 - v)^2 - \mu^2}, \\ c_\beta(\gamma, n) &= \frac{\Delta_\beta(\lambda_2) \lambda_2^n}{(\lambda_2 - 1)^\gamma} - \frac{\Delta_\beta(\lambda_3) \lambda_3^n}{(\lambda_3 - 1)^\gamma}, \\ c_{\alpha\beta}(\gamma, n) &= \frac{\Delta_{\beta\alpha}(\lambda_2) \lambda_2^n}{(\lambda_2 - 1)^\gamma} - \frac{\Delta_{\beta\alpha}(\lambda_3) \lambda_3^n}{(\lambda_3 - 1)^\gamma}, \\ d_\beta(\gamma, n) &= \frac{\Delta_\beta(\lambda_2) \Delta_{\beta\beta}(\lambda_2) \lambda_2^n}{(\lambda_2 - 1)^\gamma} - \frac{\Delta_\beta(\lambda_3) \Delta_{\beta\beta}(\lambda_3) \lambda_3^n}{(\lambda_3 - 1)^\gamma}, \\ d_{\beta\beta}(\gamma, n) &= \frac{\Delta_\beta(\lambda_3) \Delta_{\beta\beta}(\lambda_2) \lambda_2^n}{(\lambda_2 - 1)^\gamma} - \frac{\Delta_\beta(\lambda_2) \Delta_{\beta\beta}(\lambda_3) \lambda_3^n}{(\lambda_3 - 1)^\gamma}, \end{aligned}$$

$$d_{\beta\beta}(\gamma, m, n) = \frac{\Delta_{\beta}(\lambda_2)\Delta_{\beta\beta}(\lambda_3)\lambda_2^m\lambda_3^{n-m}}{(\lambda_3 - 1)^\gamma} - \frac{\Delta_{\beta}(\lambda_3)\Delta_{\beta\beta}(\lambda_2)\lambda_3^m\lambda_2^{n-m}}{(\lambda_2 - 1)^\gamma}.$$

Из (2), (11) и (12) в рассматриваемом регулярном случае получаем ($n > 0$)

$$\begin{aligned} p_{\beta}(0) &= a_{\beta}, & q_{\beta\beta}(0) &= 1, \\ p_{\beta}(n) &= p_{\beta} + \rho c_{\beta}(1, n), & q_{\alpha\beta}(n) &= p_{\beta} + \rho c_{\alpha\beta}(1, n). \end{aligned} \quad (13)$$

Подчеркнем, что в регулярном случае при любом α верно равенство $q_{\alpha\beta}(\infty) = p_{\beta}$ (см. гл. 1 в [4]).

3.3. Рассмотрим частный случай, когда переходы $\alpha \rightarrow \alpha$ имеют одну и ту же вероятность p , переходы $2, 3 \rightarrow 1$ имеют одну и ту же вероятность $q = 1 - p$, переходы $1 \rightarrow 1, 3$ имеют одну и ту же вероятность $r = q/2$, переходы $2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$ невозможны. В этом случае

$$Q = \begin{pmatrix} p & r & r \\ q & p & 0 \\ q & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Легко проверить равенства

$$\begin{aligned} \tau &= 3p, \quad \Delta = p(p - q), \quad v = p - r, \quad \mu = r, \quad \lambda_2 = p, \quad \lambda_3 = p - q, \\ p_1(n) &= \frac{1}{2}(1 + (a_1 - (1 - a_1))(p - q)^n), \\ p_2(n) &= p_3(n) = \frac{1}{4}(1 + 2(a_2 - a_3)p^n - (a_1 - (1 - a_1))(p - q)^n). \end{aligned}$$

Предельное распределение $(p_1, p_2, p_3) = (1/2, 1/4, 1/4)$ не зависит от начальных и переходных вероятностей.

4. Средние значения

4.1. Среднее значение $\mathbf{E}(x_{\beta}(n))$ случайной величины $x_{\beta}(n)$ равно сумме вероятностей $p_{\beta}(n) = \mathbf{P}\{\eta_{\beta}(k) = 1\}$, $n \geq 0$. Применяя равенство (13) и суммируя, в регулярном случае получаем, что

$$\mathbf{E}(x_{\beta}(n)) = a_{\beta} + np_{\beta} - \rho c_{\beta}(2, 1) + \rho c_{\beta}(2, n + 1). \quad (14)$$

Заметим, что в рассматриваемом регулярном случае

$$(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3) = (1 - v)^2 - \mu^2 = 2 + \Delta - \tau \neq 0.$$

Положим

$$r_{\beta}(u, v) = (1 - v)^2(a_{\beta}u^2 - (a_{\beta}\tau - AQ_{\beta})u + AM_{\beta}).$$

Здесь, как и прежде, $A = (a_{\beta})$ – строка начальных вероятностей, а Q_{β} и M_{β} обозначают β -столбцы матриц Q и M . Как нетрудно проверить,

$$c_{\beta}(2, m) = \kappa^2(r_{\beta}(\mu + v, v - \mu)(\mu + v)^m - r_{\beta}(v - \mu, \mu + v)(v - \mu)^m).$$

Для постоянного члена и остатка верны равенства

$$\begin{aligned} \rho c_{\beta}(2, 1) &= \rho \kappa^2(r_{\beta}(\mu + v, v - \mu)(\mu + v) - r_{\beta}(v - \mu, \mu + v)(v - \mu)), \\ \rho c_{\beta}(2, n + 1) &= \rho \kappa^2(r_{\beta}(\mu + v, v - \mu)(\mu + v)^{n+1} - r_{\beta}(v - \mu, \mu + v)(v - \mu)^{n+1}). \end{aligned}$$

Замечание 2. В регулярном случае $|\lambda_2| = |\nu + \mu| < 1$, $|\lambda_3| = |\nu - \mu| < 1$, поэтому $\rho_{c\beta}(2, n+1) = O(\mu + |\nu|) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но в то же время $\rho \rightarrow \infty$ при $\lambda_2 - \lambda_3 \rightarrow 0$ и $\kappa \rightarrow \infty$ при $\lambda_2 \rightarrow 1$ или $\lambda_3 \rightarrow 1$. Если характеристические числа близки к 1 или друг к другу, то лучше не переходить к общему знаменателю, дающему множители ρ , κ , а использовать формулы с $b_i(\lambda_2, \lambda_3, n)$, которые нетрудно вывести.

