Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Абросимов, Минимальные вершинные расширения
направленных звезд, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, вы-
пуск 2, 93–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразу-
мевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:56:03

Минимальные вершинные расширения направленных звезд

© 2011 г. М. Б. Абросимов

Неориентированной звездой называется полный двудольный граф вида $K_{1,n}$. Направленной звездой называется направленный граф, симметризация которого является неориентированной звездой. В статье дается полное решение задачи описания всех минимальных вершинных k -расширений направленных звезд при любом натуральном k .

Ориентированным графом (далее орграфом) называется пара $\vec{G} = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, называемое множеством вершин, а α — отношение на множестве V , называемое отношением смежности. Элементы множества α называются дугами. Дуга вида $(u, u) \in \alpha$ называется петлей. Орграф с универсальным отношением смежности называется полным и обозначается $\vec{K}_n$, где n — число вершин. Граф с пустым отношением смежности называется вполне несвязным и обозначается O_n . Основные определения даются согласно [1].

Орграф с антисимметричным отношением смежности называется направленным графом или диграфом. Полный диграф без петель называется турниром. Транзитивный турнир — это турнир, у которого из существования дуг (u, v) и (v, w) вытекает существование дуги (u, w) .

Граф с симметричным и антирефлексивным отношением смежности называется неориентированным графом (далее графом). В неориентированном графе пара встречных дуг называется ребром и обозначается $\{u, v\}$.

Симметризацией орграфа $\vec{G} = (V, \alpha)$ называется граф $G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1}) \setminus \Delta)$, то есть симметризация орграфа получается заменой дуг ребрами и удалением петель.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое инъективное отображение $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, что для всех $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: если $(u, v) \in \alpha_1$, то $(\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$.

Два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называются изоморфными, если можно установить взаимно однозначное соответствие $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющее отношение смежности: $(u, v) \in \alpha_1 \iff (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$ для всех $u, v \in V_1$.

Изоморфизм графа на самого себя называется автоморфизмом. Две вершины графа называются подобными, если существует автоморфизм, при котором одна вершина является образом другой. Граф, все вершины которого попарно подобны, называется вершинно-симметрическим.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется минимальным вершинным k -расширением n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- (1) граф G^* является вершинным k -расширением G , то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^* , получающийся удалением любых его k вершин;
- (2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
- (3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Граф G^* называется точным вершинным k -расширением графа G , если любой граф, получающийся удалением произвольных k вершин графа G^* , изоморфен графу G .

Граф $G_t = (V_t, \alpha_t)$ называется тривиальным k -расширением графа $G = (V, \alpha)$, если граф G_t получается из графа G добавлением k вершин и соединением их со всеми вершинами графа G и друг с другом.

Понятие минимального k -расширения введено на основе понятия оптимальной k -отказоустойчивой реализации, которое было предложено Хейзом в работе [2], где была описана модель для исследования отказоустойчивости, основанная на графах.

Технической системе Σ сопоставляется помеченный граф $G(\Sigma)$, вершины которого соответствуют элементам системы Σ , ребра — связям между элементами, а метки указывают тип элементов. Под отказом элемента технической системы Σ понимается удаление соответствующей ему вершины из графа системы $G(\Sigma)$ и всех связанных с ней ребер. Говорят, что система Σ^* является k -отказоустойчивой реализацией системы Σ , если отказ любых k элементов системы Σ^* приводит к графу, в который можно вложить граф системы Σ с учетом меток вершин. Построение k -отказоустойчивой реализации системы Σ можно представить себе как введение в нее определенного числа новых элементов и связей. При этом предполагается, что в нормальном режиме работы избыточные элементы и связи маскируются, а в случае отказа происходит реконфигурация системы до исходной структуры.

