Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Захарова, Симметрические линейные пространства графов, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 2, 103–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1145>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:11:51

Симметрические линейные пространства графов

© 2011 г. Д. В. Захарова

Рассматриваются множества графов, замкнутые относительно симметрической разности и переименования вершин. Доказывается, что при любом n имеется не более 14 таких множеств, состоящих из графов с n вершинами.

1. Введение

В статье продолжается начатое в [1] исследование симметрических пространств графов. Классом графов называется множество обыкновенных графов, замкнутое относительно переименования вершин. Если X — класс графов, то через X_n обозначается множество всех графов из X с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$. Сумма по модулю 2 графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ есть граф

$$G_1 \oplus G_2 = (V_1 \cup V_2, (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1)).$$

Если $V_1 = V_2$, то граф $G_1 \oplus G_2$ будем называть симметрической разностью графов G_1 и G_2 .

В [1] рассматривались классы графов, замкнутые относительно сложения по модулю 2 и удаления изолированных вершин, и доказано, что существует ровно 5 таких классов. Очевидно, имеется бесконечно много классов, замкнутых только относительно сложения по модулю 2 (например, при любом k множество всех графов с не менее чем k вершинами). Если X — такой класс графов, то множество X_n при любом n замкнуто относительно симметрической разности. Такое множество, то есть множество графов с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$, замкнутое относительно симметрической разности, будем называть симметрическим линейным пространством графов (СЛПГ) порядка n . В настоящей статье будет доказано, что при любом n существует не более 14 СЛПГ порядка n . Перечислим эти множества (индекс n опускаем):

B1 — все графы;

B2 — графы с четным числом ребер;

B3 — графы, у которых степени всех вершин имеют одинаковую четность;

B4 — графы, у которых степени вершин имеют одинаковую четность, совпадающую с четностью числа ребер;

B5 — графы, у которых степени всех вершин четны;

B6 = **B2** $\cap$ **B3**;

B7 = **B2** $\cap$ **B5**;

L1 — полные двудольные и полные кодвудольные (дополнительные к полным двудольным) графы;

L2 = **L1** $\cap$ **B5** — полные двудольные и полные кодвудольные графы с четными степенями всех вершин;

L3 — полные двудольные графы с четными степенями и полные кодвудольные с нечетными степенями всех вершин;

L4 — полные двудольные графы;

L5 = **L4** $\cap$ **B5** — полные двудольные графы с четными степенями всех вершин;

L6 — полный и пустой графы;

L7 — пустой граф.

Замкнутость всех этих множеств относительно симметрической разности легко проверяется.

Отметим, что при нечетном n имеется не более 8 СЛПГ, так как в этом случае **B3** = **B5**, **B4** = **B6** = **B7**, **L2** = **L3** = **L5** = $\emptyset$.

На протяжении статьи число вершин n считается фиксированным и рассматриваются графы с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$. При этом в обозначении множеств графов индекс, указывающий число вершин, будем опускать. Например, вместо **B1** _{n} пишем просто **B1**.

Некоторые стандартные обозначения используются в статье не совсем обычным образом. Именно, P_k и C_k , $k \leq n$, обозначают графы с n вершинами, у которых вершины $1, 2, \dots, k$ порождают соответственно путь или цикл (с ребрами $(1, 2)$, $(2, 3)$ и т.д.), остальные вершины — изолированные; $K_{p,q}$ — полный двудольный граф, в котором одна доля образована вершинами $1, 2, \dots, p$, другая образована вершинами $p + 1, p + 2, \dots, p + q$; $\bar{G}$ — граф, дополнительный к графу G .

Если G — граф, f — подстановка на множестве его вершин, то через G^f обозначаем граф, полученный из G переименованием вершин в соответствии с f , то есть вершины a и b смежны в графе G^f тогда и только тогда, когда вершины $f^{-1}(a)$ и $f^{-1}(b)$ смежны в графе G . Подстановку записываем в виде произведения циклов, опуская неподвижные вершины.

Для графа G через $[G]$ обозначаем минимальное СЛПГ, содержащее этот граф.