4.2. Вычислим средние значения $\mathbf{E}(z_\beta(n))$, $\mathbf{E}(y_\beta(n))$ случайных величин $z_\beta(n)$, $y_\beta(n)$ при $n \geq 1$. При $k \geq 1$

$$\mathbf{E}(\eta_\beta(k-1)\eta_\beta(k)) = \mathbf{P}\{\eta_\beta(k-1) = 1, \eta_\beta(k) = 1\} = p_\beta(k-1)q_{\beta\beta},$$

поэтому

$$\mathbf{E}(z_\beta(n)) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\eta_\beta(k-1)\eta_\beta(k)) = \sum_{k=1}^n p_\beta(k-1)q_{\beta\beta}.$$

По аналогии с (14) находим, что

$$\mathbf{E}(z_\beta(n)) = (np_\beta - \rho_{c\beta}(2, 0) + \rho_{c\beta}(2, n))q_{\beta\beta}. \quad (15)$$

Из (8), (14) и (15) следует равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(y_\beta(n)) &= a_\beta + np_\beta(1 - q_{\beta\beta}) - \rho(c_\beta(2, 1) - q_{\beta\beta}c_\beta(2, 0)) \\ &\quad - \rho(c_\beta(2, n)q_{\beta\beta} - c_\beta(2, n+1)). \end{aligned} \quad (16)$$

Для постоянных членов и остатков в (15) и (16) легко получить выражения, аналогичные полученным для (14). Относительно них верно замечание, аналогичное замечанию 2.

5. Ковариации

5.1. Вычислим ковариацию $\mathbf{C}(x_\beta(m), x_\beta(n))$ случайных величин $x_\beta(m)$, $x_\beta(n)$, $m \leq n$. По определению,

$$\mathbf{C}(x_\beta(m), x_\beta(n)) = \mathbf{E}(x_\beta(m)x_\beta(n)) - \mathbf{E}(x_\beta(m))\mathbf{E}(x_\beta(n)). \quad (17)$$

С помощью (8) получаем равенства

$$\mathbf{E}(x_\beta(m)x_\beta(n)) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{E}(\eta_\beta(j)\eta_\beta(k)).$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}(x_\beta(m)x_\beta(n)) = a_\beta + S_p(m) + a_\beta(S_q(m) + S_q(n)) + S_{pq}(m, m) + S_{pq}(m, n), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} S_p(m) &= \sum_{j=1}^m p_\beta(j), & S_q(m) &= \sum_{j=1}^m q_{\beta\beta}(j), \\ S_{pq}(m, n) &= \sum_{j=1}^m p_\beta(j) \sum_{i=1}^{n-j} q_{\beta\beta}(i) = \sum_{j=1}^m p_\beta(j) S_q(n-j). \end{aligned}$$

Суммы $S_p(m) = S_{p_\beta}(m)$ и $S_q(m) = S_{q_\beta}(m)$ равны средним соответственно чисел значений β и переходов $\beta \rightarrow \beta$ в последовательности ξ на отрезке $[1, m]$. Используя (8), суммируя и приводя подобные члены, находим, что

$$\begin{aligned} S_p(m) &= mp_\beta - \rho c_\beta(2, 1) + \rho c_\beta(2, m + 1), \\ S_q(m) &= mp_\beta - \rho c_{\beta\beta}(2, 1) + \rho c_{\beta\beta}(2, m + 1), \end{aligned} \quad (19)$$

$$S_{pq}(m, n) = AS(m, n) + BS + RS(m, n), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} AS(m, n) &= np_\beta(mp_\beta - \rho c_\beta(2, 1)) - \frac{1}{2}m(m + 1)p_\beta^2 - mp_\beta\rho c_{\beta\beta}(2, 1), \\ BS &= -\rho(p_\beta c_\beta(3, 1) - \rho c_\beta(2, 1)c_{\beta\beta}(2, 1)), \\ RS(m, n) &= \rho RS1(m, n) + \rho^2 RS2(m, n) + \rho^3 RS3(m, n), \\ RS1(m, n) &= (n - m)p_\beta c_\beta(2, m + 1) + p_\beta(c_\beta(3, m + 1) \\ &\quad + c_{\beta\beta}(3, n + 1) - c_{\beta\beta}(3, n - m + 1)), \\ RS2(m, n) &= md_\beta(3, n + 1) - c_\beta(2, m + 1)c_{\beta\beta}(2, 1), \\ RS3(m, n) &= -\Delta\kappa(d_{\beta\beta}(1, n) + d_{\beta\beta}(1, m, n)). \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя равенства из групп (19), (21) в (18), находим, что

$$\mathbf{E}(x_\beta(m)x_\beta(n)) = A_{\text{exx}}(m, n) + B_{\text{exx}} + R_{\text{exx}}(m, n), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\text{exx}}(m, n) &= (n - 1)mp_\beta^2 + np_\beta(a_\beta - \rho c_\beta(2, 1)) \\ &\quad + mp_\beta(1 + a_\beta - \rho(c_\beta(2, 1) + 2c_{\beta\beta}(2, 1))), \\ B_{\text{exx}} &= (a_\beta - \rho c_\beta(2, 1))(1 - 2\rho c_{\beta\beta}(2, 1)) - p_\beta\rho(2c_\beta(3, 1) + c_{\beta\beta}(3, 1)), \\ R_{\text{exx}}(m, n) &= R1_{\text{exx}}(m, n)\rho + R2_{\text{exx}}(m, n)\rho^2 + R3_{\text{exx}}(m, n)\rho^3, \\ R1_{\text{exx}}(m, n) &= (n - m)p_\beta c_\beta(2, m + 1) + c_\beta(2, m + 1) \\ &\quad + a_\beta(c_{\beta\beta}(2, m + 1) + c_{\beta\beta}(2, n + 1)) + p_\beta(2c_\beta(3, m + 1) \\ &\quad + c_{\beta\beta}(3, m + 1) + c_{\beta\beta}(3, n + 1) - c_{\beta\beta}(3, n - m + 1)), \\ R2_{\text{exx}}(m, n) &= m(d_\beta(3, m + 1) + d_\beta(3, n + 1)) - 2c_\beta(2, m + 1)c_{\beta\beta}(2, 1), \\ R3_{\text{exx}}(m, n) &= \Delta\kappa(d_{\beta\beta}(1, m) + d_{\beta\beta}(1, n) + d_{\beta\beta}(1, m, m) + d_{\beta\beta}(1, m, n)). \end{aligned}$$