Пусть в системе Σ встречается t различных типов элементов. Очевидно, что любая ее k -отказоустойчивая реализация должна содержать не менее k дополнительных элементов каждого типа. Легко видеть, что такого числа дополнительных элементов достаточно для построения k -отказоустойчивой реализации системы Σ . В самом деле, добавим k элементов каждого типа и соединим их все между собой и с элементами системы Σ . Тогда любой отказавший элемент можно будет заменить одним из добавленных элементов соответствующего типа. Построенную таким образом k -отказоустойчивую реализацию можно назвать тривиальной.

Назовем k -отказоустойчивую реализацию Σ^* системы Σ , состоящей из t элементов различного типа, оптимальной, если система Σ^* отличается от системы Σ на k элементов каждого из t типов системы Σ , и среди всех k -отказоустойчивых реализаций с тем же числом элементов система Σ^* имеет наименьшее число ребер.

На практике, элементы технических систем часто оказываются однотипными. При исследовании отказоустойчивости в подобных системах метки элементов опускаются, и в качестве графа системы рассматривается граф без меток. В этом случае оптимальная k -отказоустойчивая реализация будет содержать в точности k дополнительных элементов.

Хейз предложил процедуры построения оптимальной k -отказоустойчивой реализации для цепи, цикла и помеченного дерева. Позднее, Хейз совместно с Харари в [3] обобщили модель на случай отказов связей между элементами, предложив понятие реберной отказоустойчивости. Модель отказоустойчивости, в которой рассматриваются только отказы элементов, было предложено называть вершинной отказоустойчивостью (см. [4]). В той же работе было введено понятие точной k -отказоустойчивой реализации. В [5] удалось доказать, что рассматриваемые задачи являются вычислительно сложными: задачи распо-

знавания вершинной или реберной k -отказоустойчивой реализации принадлежат классу NP -полных задач.

Граф называется двудольным, если множество его вершин V может быть разбито на два подмножества вершин V_1 и V_2 , таких, что концы любого ребра графа принадлежат разным подмножествам. Если граф содержит все ребра, соединяющие вершины из множеств V_1 и V_2 , то граф называется полным двудольным графом и обозначается $K_{m,n}$, где m и n — число вершин во множествах V_1 и V_2 .

Неориентированной звездой (далее просто звездой) или звездным графом называется полный двудольный граф вида $K_{1,n}$, где $n > 0$ (то есть одна вершина смежна с n несмежными вершинами). Ориентированной звездой будем называть орграф, симметризацией которого является звезда. Ориентированную звезду будем обозначать $Z_{m,n,p}$, где m и n — число вершин с единственной, соответственно, исходящей и входящей дугой, а p — число вершин с одной входящей и одной исходящей дугой. Направленной звездой будем называть ориентированную звезду, являющуюся диграфом, и обозначать $Z_{m,n}$ (у направленной звезды $p = 0$). Вершину, являющуюся концом каждой дуги звезды, будем называть центральной.

В [6] удалось найти общее решение для описания минимальных вершинных k -расширений предполных графов, то есть графов, которые имеют хотя бы одну вершину, смежную со всеми остальными. Звездный граф является частным случаем предполного графа, и в [7] дается полное описание минимальных вершинных и реберных k -расширений для неориентированных звезд. Приведем соответствующие теоремы относительно вершинных k -расширений:

Теорема 1. Единственным минимальным вершинным 1-расширением звездного графа $K_{1,n}$ является тривиальное 1-расширение $K_{2,n}$.

Теорема 2. Для звездных графов $K_{1,n}$ справедливы следующие утверждения.

- (1) При нечетном n и любом натуральном k , звезда $K_{1,n}$ имеет единственное, с точностью до изоморфизма, минимальное вершинное k -расширение — тривиальное k -расширение.
- (2) При четном n :
  - (а) при четном k число минимальных вершинных k -расширений звезды $K_{1,n}$ в точности равно числу ее неизоморфных минимальных вершинных $(k - 1)$ -расширений, причем каждое из минимальных вершинных k -расширений есть тривиальное 1-расширение соответствующего минимального вершинного $(k - 1)$ -расширения;
  - (б) при нечетном k выделяются три случая:
    - $k < n^2 - 4n + 1$ звезда $K_{1,n}$ имеет единственное, с точностью до изоморфизма, минимальное вершинное k -расширение — тривиальное k -расширение;
    - при $k = n^2 - 4n + 1$ звезда $K_{1,n}$ имеет два, с точностью до изоморфизма, минимальных вершинных k -расширения: тривиальное k -расширение и граф $R_{n+k+1,n+k-1}$;
    - при $k > n^2 - 4n + 1$ звезда $K_{1,n}$ имеет единственное минимальное вершинное k -расширение — граф $R_{n+k+1,n+k-1}$.