2. Классы L1–L7

Классы **L1**–**L7** являются подмножествами класса **L1**. Последний класс — наследственный, то есть замкнут относительно удаления вершин. Поэтому он может быть охарактеризован запрещенными графами — минимальными по отношению “быть порожденным подграфом” графами, не содержащимися в нем. Покажем, что множество минимальных запрещенных подграфов для **L1** состоит из пяти четырехвершинных графов. Пусть A_1 , A_2 , A_3 — графы с множеством вершин $\{1, 2, 3, 4\}$ и множествами ребер соответственно $\{(1, 2)\}$, $\{(1, 2), (2, 3)\}$, $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Очевидно, что эти графы, а также графы $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$, не принадлежат классу **L1**.

Лемма 1. Если в графе G нет порожденных подграфов, изоморфных графам $A_1, A_2, A_3, \bar{A}_1, \bar{A}_2$, то $G \in \mathbf{L1}$.

Доказательство. Граф A_3 — это P_4 в стандартных обозначениях. Известно [2], что граф, не содержащий P_4 в качестве порожденного подграфа, либо сам несвязен, либо несвязен дополнительный к нему. Если G несвязен и не является пустым графом, то в нем имеется не более двух компонент связности (иначе существовал бы порожденный подграф A_1). Так как не существует порожденного подграфа A_2 , каждая компонента есть полный подграф. Значит, G — полный кодвудольный граф. Аналогично убеждаемся, что если $\bar{G}$ несвязен и не является полным графом, то G — полный двудольный граф.

Следующая лемма позволяет в дальнейшем отдельно рассматривать классы **B1–B7** и **L1–L7**.

Лемма 2. Если X — СЛПГ, то $X \subseteq \mathbf{L1}$ или $C_4 \in X$.

Доказательство. Допустим, что $X \not\subseteq \mathbf{L1}$ и $G \in X - \mathbf{L1}$. Тогда G содержит порожденный подграф H , изоморфный одному из пяти запрещенных графов для **L1**. Допустим, что такой подграф порождается вершинами 1, 2, 3, 4. Покажем, что в любом случае $C_4 \in [G]$.

Если H изоморфен A_1 и содержит ребро $(1, 2)$, то

$$G \oplus G^{(1,3)} \oplus G^{(2,4)} \oplus G^{(1,4)(2,3)} \cong C_4.$$

Если H изоморфен A_2 и содержит ребра $(1, 2), (2, 3)$, то

$$G \oplus G^{(1,2)} \oplus G^{(3,4)} \oplus G^{(1,2)(3,4)} \cong C_4.$$

Если H изоморфен A_3 и содержит ребра $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$, то

$$G \oplus G^{(1,2)} \oplus G^{(3,4)} \oplus G^{(1,2)(3,4)} \cong C_4.$$

В оставшихся двух случаях утверждение следует из предыдущих ввиду тождества

$$\bar{G}_1 \oplus \bar{G}_2 = G_1 \oplus G_2.$$

Лемма 3. Если X — СЛПГ порядка n , $X \subseteq \mathbf{L1}$, $X \neq \mathbf{L6}$ и $X \neq \mathbf{L7}$, то $K_{2s, n-2s} \in X$ при любом $s \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Доказательство. Пусть G — граф из X , не являющийся ни полным, ни пустым, то есть G — полный двудольный или полный кодвудольный граф с непустыми долями. Возьмем вершины a и b из разных долей. Тогда

$$G \oplus G^{(a,b)} \cong K_{2, n-2}.$$

Пусть теперь $H = K_{2, n-2}$. Тогда

$$H \oplus H^{(1,3)(2,4)} \oplus H^{(1,5)(2,6)} \oplus \dots \oplus H^{(1,2s-1)(2,2s)} = K_{2s, n-2s}.$$

Теорема 1. Если X — СЛПГ порядка n и $X \subseteq \mathbf{L1}$, то X совпадает с одним из множеств **L1–L7**.

Доказательство. Пусть $X \subseteq \mathbf{L1}$, $X \neq \mathbf{L6}$, $X \neq \mathbf{L7}$, то есть X содержит хотя бы один граф, не являющийся ни полным, ни пустым. Возможны следующие варианты.

(1) В $\mathbf{X}$ все графы — полные двудольные.