Для произведения средних, вследствие (14), получаем равенство

$$\mathbf{E}(x_\beta(m))\mathbf{E}(x_\beta(n)) = A_{\text{exx}}(m, n) + B_{\text{exx}} + R_{\text{exx}}(m, n), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\text{exx}}(m, n) &= np_\beta(mp_\beta + a_\beta - \rho c_\beta(2, 1)) + mp_\beta(a_\beta - \rho c_\beta(2, 1)), \\ B_{\text{exx}} &= (a_\beta - \rho c_\beta(2, 1))^2, \\ R_{\text{exx}}(m, n) &= R1_{\text{exx}}(m, n)\rho + R2_{\text{exx}}(m, n)\rho^2, \\ R1_{\text{exx}}(m, n) &= np_\beta c_\beta(2, m + 1) + mp_\beta c_\beta(2, n + 1) \\ &\quad + a_\beta(c_\beta(2, m + 1) + c_\beta(2, n + 1)), \\ R2_{\text{exx}}(m, n) &= c_\beta(2, m + 1)c_\beta(2, n + 1) \\ &\quad - c_\beta(2, 1)(c_\beta(2, m + 1) + c_\beta(2, n + 1)). \end{aligned}$$

Вычитая (23) из (22), находим, что

$$\mathbf{C}(x_\beta(m)x_\beta(n)) = A_{\text{cxx}}(m) + B_{\text{cxx}} + R_{\text{cxx}}(m, n), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\text{cxx}}(m) &= A_{\text{exx}}(m, n) - A_{\text{eex}}(m, n) \\ &= mp_\beta(1 - p_\beta - 2\rho c_{\beta\beta}(2, 1)), \\ B_{\text{cxx}} &= B_{\text{exx}} - B_{\text{eex}} = (a_\beta - \rho c_\beta(2, 1))(1 - a_\beta + \rho(c_\beta(2, 1) - 2c_{\beta\beta}(2, 1))) \\ &\quad - p_\beta \rho(2c_\beta(3, 1) + c_{\beta\beta}(3, 1)), \\ R_{\text{cxx}}(m, n) &= R_{\text{exx}}(m, n) - R_{\text{eex}}(m, n). \end{aligned}$$

Как нетрудно проверить,

$$2\rho c_{\beta\beta}(2, 1) = 2\chi^2(2(\Delta - \nu)(1 - q_{\beta\beta}) + (\Delta - 1)(\Delta - \Delta_{\beta\beta})).$$

Подстановка этого выражения в (24) дает выражение коэффициента при главном члене ковариации $\mathbf{C}(x_\beta(m)x_\beta(n))$ через след и определитель переходной матрицы Q , ее элементы и миноры. Точно так же можно получить развернутые выражения для постоянного члена B_{cxx} и остатка $R_{\text{cxx}}(m, n)$. Заметим, что

$$R_{\text{cxx}}(m, n) = \rho \chi O(m(\mu + |\nu|^m)).$$

Так как $\mathbf{C}(x_\beta(n)x_\beta(n)) = \mathbf{V}(x_\beta(n))$, из (24) получается формула для дисперсии $\mathbf{V}(x_\beta(n))$ случайной переменной $x_\beta(n)$:

$$\mathbf{V}(x_\beta(n)) = a_\beta(1 - a_\beta) + np_\beta(1 - p_\beta - 2\rho c_{\beta\beta}(2, 1)) - B_{\text{vx}} + R_{\text{cxx}}(n, n), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} B_{\text{vx}} &= \rho(c_\beta(2, 1) - 2a_\beta(c_\beta(2, 1) - c_{\beta\beta}(2, 1)) + p_\beta(2c_\beta(3, 1) + c_{\beta\beta}(3, 1))) \\ &\quad + \rho^2(c_\beta^2(2, 1) - 2d_\beta(4, 2)) + 2\rho^3 d_{\beta\beta}(2, 1)\Delta. \end{aligned}$$

Подставляя в это выражение известные значения $c_\beta(\gamma, m)$, $c_{\beta\beta}(\gamma, m)$, $d_\beta(\gamma, m)$, $d_{\beta\beta}(\gamma, m)$, $\Delta_\beta(\lambda)$, $\Delta_{\beta\beta}(\lambda)$ для $\lambda = \lambda_2 = \mu + \nu$, $\lambda = \lambda_3 = \nu - \mu$, легко выразить постоянный член B_{vx} дисперсии $\mathbf{V}(x_\beta(n))$ через след и определитель переходной матрицы Q , ее элементы и миноры. То же самое можно сделать и для остатка $R_{\text{cxx}}(n, n)$, но выражение получается слишком громоздким.

Если $m > n$, то

$$\mathbf{C}(x_\beta(m)x_\beta(n)) = np_\beta(1 - p_\beta - 2\rho c_{\beta\beta}(2, 1)) + B_{\text{cxx}} + R_{\text{cxx}}(n, m).$$

Это следует из симметричности проведенных при доказательстве равенства (24) рассуждений.