Граф $R_{n,n-2}$ из формулировки теоремы — это однородный n -вершинный граф порядка $n-2$. В работе [6] доказывается, что такой граф имеет вид $O_2 + \dots + O_2$, где $+$ обозначает операцию соединения графов: соединением двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, не имеющих общих вершин, называется граф

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1).$$

Сформулируем и докажем лемму общего характера относительно связи минимальных вершинных k -расширений ориентированных и неориентированных графов.

Лемма 1. Пусть $\vec{G}^*$ — минимальное вершинное k -расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда симметризация $\vec{G}^*$ является вершинным k -расширением симметризации $\vec{G}$.

Доказательство. Пусть $\vec{G}^*$ — минимальное вершинное k -расширение орграфа $\vec{G}$. Обозначим через G симметризацию орграфа $\vec{G}$, а через G^* — симметризацию орграфа $\vec{G}^*$. Выберем произвольный набор F , состоящий из k вершин орграфа $\vec{G}^*$. По определению, орграф $\vec{G}^* - F$, который получается удалением из $\vec{G}^*$ всех вершин, входящих в F вместе с дугами, допускает вложение орграфа $\vec{G}$. Это означает, что существует биекция $\varphi : V \rightarrow V^* \setminus F$, такая что

$$\forall u, v \in V \quad ((u, v) \in \alpha) \implies ((\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha^*).$$

По определению симметризации, наличие дуг (u, v) и $(\varphi(u), \varphi(v))$ в орграфах $\vec{G}$ и $\vec{G}^*$ означает наличие ребер $\{u, v\}$ и $\{\varphi(u), \varphi(v)\}$ в соответствующих симметризациях G и G^* , но тогда

$$\forall u, v \in V \quad (\{u, v\} \in \beta) \implies (\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in \beta^*),$$

то есть граф G вкладывается в граф $G^* - F$.

Следствие 1. Число дополнительных дуг минимального вершинного k -расширения орграфа $\vec{G}$ не менее числа дополнительных ребер минимального вершинного k -расширения симметризации орграфа $\vec{G}$.

Следствие 2. Пусть граф G^* является минимальным вершинным k -расширением графа G , диграф H есть некоторая ориентация графа G , а диграф H^* есть некоторая ориентация графа G^* . Тогда, если H^* является вершинным k -расширением диграфа H , то H^* является и минимальным вершинным k -расширением диграфа H .

Предложение 1. Граф $ZT_{m,n,p}$, получающийся из направленной звезды $Z_{m,n}$ добавлением $k = p - 1$ копий центральной вершины и соединением их друг с другом по схеме транзитивного турнира, является вершинным k -расширением орграфа $Z_{m,n}$.

Доказательство. Рассмотрим граф $ZT_{m,n,p}$. Его вершины можно разделить на три группы.

Первая группа состоит из p центральных вершин, соединенных по схеме транзитивного турнира.

Вторая группа состоит из m вершин-источников, от каждой из которых исходят дуги ко всем вершинам первой группы. Очевидно, что все вершины этой группы подобны и имеют полустепени исхода и захода $(p, 0)$.

Третья группа состоит из m вершин-стоков, в каждую из которых заходят дуги от каждой вершины первой группы. Очевидно, что все вершины этой группы подобны и имеют полустепени исхода и захода $(0, p)$.