- (а) Степени всех вершин в каждом графе из $\mathbf{X}$ четны (в этом случае n четно). Из леммы 3 следует, что $\mathbf{X} = \mathbf{L5}$.
- (б) В некотором графе $G \in \mathbf{X}$ имеется вершина нечетной степени. Тогда этот граф изоморфен $K_{2s+1, n-2s-1}$ при некотором s . По лемме 3, $K_{2s, n-2s} \in \mathbf{X}$. Следовательно, $\mathbf{X}$ содержит граф $K_{2s+1, n-2s-1} \oplus K_{2s, n-2s}$, изоморфный $K_{1, n-1}$. Пусть $H = K_{1, n-1}$. Тогда

$$H \oplus H^{(1,2)} \oplus H^{(1,3)} \oplus \dots \oplus H^{(1,t)} = K_{t, n-t}.$$

Таким образом, $\mathbf{X} = \mathbf{L4}$.

(2) В $\mathbf{X}$ есть полный кодвудольный граф.

- (а) Во всех полных двудольных графах из $\mathbf{X}$ степени всех вершин четны. Тогда n четно, а в каждом полном кодвудольном графе из $\mathbf{X}$ степени всех вершин имеют одинаковую четность.
- i. В каждом полном кодвудольном графе из $\mathbf{X}$ степени всех вершин нечетны. Пусть $\bar{K}_{2t, n-2t} \in \mathbf{X}$. По лемме 3, $K_{2s, n-2s} \in \mathbf{X}$ при любом s . Следовательно, в $\mathbf{X}$ содержится полный граф $K_n = \bar{K}_{2t, n-2t} \oplus K_{2t, n-2t}$ и граф $\bar{K}_{2s, n-2s} = K_n \oplus K_{2s, n-2s}$ при любом s , то есть, $\mathbf{X} = \mathbf{L3}$.
 - ii. В каждом полном кодвудольном графе из $\mathbf{X}$ степени всех вершин четны. Пусть $\bar{K}_{2t+1, n-2t-1} \in \mathbf{X}$. Тогда $\mathbf{X}$ содержит граф $\bar{K}_{2t+1, n-2t-1} \oplus K_{2t, n-2t}$, изоморфный $\bar{K}_{1, n-1}$. Но $\bar{K}_{1, n-1} \oplus K_{2s, n-2s} \cong \bar{K}_{2s-1, n-2s-1}$. Следовательно, $\mathbf{X} = \mathbf{L2}$.
 - iii. В $\mathbf{X}$ есть полные кодвудольные графы как с четными, так и с нечетными степенями. Допустим, $\mathbf{X}$ содержит графы $\bar{K}_{2s, n-2s}$ и $\bar{K}_{2t+1, n-2t-1}$. Тогда он содержит также граф $\bar{K}_{2s, n-2s} \oplus \bar{K}_{2t+1, n-(2t+1)} \cong K_{2t+1-2s, n-2t-1+2s}$, то есть полный двудольный граф с нечетными степенями. Это противоречит условию 2 (а).
- (б) В некотором графе $G \in \mathbf{X}$ имеется вершина нечетной степени. Как показано в 1 (б), в этом случае $\mathbf{X}$ содержит все полные двудольные графы. Кроме того, в нем имеется полный кодвудольный граф. Но тогда, рассуждая как в 2 (а), приходим к выводу, что $\mathbf{X}$ содержит все полные кодвудольные графы, то есть $\mathbf{X} = \mathbf{L1}$.

3. Классы В1–В7

Согласно лемме 2, любое СЛПГ, отличное от описываемых теоремой 1, содержит граф C_4 . Если G — произвольный граф с n вершинами, то из него и графов, изоморфных C_4 , можно получить граф весьма специального вида.

Лемма 4. Для любого графа G с n вершинами существует граф $H \in [C_4]$ такой, что в графе $G \oplus H$ каждая компонента связности является звездой или треугольником, причем имеется не более одной компоненты-треугольника.