5.2. Вычислим ковариацию $\mathbf{C}(z_\beta(m), z_\beta(n))$ случайных величин $z_\beta(m)$, $z_\beta(n)$, $m \leq n$. По определению,

$$\mathbf{C}(z_\beta(m), z_\beta(n)) = \mathbf{E}(z_\beta(m)z_\beta(n)) - \mathbf{E}(z_\beta(m))\mathbf{E}(z_\beta(n)). \quad (26)$$

С помощью (8) получаем равенства

$$\mathbf{E}(z_\beta(m)z_\beta(n)) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m e_\beta(j, k),$$

где

$$e_\beta(j, k) = \mathbf{E}(\eta_\beta(j-1)\eta_\beta(j)\eta_\beta(k-1)\eta_\beta(k)).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z_\beta(m)z_\beta(n)) &= (a_\beta + S_p(m-1))q_{\beta\beta}(1 + 2q_{\beta\beta}) \\ &\quad + a_\beta q_{\beta\beta}^2(S_q(m-2) + S_q(n-2)) \\ &\quad + q_{\beta\beta}^2(S_{pq}(m-1, m-2) \\ &\quad + S_{pq}(m-1, n-2)); \end{aligned}$$

откуда, используя (19) и (21), получаем равенство

$$\mathbf{E}(z_\beta(m)z_\beta(n)) = (A_{ezz}(m, n) + B_{ezz} - R_{ezz}(m, n))q_{\beta\beta}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ezz}(m, n) &= p_\beta(mnp_\beta q_{\beta\beta} + nq_{\beta\beta}(a_\beta - p_\beta - \rho c_\beta(2, 1))) \\ &\quad + m(1 + q_{\beta\beta}(2 + a_\beta - 4p_\beta - \rho(c_\beta(2, 1) + 2c_{\beta\beta}(2, 1))))), \\ B_{ezz} &= a_\beta - p_\beta - \rho c_\beta(2, 1)(1 + 2q_{\beta\beta}(1 - 2p_\beta - \rho c_{\beta\beta}(2, 1))) \\ &\quad - p_\beta q_{\beta\beta} \rho(2c_\beta(3, 1) + c_{\beta\beta}(3, 0)), \\ R_{ezz}(m, n) &= R1_{ezz}(m, n)\rho + R2_{ezz}(m, n)\rho^2 + R3_{ezz}(m, n)\rho^3, \\ R1_{ezz}(m, n) &= p_\beta q_{\beta\beta}(n-m)c_\beta(2, m) + (1 + 2q_{\beta\beta} - 4p_\beta q_{\beta\beta})c_\beta(2, m) \\ &\quad + a_\beta q_{\beta\beta}(c_{\beta\beta}(2, m-1) + c_{\beta\beta}(2, n-1)) \\ &\quad + p_\beta q_{\beta\beta}(2c_\beta(3, m+1) + c_{\beta\beta}(3, m-1) \\ &\quad + c_{\beta\beta}(3, n-1) - c_{\beta\beta}(3, n-m)), \\ R2_{ezz}(m, n) &= q_{\beta\beta}((m-1)(d_\beta(3, m-1) + d_\beta(3, n-1)) \\ &\quad - 2c_\beta(2, m)c_{\beta\beta}(2, 1)), \\ R3_{ezz}(m, n) &= \Delta x q_{\beta\beta}(d_{\beta\beta}(1, m-2) + d_{\beta\beta}(1, n-2) \\ &\quad + d_{\beta\beta}(1, m-1, m-2) + d_{\beta\beta}(1, m-1, n-2)). \end{aligned}$$

Для произведения средних, вследствие (15), получаем выражение

$$\mathbf{E}(z_\beta(m))\mathbf{E}(z_\beta(n)) = (A_{eez}(m, n) + B_{eez} + R_{eez}(m, n))q_{\beta\beta}^2, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} A_{eez}(m, n) &= nmp_\beta^2 - (m+n)p_\beta \rho c_\beta(2, 0), \\ B_{eez} &= (\rho c_\beta(2, 0))^2, \\ R_{eez}(m, n) &= R1_{eez}(m, n)\rho + R2_{eez}(m, n)\rho^2, \\ R1_{eez}(m, n) &= mp_\beta c_\beta(2, n) + np_\beta c_\beta(2, m), \\ R2_{eez}(m, n) &= c_\beta(2, m)c_\beta(2, n) - c_\beta(2, 0)(c_\beta(2, m) + c_\beta(2, n)). \end{aligned}$$

Вычитая (28) из (27), находим, что

$$\mathbf{C}(z_\beta(m)z_\beta(n)) = (A_{czz}(m) + B_{czz} + R_{czz}(m, n))q_{\beta\beta}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} A_{czz}(m) &= A_{ezz}(m, n) - A_{eez}(m, n)q_{\beta\beta} \\ &= p_\beta m(1 + q_{\beta\beta}(2 - 3p_\beta - 2\rho c_{\beta\beta}(2, 1))), \\ B_{czz} &= B_{ezz} - B_{eez}q_{\beta\beta} = (a_\beta - p_\beta - \rho c_\beta(2, 1))(1 + 2q_{\beta\beta}(1 - 2p_\beta - \rho c_{\beta\beta}(2, 1))) \\ &\quad - q_{\beta\beta}\rho^2 c_\beta^2(2, 0) - p_\beta q_{\beta\beta}\rho(2c_\beta(3, 1) + c_{\beta\beta}(3, 0)), \\ R_{czz}(m, n) &= R_{ezz}(m, n) - R_{eez}(m, n)q_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Так как $\mathbf{C}(z_\beta(n), z_\beta(n)) = \mathbf{V}(z_\beta(n))$, из (29) получается формула для дисперсии $\mathbf{V}(z_\beta(n))$ случайной переменной $z_\beta(n)$:

$$\mathbf{V}(z_\beta(n)) = (np_\beta(1 + (2 - 3p_\beta - 2\rho c_{\beta\beta}(2, 1))q_{\beta\beta}) + B_{czz} + R_{czz}(n, n))q_{\beta\beta}. \quad (30)$$

Подставляя последовательно в выражение для B_{czz} известные значения входящих в него переменных, можно выразить постоянный член дисперсии $\mathbf{V}(z_\beta(n))$ через след и определитель переходной матрицы Q , ее элементы и миноры. Выражение получается громоздким, но вычислительная процедура достаточно проста. То же самое можно сказать и об остатке $R_{czz}(n, n)$ при не слишком больших значениях n .