Рассмотрим оргграф $\vec{G}$, получающийся из $ZT_{m,n,p}$ удалением k произвольных вершин. Обозначим через p_1 , m_1 и n_1 количество удаленных вершин первой, второй и третьей групп соответственно:

$$\begin{aligned} 0 \leq p_1 \leq p = k + 1, \\ 0 \leq m_1 \leq m, \\ 0 \leq n_1 \leq n, \\ p_1 + m_1 + n_1 = k. \end{aligned}$$

Покажем, что направленная звезда $Z_{m,n}$ вкладывается в оргграф $\vec{G}$.

При $p_1 = k$ (все удаленные вершины — вершины первой группы) оргграф $\vec{G}$ изоморфен звезде $Z_{m,n}$ и, таким образом, допускает вложение.

Пусть $p_1 < k$. В [8] было показано, что транзитивный турнир T_{n+k} является точным вершинным k -расширением транзитивного турнира T_n , $n > 1$. В нашем случае после удаления p_1 центральных вершин первой группы оставшиеся $p - p_1 > 1$ вершины будут по-прежнему образовывать транзитивный турнир T_{p-p_1} . При этом

$$p - p_1 = k + 1 - p_1 = m_1 + n_1 + 1.$$

Вершины транзитивного турнира, как известно, могут быть упорядочены по отношению достижимости. Обозначим оставшиеся центральные вершины в соответствующем порядке через $u_1, \dots, u_{m_1+n_1+1}$. Таким образом, из любой вершины с меньшим индексом идет дуга в любую вершину с большим индексом.

Укажем соответствие вершин звезды $Z_{m,n}$ вершинам оргграфа $\vec{G}$, которое определяет вложение:

- (а) m вершинам-источникам соответствуют $m - m_1$ оставшихся вершин второй группы и m_1 вершин $u_1, \dots, u_{m_1}$;
- (б) n вершинам-стокам соответствуют $n - n_1$ оставшихся вершин третьей группы и n_1 вершин $u_{m_1+2}, \dots, u_{m_1+n_1+1}$;
- (в) вершина u_{m_1+1} соответствует центральной вершине звезды $Z_{m,n}$.

Видно, что из каждой вершины типа (а) идет дуга в вершину u_{m_1+1} , а из вершины u_{m_1+1} идет дуга в каждую вершину типа (б); таким образом, звезда $Z_{m,n}$ действительно вкладывается в оргграф $\vec{G}$.

Из леммы 1, предложения 1 и теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $Z_{m,n}$ направленная звезда, причем $m + n > 1$ и $mn \neq 1$. Диграф $ZT_{m,n,2}$, получающийся из направленной звезды $Z_{m,n}$ добавлением копии центральной вершины и соединением их друг с другом дугой, является единственным, с точностью до изоморфизма, минимальным вершинным 1-расширением оргграфа $Z_{m,n}$.

Замечание 1. Направленная звезда $Z_{1,1}$ является направленной цепью P_3 , и ее единственное минимальное вершинное 1-расширение, являющееся также и ее точным вершинным 1-расширением, есть направленный цикл C_4 .

Рис. 1. Звезда $Z_{1,0}$ и два ее минимальных вершинных 1-расширения

Рис. 2. Схема ориентации ребер

Замечание 2. Направленная звезда $Z_{1,0}$ изоморфна звезде $Z_{0,1}$ и имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения, каждое из которых является и точным вершинным 1-расширением, именно, транзитивную и циклическую тройки (см. рис. 1).

Из леммы 1, предложения 1 и теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Диграф $ZT_{m,n,p}$, получающийся из направленной звезды $Z_{m,n}$ добавлением $k = p - 1$ копий центральной вершины и соединением их друг с другом по схеме транзитивного турнира, является единственным, с точностью до изоморфизма, минимальным вершинным k -расширением орграфа $Z_{m,n}$, если выполняется любое из двух условий:

- (1) $m + n$ нечетно;
- (2) $k < n^2 - 4n + 1$.