Доказательство. Допустим, что в графе G имеется подграф, изоморфный P_4 . Возьмем граф F , изоморфный C_4 , в котором три ребра совпадают с ребрами этого графа P_4 . В

графе $G \oplus F$ ребер меньше, чем в графе G . Действуя таким образом, можно получить граф, в котором нет подграфов, изоморфных P_4 . В таком графе каждая компонента связности является звездой или треугольником. Нетрудно видеть, что граф, состоящий из двух компонент-треугольников, раскладывается в симметрическую разность трех графов, изоморфных C_4 .

Лемма 5. *Справедливо равенство $\mathbf{B7} = [C_4]$.*

Доказательство. Включение $[C_4] \subseteq \mathbf{B7}$ очевидно. Пусть $G \in \mathbf{B7}$, H — граф, существование которого утверждается в лемме 4. В обоих графах G и C_4 число ребер и все степени четны, поэтому то же будет верно и для графа $G \oplus H$. Значит, в нем не может быть компонент-звезд, состоящих более чем из одной вершины, не может быть и компоненты-треугольника, то есть $G \oplus H$ — пустой граф. Следовательно, $G = H \in [C_4]$.

Теорема 2. *Если X — СЛПГ и $X \not\subseteq \mathbf{L1}$, то X совпадает с одним из множеств $\mathbf{B1}$ – $\mathbf{B7}$.*

Доказательство. Из лемм 3 и 5 следует, что любое СЛПГ, не являющееся подпространством пространства $\mathbf{L1}$, содержит подпространство $\mathbf{B7} = [C_4]$. Если при этом в X все графы имеют четное число ребер и четные степени всех вершин, то $X = \mathbf{B7}$. Рассмотрим другие возможные случаи.

1. Во всех графах из X степени всех вершин четны и имеется граф $G \in X$ с нечетным числом ребер. Пусть H — граф, существование которого утверждается в лемме 4. Тогда $G \oplus H \cong C_3$. Любой цикл C_k можно представить как симметрическую разность графов, изоморфных C_3 и C_4 . Любой граф с четными степенями всех вершин является объединением циклов. Следовательно, $X = \mathbf{B5}$.

2. В X имеется граф G , в котором есть вершины и с четными, и с нечетными степенями. Из него и графа C_4 с помощью симметрической разности можно получить граф H , в котором есть вершина a степени 0 и вершина b степени 1. Тогда $H \oplus H^{(a,b)} \cong P_3$. Далее, $P_3 \oplus P_3^{(1,2,3,4)} \cong 2K_2$ (граф с двумя ребрами, не имеющими общей вершины). Очевидно, из P_3 и $2K_2$ можно получить любой граф с четным числом ребер. Следовательно, если в X все графы имеют четное число ребер, то $X = \mathbf{B2}$. Если же в X есть граф с нечетным числом ребер, то из него и графов P_3 и $2K_2$ можно получить граф с одним ребром, а из него — любой граф. Значит, в этом случае $X = \mathbf{B1}$.

3. В X имеются графы и с четными, и с нечетными степенями, но в каждом графе степени всех вершин имеют одинаковую четность. Графы с четными степенями образуют подпространство $\mathbf{X0}$, а графы с нечетными — смежный класс $\mathbf{X1}$. Как показано выше, $\mathbf{X0}$ совпадает с одним из пространств $\mathbf{B7}$, $\mathbf{B5}$. Если $\mathbf{X0} = \mathbf{B5}$, то есть состоит из всех графов с четными степенями, то $\mathbf{X1}$ состоит из всех графов с нечетными степенями и $X = \mathbf{B3}$.

Допустим, что $\mathbf{X0} = \mathbf{B7}$, то есть в $\mathbf{X0}$ все графы имеют четное число ребер. Тогда в $\mathbf{X1}$ либо у всех графов четное число ребер, либо у всех нечетное. В первом случае $X = \mathbf{B6}$, во втором $X = \mathbf{B4}$.

Список литературы

1. Алексеев В. Е., Захарова Д. В., О симметрических пространствах графов. *Дискретный анализ и исследование операций* (2007) **14**, №1, 21–26.
2. Corniel D. G., Lerchs H., Stewart-Burlingham L., Complement reducible graphs. *Discrete Appl. Math.* (1981) **13**, 163–174.

Статья поступила 15.10.2008.