5.3. Вычислим ковариацию $\mathbf{C}(x_\beta(m), z_\beta(n))$ случайных величин $x_\beta(m)$, $z_\beta(n)$, $m \leq n$. Из определений следует, что

$$\mathbf{C}(x_\beta(m), z_\beta(n)) = \mathbf{E}(x_\beta(m), z_\beta(n)) - \mathbf{E}(x_\beta(m))\mathbf{E}(z_\beta(n)).$$

С помощью (8) получаем

$$\mathbf{E}(x_\beta(m), z_\beta(n)) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\eta_\beta(k)\eta_\beta(j-1)\eta_\beta(j)).$$

Как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_\beta(m), z_\beta(n)) &= (2(a_\beta + S_p(m-1)) + a_\beta(S_q(m-1) + S_q(n-1)) \\ &\quad + S_{pq}(m, n-1) - S_{pq}(m, m-1) + 2S_{pq}(m-2, m-1))q_{\beta\beta}, \end{aligned}$$

откуда, используя (19) и (21), получаем равенство

$$\mathbf{E}(x_\beta(m)z_\beta(n)) = (A_{exz}(m, n) + B_{exz} - R_{exz}(m, n))q_{\beta\beta}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} A_{exz}(m, n) &= p_\beta(mnp_\beta + n(a_\beta - \rho c_\beta(2, 1)) \\ &\quad + m(2(1 - p_\beta) - \rho(c_\beta(2, 0) + 2c_{\beta\beta}(2, 1)))), \\ B_{exz} &= -\rho((2c_\beta(3, 0) + c_{\beta\beta}(3, 1) + c_{\beta\beta}(2, 0))p_\beta + 2c_\beta(2, 0)) \\ &\quad + 2\rho^2 c_\beta(2, 0)c_{\beta\beta}(2, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{exz}(m, n) &= R1_{exz}(m, n)\rho + R2_{exz}(m, n)\rho^2 + R3_{exz}(m, n)\rho^3, \\
R1_{exz}(m, n) &= p_\beta(n - m)c_\beta(2, m + 1) + a_\beta(c_{\beta\beta}(2, n) + c_{\beta\beta}(2, m)) \\
&\quad + 2c_\beta(2, m) - p_\beta(2c_\beta(2, m - 1) - c_{\beta\beta}(3, n) - 3c_{\beta\beta}(3, m) \\
&\quad + c_{\beta\beta}(3, n - m)), \\
R2_{exz}(m, n) &= m(d_\beta(3, n) + d_\beta(3, m)) - 4d_\beta(3, m) - 2c_\beta(2, m - 1)c_{\beta\beta}(2, 1), \\
R3_{exz}(m, n) &= -\Delta\kappa(d_{\beta\beta}(1, n - 1) + d_{\beta\beta}(1, m - 1) + d_{\beta\beta}(1, m, n - 1) \\
&\quad - d_{\beta\beta}(1, m, m - 1) + 2d_{\beta\beta}(1, m - 2, m - 1)).
\end{aligned}$$

Для произведения средних, вследствие (14), (15), получаем равенство

$$\mathbf{E}(x_\beta(m))\mathbf{E}(z_\beta(n)) = (A_{exz}(m, n) + B_{exz} + R_{exz}(m, n))q_{\beta\beta}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned}
A_{exz}(m, n) &= n(m + 1)p_\beta^2 - (n + m)p_\beta\rho c_\beta(2, 0), \\
B_{exz} &= -\rho c_\beta(2, 0)(a_\beta - \rho c_\beta(2, 1)), \\
R_{exz}(m, n) &= R1_{exz}(m, n)\rho + R2_{exz}(m, n)\rho^2, \\
R1_{exz}(m, n) &= mp_\beta c_\beta(2, n) + np_\beta c_\beta(2, m + 1) + a_\beta c_\beta(2, n), \\
R2_{exz}(m, n) &= c_\beta(2, m + 1)c_\beta(2, n) - c_\beta(2, 0)c_\beta(2, m + 1) - c_\beta(2, 1)c_\beta(2, n)).
\end{aligned}$$

Вычитая (32) из (31), находим, что

$$\mathbf{C}(x_\beta(m)z_\beta(n)) = (A_{cxz}(m) + B_{cxz} + R_{cxz}(m, n))q_{\beta\beta}, \quad m \leq n, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned}
A_{cxz}(m) &= A_{exz}(m, n) - A_{exz}(m, n) = 2p_\beta m(1 - p_\beta - \rho c_{\beta\beta}(2, 1)), \\
B_{cxz} &= B_{exz} - B_{exz} = -\rho(p_\beta(2c_\beta(3, 0) - c_\beta(2, 0) + c_{\beta\beta}(3, 0) + 2c_{\beta\beta}(2, 0)) \\
&\quad + c_\beta(2, 0)(2 + \rho(c_\beta(2, 0) - 2c_{\beta\beta}(2, 1))))), \\
R_{cxz}(m, n) &= R_{exz}(m, n) - R_{exz}(m, n).
\end{aligned}$$

В случае $n < m$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x_\beta(m)z_\beta(n)) &= (2(a_\beta + S_p(n - 1)) + a_\beta(S_q(m - 1) + S_q(n - 1)) \\
&\quad + S_{pq}(n - 1, m - 1) - S_{pq}(n - 1, n - 1) + 2S_{pq}(n - 2, n - 1))q_{\beta\beta};
\end{aligned}$$