Далее необходимо рассмотреть случай, когда $m + n$ четно, так как в этом случае, согласно теореме 2, могут появиться вершинные k -расширения с меньшим числом дополнительных дуг.

Рассмотрим схему ориентации однородного $(2n)$ -вершинного графа $R_{2n,2n-2}$. Напомним, что граф $R_{2n,2n-2}$ может быть представлен в виде $O_2 + \dots + O_2$. Будем ориентировать ребра от каждой пары вершин из O_2 до каждой другой такой пары. От первой вершины пары направим одну исходящую дугу в первую вершину второй пары и входящую дугу от второй вершины второй пары, а из второй вершины первой пары направим дуги в обратном порядке, так что получится ориентированный цикл. Если u_1 и v_1 — вершины первой пары, а u_2 и v_2 — вершины второй пары, то ориентируем дуги следующим образом: (u_1, u_2) , (v_1, v_2) , (v_2, u_1) , (u_2, v_1) (см. рис. 2). Продолжаем ориентацию описанным способом по всем парам вершин. Обозначим построенный диграф через $D_{2n,2n-2}$.

Отметим некоторые достаточно очевидные свойства диграфа $D_{2n,2n-2}$.

1. Отображение $u_i \rightarrow v_i$, $v_i \rightarrow u_i$, $i = 1, \dots, n$, является автоморфизмом.

Рис. 3. Диграф $D_{2p, 2p-2}$

2. Отображение $u_i \rightarrow u_{i+1}$, $v_i \rightarrow v_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, $u_n \rightarrow v_1$, $v_n \rightarrow u_1$ является автоморфизмом.
3. Все вершины диграфа $D_{2n, 2n-2}$ подобны и имеют полустепени исхода и захода, равные $n-1$ (следует из свойств 1 и 2).
4. Диграф $D_{2n, 2n-2}$ является вершинно-симметрическим графом (следует из свойства 3).
5. При удалении любой пары несмежных вершин u_i и v_i диграфа $D_{2n, 2n-2}$ получается диграф $D_{2n-2, 2n-4}$.
6. Все максимальные подграфы диграфа $D_{2n, 2n-2}$ изоморфны. Обозначим граф, получающийся удалением любой вершины диграфа $D_{2n, 2n-2}$, через $TD_{2n-2, 2n-4}$.

Предложение 2. Диграф $D_{2n+k+1, 2n+k-1}$ при нечетном k является вершинным k -расширением направленной звезды $Z_{n, n}$.

Доказательство. Обозначим число вершин диграфа $D_{2n+k+1, 2n+k-1}$ через $2p$: $2p = 2n + k + 1$. Как и ранее, вершины диграфа $D_{2n+k+1, 2n+k-1}$ обозначим через u_i и v_i , $i = 1, \dots, p$.

Рассмотрим орграф, получающийся из $D_{2n+k+1, 2n+k-1}$ удалением произвольных k вершин: $u_{i_1}, \dots, u_{i_{k_1}}$ и $v_{i_1}, \dots, v_{i_{k_2}}$: $k_1 + k_2 = k$. Обозначим этот орграф через $\vec{G}$. Так как k нечетное, то $k_1 \neq k_2$. Пусть, для определенности, $0 \leq k_1 < k_2 \leq k$. На рис. 3 для наглядности оставлена только часть дуг: дугами соединяются вершины одной горизонтали от вершины с меньшим индексом к вершине с большим и вершины разных горизонталей, от вершины с большим индексом к вершине с меньшим. Удаленные вершины на рисунке помечены черным (при $p = 4$ этот рисунок соответствовал бы случаю поиска вершинного 3-расширения для 5-вершинной звезды $Z_{2, 2}$). Для краткости будем называть удаленные вершины черными, а оставшиеся — белыми. Количество белых и черных вершин, очевидно, равно $2n+1$ и k штук соответственно.

Чтобы доказать, что диграф $D_{2n+k+1, 2n+k-1}$ является вершинным k -расширением звезды $Z_{n, n}$, достаточно показать, что в орграфе $\vec{G}$ есть вершина с n входящими и n исходящими дугами. Кандидатами для такой вершины могут быть только такие вершины, у которых парная была удалена, так как только они соединены дугами со всеми остальными вершинами. Искомых вершин может быть и несколько. Для каждой вершины w введем в рассмотрение индекс, состоящий из пары чисел $d^+(w)$ и $d^-(w)$:

$d^-(w)$ есть число белых вершин слева от w в ее ряду плюс число белых вершин справа от w в другом ряду;

Рис. 4. Пары вершин

Таблица 1. Изменение индексов

Левая пара	Правая пара	d^+	d^-
(б)	(б)	-1	+1
(б)	(в)	0	0
(в)	(б)	+1	-1
(в)	(в)	+1	-1

$d^+(w)$ есть число белых вершин справа от нее в ее ряду плюс число белых вершин слева от нее в другом ряду.

По построению видно, что для вершин одной пары выполняются соотношения $d^+(u_i) = d^-(v_i)$ и $d^-(u_i) = d^+(v_i)$. Значение индексов $d^+(w)$ и $d^-(w)$ для белой вершины, соответственно, равны полустепеням исхода и захода. Искомая вершина, очевидно, должна удовлетворять условию $d^+(w) = d^-(w) = n$.

Покажем, что такая вершина найдется. На рис. 4 представлены четыре возможные конфигурации парных вершин.

Посчитаем суммы индексов для вершин из разных пар.

Для пары типа (а) $d^+(w) + d^-(w) = 2n - 1$ (обе белые вершины пары не участвуют в подсчете индексов).

Для пар типа (б) и (в) $d^+(w) + d^-(w) = 2n$ (единственная белая вершина пары не участвует в подсчете индексов).

Для пары типа (г) $d^+(w) + d^-(w) = 2n + 1$ (все белые вершины участвуют в подсчете индексов).

Для удобства будем считать, что пары типа (г), если они есть, располагаются справа, а пары типа (а), если они есть, по свойству 5 диграфа можно расположить слева, таким образом, представляющие для нас интерес пары типа (б) и (в) располагаются между парами типа (а) и (г). Обозначим для определенности номер первой пары интересующего нас интервала через l , а номер последней пары — через r .

Для каждой вершины пар (б) и (в) рассчитаем индекс. Вершина u_l первой пары получит индекс $(n - k_2, n - k_1 - 1)$, если пара имеет тип (в), или $(n - k_2 - 1, n - k_1)$, если пара имеет тип (б). Вершина u_r последней пары получит индекс $(n - k_1, n - k_2 - 1)$, если пара имеет тип (б), или $(n - k_1 - 1, n - k_2)$, если пара имеет тип (в). Так как $k_1 < k_2$, то у вершины первой пары $d^+(u_l) \leq d^-(u_l)$, а у последней пары $d^+(u_r) \geq d^-(u_r)$. Изменение индексов при переходе от одной пары к другой при просмотре слева направо показано в табл. 1.

Таким образом, при переходе от одной пары к другой компоненты индекса либо не

Рис. 5. Диграф $D_{8,6}$

изменяются, либо изменяются на 1. У первой пары $d^+(u_1) \leq d^-(u_1)$, а у последней пары наоборот: $d^+(u_r) \geq d^-(u_r)$. Следовательно, существует пара, у которой компоненты окажутся равными. Белая вершина из такой пары и будет искомой вершиной.

Пример 1. На рис. 5 представлена схема, иллюстрирующая доказательство — поиск вложения звезды $Z_{2,2}$ в ее 3-расширение. Рассчитаем индексы для верхнего ряда вершин: $u_1: (2, 1)$, $u_2: (2, 2)$, $u_3: (2, 2)$, $u_4: (2, 2)$.

Таким образом, любая из вершин u_2 , v_3 или u_4 является искомым образом для центральной вершины звезды.