отсюда, используя (19) и (21), получаем, что

$$\mathbf{E}(x_\beta(m)z_\beta(n)) = (A_{ezx}(m, n) + B_{ezx} - R_{ezx}(m, n))q_{\beta\beta}, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned}
A_{ezx}(m, n) &= p_\beta(mnp_\beta + n(2 - p_\beta - \rho(c_\beta(2, 0) + 2c_{\beta\beta}(2, 1))) - mp_\beta c_\beta(2, 0)), \\
B_{ezx} &= -\rho(2c_\beta(2, 0) + 2p_\beta c_\beta(3, 0) + p_\beta c_{\beta\beta}(3, 1) - 2\rho c_\beta(2, 0)c_{\beta\beta}(2, 1)), \\
R_{ezx}(m, n) &= R1_{ezx}(m, n)\rho + R2_{ezx}(m, n)\rho^2 + R3_{ezx}(m, n)\rho^3, \\
R1_{ezx}(m, n) &= p_\beta(m - n)c_\beta(2, n) + a_\beta(c_{\beta\beta}(2, n) + c_{\beta\beta}(2, m)) + 2c_\beta(2, n) \\
&\quad + p_\beta(2c_\beta(3, n) + c_{\beta\beta}(3, n) + c_{\beta\beta}(3, m) - c_{\beta\beta}(3, m - n + 1)), \\
R2_{ezx}(m, n) &= (n - 1)(d_\beta(3, n) + d_\beta(3, m)) - 2d_\beta(3, n) - 2c_\beta(2, n - 1)c_{\beta\beta}(2, 1), \\
R3_{ezx}(m, n) &= -\Delta\kappa(d_{\beta\beta}(1, m - 1) + d_{\beta\beta}(1, n - 1) + d_{\beta\beta}(1, n - 1, m - 1) \\
&\quad - d_{\beta\beta}(1, n - 1, n - 1) + 2d_{\beta\beta}(1, n - 2, n - 1)).
\end{aligned}$$

Вычитая (32) из (34), находим, что

$$\mathbf{C}(x_\beta(m)z_\beta(n)) = (A_{c_{zx}}(n) + B_{c_{zx}} + R_{c_{zx}}(m, n))q_{\beta\beta}, \quad m > n, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} A_{c_{zx}}(n) &= A_{ezx}(m, n) - A_{eexz}(m, n) = 2p_\beta n(1 - p_\beta - \rho c_{\beta\beta}(2, 1)), \\ B_{c_{zx}} &= B_{ezx} - B_{eexz} = -\rho(p_\beta(2c_\beta(3, 0) - c_\beta(2, 0) + c_{\beta\beta}(3, 1)) \\ &\quad + c_\beta(2, 0)(2 + \rho(c_\beta(2, 0) - 2c_{\beta\beta}(2, 1)))), \\ R_{c_{zx}}(m, n) &= R_{ezx}(m, n) - R_{eexz}(m, n). \end{aligned}$$

Заметим, что $A_{c_{zx}}(n) = A_{cxz}(n)$, $B_{c_{zx}} = B_{cxz} + \rho p_\beta c_{\beta\beta}(2, 0)$. Слагаемое $\rho p_\beta c_{\beta\beta}(2, 0) = \rho p_\beta(c_{\beta\beta}(3, 1) - c_{\beta\beta}(3, 0))$ выделяется из членов $R_{1_{exz}}(m, n)$, $R_{1_{ezx}}(m, n)$ при $m = n$.

5.4. Вычислим ковариацию $\mathbf{C}(x_\beta(m), y_\beta(n))$ случайных величин $x_\beta(m)$, $y_\beta(n)$, $m \leq n$. Так как $y_\beta(n) = x_\beta(n) - z_\beta(n)$, справедливо равенство

$$\mathbf{C}(x_\beta(m), y_\beta(n)) = \mathbf{C}(x_\beta(m), x_\beta(n)) - \mathbf{C}(x_\beta(m), z_\beta(n)).$$

Подставляя значения ковариаций справа из равенств (24), (33) и приводя подобные члены, получаем, что

$$\mathbf{C}(x_\beta(m), y_\beta(n)) = mp_\beta((1 - p_\beta)(1 - 2q_{\beta\beta}) - 2\rho c_{\beta\beta}(2, 1)(1 - q_{\beta\beta})) + B_{c_{xy}} + R_{c_{xy}}(m, n), \quad (36)$$

где $B_{c_{xy}} = B_{c_{xx}} - B_{c_{xz}}q_{\beta\beta}$, $R_{c_{xy}}(m, n) = R_{c_{xx}}(m, n) - R_{c_{xz}}(m, n)q_{\beta\beta}$.

Пусть теперь $m > n$. Тогда, как нетрудно проверить,

$$\mathbf{C}(x_\beta(m), y_\beta(n)) = np_\beta((1 - p_\beta)(1 - 2q_{\beta\beta}) - 2\rho c_{\beta\beta}(2, 1)(1 - q_{\beta\beta})) + B_{c_{yx}} + R_{c_{yx}}(m, n), \quad (37)$$

где $B_{c_{yx}} = B_{c_{xx}} - B_{c_{zx}}q_{\beta\beta}$, $R_{c_{yx}}(m, n) = R_{c_{xx}}(m, n) - R_{c_{zx}}(m, n)q_{\beta\beta}$. Несимметричность равенств (36) и (37) в слагаемых, не включающих главный член, объясняется различной структурой рассматриваемых переменных, описываемой равенствами (8) и формулами раздела 5.3.

5.5. Вычислим ковариацию $\mathbf{C}(y_\beta(m), y_\beta(n))$ случайных величин $y_\beta(m)$, $y_\beta(n)$, $m \leq n$. Из определений следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(y_\beta(m), y_\beta(n)) \\ = \mathbf{C}(x_\beta(m), x_\beta(n)) + \mathbf{C}(z_\beta(m), z_\beta(n)) - \mathbf{C}(x_\beta(m), z_\beta(n)) - \mathbf{C}(z_\beta(m), x_\beta(n)). \end{aligned}$$

Подставляя известные значения ковариаций из равенств (24), (29), (33), (35) и приводя подобные члены, находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(y_\beta(m), y_\beta(n)) &= mp_\beta(1 - q_{\beta\beta})(1 - 2q_{\beta\beta} \\ &\quad - p_\beta(1 - 3q_{\beta\beta}) - 2(1 - q_{\beta\beta})\rho c_{\beta\beta}(2, 1)) + B_{c_{yy}} + R_{c_{yy}}(m, n), \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} B_{c_{yy}} &= B_{c_{xx}} + (B_{c_{zz}} - B_{c_{xz}} - B_{c_{zx}})q_{\beta\beta}, \\ R_{c_{yy}}(m, n) &= R_{c_{xx}}(m, n) + (R_{c_{zz}}(m, n) - R_{c_{xz}}(n, m) - R_{c_{zx}}(m, n))q_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Так как $\mathbf{C}(y_\beta(n), y_\beta(n)) = \mathbf{V}(y_\beta(n))$, из (38) получается формула для дисперсии $\mathbf{V}(y_\beta(n))$ случайной переменной $y_\beta(n)$:

$$\mathbf{V}(y_\beta(n)) = np_\beta(1 - q_{\beta\beta})(1 - 2q_{\beta\beta} - p_\beta(1 - 3q_{\beta\beta}) - 2(1 - q_{\beta\beta})\rho c_{\beta\beta}(2, 1)) + B_{\text{сyy}} + R_{\text{сyy}}(n, n). \quad (39)$$

Подставляя последовательно в (39) в выражение для $B_{\text{сyy}}$ известные значения входящих в него переменных можно выразить постоянный член дисперсии $\mathbf{V}(y_\beta(n))$ через след и определитель переходной матрицы Q , ее элементы и миноры.

6. Близкие двоичным последовательности

Введенные условия регулярности не позволяют прямо получить двоичную последовательность как частный случай троичной. Поэтому рассматриваются троичные последовательности, близкие двоичным. Они позволяют осуществить переход и представляют определенный самостоятельный интерес.

6.1. Рассмотрим близкую двоичной троичную марковскую последовательность с переходной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & 1 - q_{11} & 0 \\ 1 - q_{22} & q_{22} & 0 \\ 0 & 1 - q_{33} & q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1 - p & 0 \\ 1 - q & q & 0 \\ 0 & 1 - r & r \end{pmatrix}.$$

При $a_3 = 0$, $q_{33} = 1$ последовательность превращается в двоичную марковскую последовательность, исследовавшуюся в [1] с помощью производящих функций. Соответствие в обозначениях устанавливается с помощью соотношений раздела 2.1 и равенств $q_{11} = p$, $q_{22} = q$, $q_{33} = r$. Двоичную последовательность можно считать предельным случаем близкой троичной при $r \rightarrow 1$.

Чтобы исключить особые случаи, будем предполагать, что $0 < q_{11}, q_{22} < 1$ и $q_{11} + q_{22} < q_{33} < 1$. При этом предположении характеристические числа переходной матрицы выражаются равенствами $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = q_{33}$, $\lambda_3 = q_{11} + q_{22} - 1$. Рассматриваемая троичная марковская последовательность регулярна, и для нее верны все полученные для регулярных последовательностей формулы. Формулы для близкой к двоичной последовательности получаются из них подстановкой значений $q_{13} = 0$, $q_{23} = 0$, $q_{31} = 0$, $q_{12} = 1 - q_{11}$, $q_{21} = 1 - q_{22}$, $q_{32} = 1 - q_{33}$. Предельные вероятности для значений $\beta = 1, 2, 3$ соответственно равны

$$p_1 = \frac{1 - q_{22}}{1 - \lambda_3}, \quad p_2 = \frac{1 - q_{11}}{1 - \lambda_3}, \quad p_3 = 0.$$

Матрица переходных вероятностей за $n \geq 0$ шагов имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} p_1 + p_2\lambda_3^n & p_2(1 - \lambda_3^n) & 0 \\ p_1(1 - \lambda_3^n) & p_2 + p_1\lambda_3^n & 0 \\ p_1 + a\lambda_3^n - b q_{33}^n & 1 - p_1 - a\lambda_3^n - (1 - b)q_{33}^n & q_{33}^n \end{pmatrix},$$

где $a = \rho p_1(1 - q_{33})$, $b = \rho(1 - q_{22})$. При $n = 0$ получается единичная матрица.

Вероятности значений $\beta = 1, 2, 3$ в момент $n \geq 0$ соответственно равны

$$p_1(n) = p_1 + c\lambda_3^n - a_3 b q_{33}^n, \quad p_2(n) = p_2 - c\lambda_3^n - a_3(1 - b)q_{33}^n, \quad p_3(n) = a_3 q_{33}^n,$$

где $c = a_1 p_2 - a_2 p_1 + a_3 p p_1(1 - q_{33})$. В частности $p_1(0) = a_1$, $p_2(0) = a_2$, $p_3(0) = a_3$. Для двоичной последовательности при $a_3 = 0$, используя равенства

$$p_1 + p_2 = 1, \quad a_1 p_2 - a_2 p_1 = a_1 - p_1 + a_3 p_1 = -(a_2 - p_2) - a_3 p_2,$$

после некоторых преобразований получаем такие же, как в [1], равенства

$$p_1(n) = p_1 + (a_1 - p_1)\lambda_3^n, \quad p_2(n) = p_2 + (a_2 - p_2)\lambda_3^n.$$

6.2. Средние значения рассматриваемых переменных для близкой двоичной последовательности выражаются равенствами, конкретизирующими общие равенства в разделах 4.1–4.2. Их легко получить и прямым суммированием вычисленных вероятностей, преобразуя так, чтобы выделялись члены с a_3 . Суммирование вероятностей $p_1(n)$, $p_2(n)$, $p_3(n)$ дает для средних чисел $\mathbf{E}(x_\beta(n))$ значений $\beta = 1, 2, 3$ равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}x_1(n) &= (n+1)p_1 + c \frac{1 - \lambda_3^{n+1}}{1 - \lambda_3} - a_3 b \frac{1 - \lambda_2^{n+1}}{1 - \lambda_2}, \\ \mathbf{E}x_2(n) &= (n+1)p_2 - c \frac{1 - \lambda_3^{n+1}}{1 - \lambda_3} - a_3(1-b) \frac{1 - \lambda_2^{n+1}}{1 - \lambda_2}, \\ \mathbf{E}x_3(n) &= a_3 \frac{1 - \lambda_2^{n+1}}{1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

При $\beta = 1$, $a_3 = 0$ и соответствующем изменении обозначений получается выведенное в [1] равенство для среднего числа единиц в двоичной последовательности. Средние числа $\mathbf{E}(z_\beta(n))$, $\mathbf{E}(y_\beta(n))$ сохранений и серий значений $\beta = 1, 2, 3$ при $n > 0$ получаются из $\mathbf{E}(x_\beta(n))$ по формулам

$$\mathbf{E}z_\beta(n) = \mathbf{E}x_\beta(n-1)q_{\beta\beta}, \quad \mathbf{E}y_\beta(n) = \mathbf{E}x_\beta(n-1)(1 - q_{\beta\beta}) + p_\beta(n).$$

Из определений следует, что $\mathbf{E}z_\beta(0) = 0$, $\mathbf{E}y_\beta(0) = a_\beta$.