Предложение 3. Диграф $TD_{2n+k, 2n+k-2}$ при четном k является вершинным k -расширением направленной звезды $Z_{n,n}$.

Это предложение следует из предыдущего предложения, свойства 6 и очевидного замечания, что максимальный подграф вершинного k -расширения некоторого графа является для него вершинным $(k-1)$ -расширением.

Предложение 4. Пусть натуральные m , n , k таковы, что $m \neq n$, $m+n$ четно, а k нечетно. Никакой диграф, получающийся ориентацией однородного $(m+n+k+1)$ -вершинного графа $R_{m+n+k+1, m+n+k-1}$, не является вершинным k -расширением ни для какой направленной звезды $Z_{m,n}$.

Для доказательства достаточно показать, что предложение не выполняется уже при $k = 1$. Предположим противное: пусть орграф $\vec{G}$ — некоторая ориентация графа $R_{m+n+2, m+n}$ — является вершинным k -расширением для направленной звезды $Z_{m,n}$, причем $m \neq n$ и $m+n$ четно. Не ограничивая общности, будем считать, что $m > n$ (так как $m+n$ четно, то справедливо даже $m > n+1$). При удалении любой вершины v графа $R_{m+n+2, m+n+k}$ получается граф вида $O_1 + O_2 + \dots + O_2$, в котором есть только одна полная вершина u — та, которая была несмежна с удаленной вершиной v . Следовательно, при удалении любой вершины v орграфа $\vec{G}$ соответствующая вершина u должна иметь полустепени захода и исхода не меньше, чем m и n соответственно. В силу произвольности выбора v получаем, что любая вершина орграфа $\vec{G}$ должна иметь полустепени захода и исхода не меньше, чем m и n соответственно. Но тогда в каждую вершину орграфа $\vec{G}$ должно заходить не менее m дуг, откуда получаем, что общее число дуг будет не менее $m(m+n+2)$. Однако количество ребер графа $R_{m+n+2, m+n}$ есть $(m+n+2)(m+n)/2 < (m+n+2)(m+m)/2 = m(m+n+2)$. Полученное противоречие доказывает предложение.

С учетом предложений 2, 3 и 4, можно уточнить теорему 4.

Теорема 5. Диграф $ZT_{m,n,p}$, получающийся из направленной звезды $Z_{m,n}$ добавлением $k = p - 1$ копий центральной вершины и соединением их друг с другом по схеме транзитивного турнира, является при $t \neq n$ единственным, с точностью до изоморфизма, минимальным вершинным k -расширением орграфа $Z_{m,n}$.

Теорема 6. Диграф $TD_{2n+k,2n+k-2}$ при четном k или максимальный подграф диграфа $TD_{2n+k+2,2n+k}$ при нечетном k являются единственными минимальными вершинными k -расширениями направленной звезды $Z_{n,n}$.

Список литературы

1. Богомолов А. М., Салий В. Н., *Алгебраические основы теории дискретных систем*. Наука, Москва, 1997.
2. Hayes J. P., A graph model for fault-tolerant computing system. *IEEE Trans. Comput.* (1976) **C25**, №9, 875–884.
3. Harary F., Hayes J. P., Edge fault tolerance in graphs. *Networks* (1993) **23**, 135–142.
4. Harary F., Hayes J. P., Node fault tolerance in graphs. *Networks* (1996) **27**, 19–23.
5. Абросимов М. Б., О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов. *Математические заметки* (2010) **88**, №5, 643–650.
6. Абросимов М. Б., Минимальные k -расширения предполных графов. *Известия ВУЗов: Математика* (2003) **493**, №6, 3–11.
7. Абросимов М. Б., Минимальные расширения неориентированных звезд. В сб.: *Теоретические проблемы информатики и ее приложений*, **7**. СГУ, Саратов, 2006, с. 3–5.
8. Абросимов М. Б., Минимальные расширения транзитивных турниров. *Вестник ТГУ* (2006), № 17 187–190.

Статья поступила 15.10.2008.