6.3. Ковариации рассматриваемых переменных для близкой двоичной последовательности выражаются равенствами, конкретизирующими общие равенства в разделах 5.1–5.5. В качестве примера выпишем формулу для $\mathbf{C}(x_1(m), x_1(n))$. Введем дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} c_1(\lambda) &= -\frac{1 - q_{11}}{\rho(1 - \lambda)^2}, \quad c_2(\lambda) = \frac{1 - q_{22}}{\rho(1 - \lambda)^2}, \quad c_3(\lambda) = \frac{p_1}{\kappa(1 - \lambda)^2}, \\ \Lambda(\gamma, m) &= \rho(1 - \lambda_2)(c_2(\lambda_2)(1 - \lambda_2)^\gamma \lambda_2^m - c_2(\lambda_3)(1 - \lambda_3)^\gamma \lambda_3^m). \end{aligned}$$

Подстановка переходных вероятностей $q_{13} = 0$, $q_{23} = 0$, $q_{31} = 0$, $q_{12} = 1 - q_{11}$, $q_{21} = 1 - q_{22}$, $q_{32} = 1 - q_{33}$ в общие формулы дает для $\beta = 1$ равенства

$$\begin{aligned} r_1(\lambda_2, \lambda_3) &= a_3 c_3(\lambda_3), \\ r_1(\lambda_3, \lambda_2) &= \frac{1}{\kappa^2}(a_1 c_1(\lambda_3) + a_2 c_2(\lambda_3)) + a_3 c_3(\lambda_2), \\ c_1(\gamma, m) &= (-1)^\gamma (c_{12}(\lambda_3)(1 - \lambda_3)^{2-\gamma} \lambda_3^m + a_3 \Lambda(2 - \gamma, m)), \\ c_{11}(\gamma, m) &= (-1)^\gamma c_1(\lambda_3)(1 - \lambda_3)^{2-\gamma} \lambda_3^m, \\ d_1(4, 2) &= c_1(\lambda_3) \left(c_{12}(\lambda_3) - a_3 c_3(\lambda_3) \frac{1}{(1 - \lambda_3)^4} \right) \lambda_3^2, \\ d_{11}(2, 1) &= a_3 \kappa^2 \rho^{-2} (1 - q_{11})(1 - q_{22})(1 - q_{33}). \end{aligned}$$

Используя (24), получаем равенства

$$\mathbf{C}(x_1(m), x_1(n)) = A(m) + B + R(m, n),$$

$$A(m) = a_1(1 - a_1) + mp_1(1 - p_1)r_{33}, \quad r_{33} = \frac{1 + \lambda_3}{1 - \lambda_3}, \quad B = -\rho(B_c - B_d),$$

где

$$B_c = c_1(2, 1) + \rho c_1(2, 1)^2 - 2a_1(c_1(2, 1) - c_{11}(2, 1)) + p_1(2c_1(3, 1) + c_{11}(3, 1)),$$

$$B_d = 2\rho(d_1(4, 2) - \rho\Delta d_{11}(2, 1))$$

с явно выписанными значениями $c_1(\gamma, m)$, $c_{11}(\gamma, m)$, $d_1(4, 2)$, $d_{11}(2, 1)$. Остаточный член $R(m, n)$ получается подстановкой упрощенных переходных вероятностей в $R_{\text{cxx}}(m, n)$. Формула для двоичной последовательности получается при $a_3 = 0$ и $a_2 = 1 - a_1$.

Точно так же подстановка переходных вероятностей $q_{13} = 0$, $q_{23} = 0$, $q_{31} = 0$, $q_{12} = 1 - q_{11}$, $q_{21} = 1 - q_{22}$, $q_{32} = 1 - q_{33}$ в общие формулы позволяет получить для близкой двоичной последовательности формулы ковариаций всех других рассматриваемых переменных.

Список литературы

1. Савельев Л. Я., Балакин С. В., Совместное распределение числа единиц и числа 1-серий в двоичной марковской последовательности. *Дискретная математика* (2004) **16**, №3, 43–62.
2. Марков А. А., *Исчисление вероятностей*. Типография Императорской Академии наук, Санкт-Петербург, 1913.
3. Колмогоров А. Н., *Теория вероятностей и математическая статистика*. Наука, Москва, 1986.
4. Романовский В. И., *Дискретные цепи Маркова*. Гостехиздат, Москва, 1949.
5. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, **1**. Мир, Москва, 1984.
6. Савельев Л. Я., Случайные соответствия, двоичные матрицы и серии. *Дискретная математика* (1999) **11**, №4, 3–26.
7. Uchida M., On number of occurrences of success runs of specified length in a higher-order two-state Markov chain. *Ann. Inst. Statist. Math.* (1998) **50**, 587–601.
8. Смирнов Н. В., Сарманов О. В., Захаров В. К., Локальная предельная теорема для чисел переходов в цепи Маркова и ее применения. *Доклады АН СССР* (1966) **167**, №6, 1238–1241.
9. Сарманов О. В., Захаров В. К., Комбинаторная задача Н. В. Смирнова. *Доклады АН СССР* (1967) **176**, №3, 530–532.
10. Захаров В. К., Сарманов О. В., О законе распределения числа серий в однородной цепи Маркова. *Доклады АН СССР* (1968) **179**, №3, 526–528.
11. Гершгорин С. А., Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. *Известия АН СССР, ОМЕИ, сер. VII* (1931) 749–754.
12. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. Наука, Москва, 1967.

Статья поступила 16.11.2010.